Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Вне программы 05

Теорема Гёделя о полноте

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2024/2025, осенний семестр

Первые варианты натурального исчисления, непохожие друг на друга и на то, что недавно обсуждалось, были предложены Г. Генценом (1934) и С. Яськовским (1929-1935)

Но понятие логического исчисления (не натурального, а вообще) как формализации устройства доказательств существовало и до них

В частности, некоторое время до этого[1] предлагались и исследовались логические исчисления, известные сейчас как исчисления гильбертовского типа:

- ФИ — это не секвенции, а более привычные формулы логики предикатов
- В исчисление включаются только «самые необходимые» правила вывода
- Возможности построения доказательств, которые в натуральном исчислении были отражены в правилах вывода, здесь предоставляются аксиомами

Обсудим один из популярных вариантов ($\mathfrak{H}$) такого исчисления

1 Возникло не позднее 1927 года; выискивать более точные даты было лень

Включим в $\mathfrak{H}$ два правила вывода:

1. Правило отделения (modus ponens):
$$R_{mp}\colon\ \frac{A, A \to B}{B}$$

2. Правило обобщения:
$$R_g\colon\ \frac{A}{\forall \mathrm{x}\ A}$$

Это упрощённые варианты одноимённых правил исчисления $\mathfrak{N}$, соответствующие секвенциям с пустой левой частью (не содержащим ни одного предположения)

Включим в $\mathfrak{H}$ 13 схем аксиом:

1. $A \to (B \to A)$
2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
3. $A \,\&\, B \to A$
4. $A \,\&\, B \to B$
5. $A \to (B \to A \,\&\, B)$
6. $A \to A \vee B$
7. $B \to A \vee B$
8. $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$
9. $\neg A \to (A \to B)$
10. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
11. $A \vee \neg A$
12. $\forall \mathtt{x}\, A \to A\{\mathtt{x}/t\}$
13. $A\{\mathtt{x}/t\} \to \exists \mathtt{x}\, A$

Здесь используются параметры A, B, C (формулы), $\mathtt{x}$ (переменная) и t (терм, такой что подстановка $\{\mathtt{x}/t\}$ правильна для A)

Внимательные могли заметить, что аксиомы $\mathfrak{H}$ можно сделать весьма похожими на правила вывода $\mathfrak{N}$, если заменить некоторые «$\rightarrow$» на «$\overline{\qquad\qquad\qquad}$», «$\vdash$» или «,»

Этим аналогии не исчерпываются, но сильно углубляться в это не будем

Теорема (Гёделя о полноте)
Формула логики предикатов доказуема в $\mathfrak{H}$ в том и только том случае, если она общезначима

Эта теорема, хотя и не очень актуальна сейчас в прикладном смысле, является «фундаментом» логических методов решения задач:

- Ей обозначается связка «успешный вывод + теорема о корректности + теорема о полноте» для описания и анализа метода
  - «Полнота» в смысле теоремы Гёделя — это «корректность + полнота» в лекциях по этому курсу
- Это известный результат, к которому можно *сводить* желаемые аналогичные результаты для других исчислений