Математическая логика

mk.cs.msu.ru $\to$ Лекционные курсы $\to$ Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

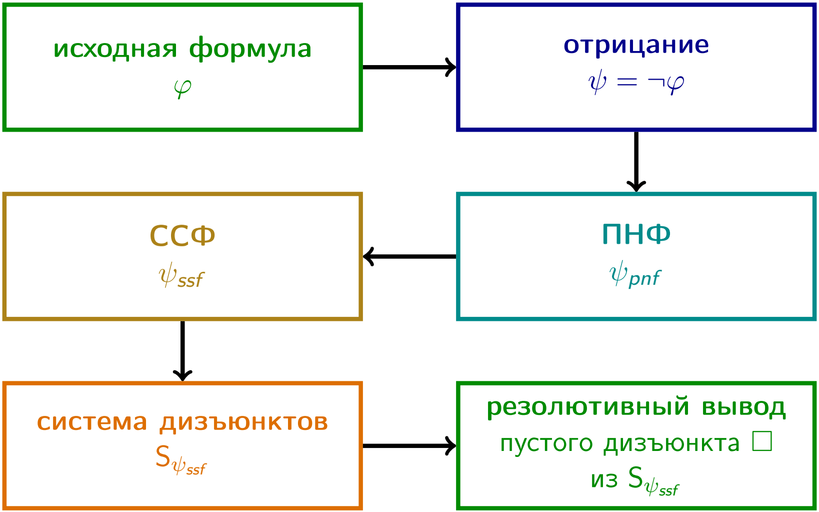
Блок 16

Предварённая нормальная форма (ПНФ)

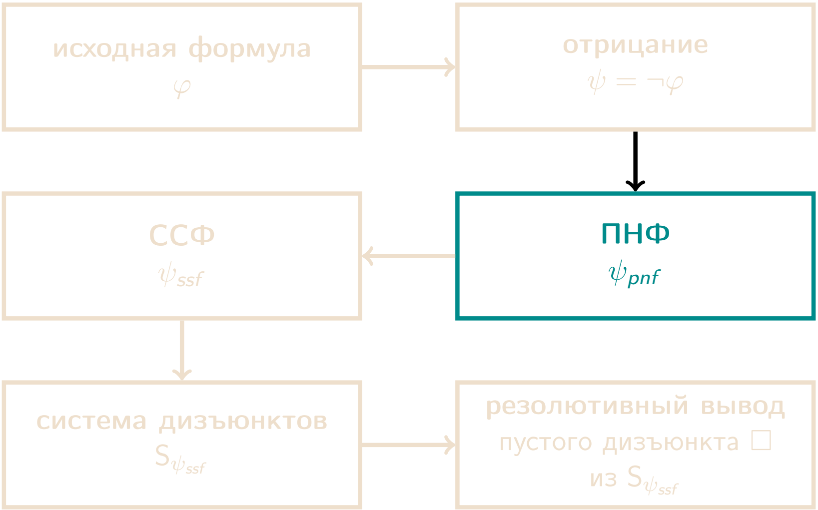
Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2020/2021, весенний семестр



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi$$



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi$$

Предварённая нормальная форма

Замкнутая формула находится в предварённой нормальной форме (ПНФ), если она имеет вид

$$\underbrace{Q_1 \mathtt{x}_1 \;\ldots Q_n \mathtt{x}_n}_{\text{кванторная приставка}} \;\; \underbrace{(\mathsf{D}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathsf{D}_k)}_{\text{матрица}} \;, \text{ где}$$

- $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$
- матрица — это бескванторная формула в конъюнктивной нормальной форме (КНФ):
  - $\mathsf{D}_i = \mathsf{L}^i_1 \vee \cdots \vee \mathsf{L}^i_{m_i}$ — множитель
  - L^i_j — литера: атом или его отрицание

Наряду с “находится в ПНФ” будем говорить “является ПНФ”

Предварённая нормальная форма

Пример: формула

$$\forall x\ \exists y\ \exists z\ \forall u\ (P(x)\,\&\,\neg R(x,u)\,\&(\neg P(y) \vee R(x,z)))$$

находится в **предварённой нормальной форме**:

- кванторная приставка:

  $$\forall x\ \exists y\ \exists z\ \forall u$$

- матрица:

  $$P(x)\,\&\,\neg R(x,u)\,\&(\neg P(y) \vee R(x,z))$$

  - множители: $P(x)$, $\neg R(x,u)$, $\neg P(y) \vee R(x,z)$
  - литеры: $P(x)$, $\neg R(x,u)$, $\neg P(y)$, $R(x,z)$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство.

Согласно *теореме о равносильной замене*,
достаточно описать способ приведения произвольной формулы к ПНФ при помощи применения *основных равносильностей* логики предикатов

Шаги приведения сгруппируем в несколько (5) этапов

Проиллюстрируем устройство этапов на конкретном примере:

$$\neg\exists x\ (P(x)\,\&(\forall x\ P(x) \to \exists y\ R(x,y)) \to \exists y\ R(x,y))$$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство. $\neg\exists x\,(P(x)\,\&(\forall x\,P(x)\to\exists y\,R(x,y))\to\exists y\,R(x,y))$

1. *Переименование переменных*

Переименуем связанные переменные так,
чтобы кванторами связывались попарно различные переменные

Для этого примéним основные равносильности

$$\forall x\,\varphi\sim\forall y\,(\varphi\{x/y\})\qquad\qquad \exists x\,\varphi\sim\exists y\,(\varphi\{x/y\}),$$

каждый раз выбирая “новую” переменную y

$$\neg\exists x\,(P(x)\,\&(\forall x\,P(x)\to\exists y\,R(x,y))\to\exists y\,R(x,y))$$
$$\sim$$
$$\neg\exists x\,(P(x)\,\&(\forall z\,P(z)\to\exists y\,R(x,y))\to\exists y\,R(x,y))$$
$$\sim$$
$$\neg\exists x\,(P(x)\,\&(\forall z\,P(z)\to\exists y\,R(x,y))\to\exists u\,R(x,u))$$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство. $\neg\exists x\,(P(x)\,\&(\forall z\,P(z)\to\exists y\,R(x,y))\to\exists u\,R(x,u))$

2. *Удаление импликаций*

Удалим из формулы все импликации при помощи основной равносильности

$$\varphi\to\psi\sim\neg\varphi\vee\psi$$

$$\neg\exists x\,(P(x)\,\&(\forall z\,P(z)\to\exists y\,R(x,y))\to\exists u\,R(x,u))$$
$$\sim$$
$$\neg\exists x\,(P(x)\,\&(\neg\forall z\,P(z)\vee\exists y\,R(x,y))\to\exists u\,R(x,u))$$
$$\sim$$
$$\neg\exists x\,(\neg(P(x)\,\&(\neg\forall z\,P(z)\vee\exists y\,R(x,y)))\vee\exists u\,R(x,u))$$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство. $\neg\exists x\ (\neg(P(x)\,\&(\neg\forall z\ P(z) \vee \exists y\ R(x,y))) \vee \exists u\ R(x,u))$

3. *Продвижение отрицаний*

Преобразуем формулу так,
чтобы отрицания располагались только непосредственно над атомами

Для этого применим основные равносильности

$$\neg(\varphi \,\&\, \psi) \sim \neg\varphi \vee \neg\psi \qquad \neg(\varphi \vee \psi) \sim \neg\varphi \,\&\, \neg\psi \qquad \neg\neg\varphi \sim \varphi$$

$$\neg\forall x\ \varphi \sim \exists x\ \neg\varphi \qquad \neg\exists x\ \varphi \sim \forall x\ \neg\varphi$$

$$\neg\exists x\ (\neg(P(x)\,\&(\neg\forall z\ P(z) \vee \exists y\ R(x,y))) \vee \exists u\ R(x,u))$$
$$\sim$$
$$\forall x\ \neg(\neg(P(x)\,\&(\neg\forall z\ P(z) \vee \exists y\ R(x,y))) \vee \exists u\ R(x,u))$$
$$\sim$$
$$\forall x\ (\neg\neg(P(x)\,\&(\neg\forall z\ P(z) \vee \exists y\ R(x,y)))\,\&\neg\exists u\ R(x,u))$$
$$\sim$$
$$\forall x\ (\_\,P(x)\,\&(\exists z\ \neg P(z) \vee \exists y\ R(x,y))\,\&\,\forall u\ \neg R(x,u))$$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство. $\forall x\,(P(x) \,\&\, (\exists z\, \neg P(z) \vee \exists y\, R(x,y)) \,\&\, \forall u\, \neg R(x,u))$

4. *Вынесение кванторов*

Вынесем все кванторы “наружу”, собрав их в кванторную приставку

Для этого примéним основные равносильности

$$\begin{array}{lll} \forall x\, \varphi \,\&\, \psi \sim \forall x\,(\varphi \,\&\, \psi) & \exists x\, \varphi \,\&\, \psi \sim \exists x\,(\varphi \,\&\, \psi) & \chi_1 \,\&\, \chi_2 \sim \chi_2 \,\&\, \chi_1 \\ \forall x\, \varphi \vee \psi \sim \forall x\,(\varphi \vee \psi) & \exists x\, \varphi \vee \psi \sim \exists x\,(\varphi \vee \psi) & \chi_1 \vee \chi_2 \sim \chi_2 \vee \chi_1 \end{array}$$

После этапов 2, 3 “над” кванторами могут располагаться только & и $\vee$

После этапа 1 при вынесении квантора за скобки в ψ не встречается x

$$\forall x\,(P(x) \,\&\, (\exists z\, \neg P(z) \vee \exists y\, R(x,y)) \,\&\, \forall u\, \neg R(x,u))$$
$$\sim$$
$$\forall x\,(P(x) \,\&\, \_\, \exists z\, (\neg P(z) \vee \exists y\, R(x,y)) \,\&\, \forall u\, \neg R(x,u))$$
$$\sim$$
$$\forall x\,(\exists z\, (P(x) \,\&\, \_\,(\neg P(z) \vee \exists y\, R(x,y))) \,\&\, \forall u\, \neg R(x,u))$$
$$\sim \ldots \sim$$
$$\forall x\, \exists z\, \exists y\, \forall u\, (P(x) \,\&\, (\neg P(z) \vee R(x,y)) \,\&\, \neg R(x,u))$$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство. $\forall x\, \exists z\, \exists y\, \forall u\, (P(x) \,\&(\neg P(z) \vee R(x, y)) \,\& \neg R(x, u))$

5. *Получение КНФ*

С использованием законов булевой алгебры

$$\psi \vee (\chi_1 \,\&\, \chi_2) \sim (\psi \vee \chi_1) \,\&(\psi \vee \chi_2) \qquad \psi \vee \chi \sim \chi \vee \psi$$

булеву часть подформулы можно легко преобразовать в КНФ

В рассматриваемом примере никакие преобразования не нужны, а методы приведения произвольной булевой формулы к КНФ (*вроде бы*) должны быть вам известны

Итог:

после этапа 4 в формуле появляется **кванторная приставка**,
а после этапа 5 “под” приставкой располагается **КНФ**,
то есть получается ПНФ ▼

Теорема о предварённой нормальной форме

Напоследок покажем сквозной пример из доказательства
от начала до конца на одном слайде

$$\neg\exists x\ (P(x)\,\&(\forall x\ P(x) \to \exists y\ R(x,y)) \to \exists y\ R(x,y))$$

$$\neg\exists x\ (P(x)\,\&(\forall z\ P(z) \to \exists y\ R(x,y)) \to \exists y\ R(x,y))$$

$$\neg\exists x\ (P(x)\,\&(\forall z\ P(z) \to \exists y\ R(x,y)) \to \exists u\ R(x,u))$$

$$\neg\exists x\ (P(x)\,\&(\neg\forall z\ P(z) \vee \exists y\ R(x,y)) \to \exists u\ R(x,u))$$

$$\neg\exists x\ (\neg(P(x)\,\&(\neg\forall z\ P(z) \vee \exists y\ R(x,y))) \vee \exists u\ R(x,u))$$

$$\forall x\ \neg(\neg(P(x)\,\&(\neg\forall z\ P(z) \vee \exists y\ R(x,y))) \vee \exists u\ R(x,u))$$

$$\forall x\ (\neg\neg(P(x)\,\&(\neg\forall z\ P(z) \vee \exists y\ R(x,y)))\,\&\,\neg\exists u\ R(x,u))$$

$$\forall x\ (\_\,P(x)\,\&(\exists z\ \neg P(z) \vee \exists y\ R(x,y))\,\&\,\forall u\ \neg R(x,u))$$

$$\forall x\ (P(x)\,\&\ \_\,\exists z\ (\neg P(z) \vee \exists y\ R(x,y))\,\&\,\forall u\ \neg R(x,u))$$

$$\forall x\ (\exists z\ (P(x)\,\&\ \_\,(\neg P(z) \vee \exists y\ R(x,y)))\,\&\,\forall u\ \neg R(x,u))$$

...

$$\forall x\ \exists z\ \exists y\ \forall u\ (P(x)\,\&(\neg P(z) \vee R(x,y))\,\&\,\neg R(x,u))$$