Лекция 4. Вероятностный метод. Линейность математического ожидания

Лектор — Нагорный Александр Степанович
anagorny@list.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

Основы

Утверждение (линейность математического ожидания).

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — случайные величины (не обязательно независимые) с конечным математическим ожиданием, а $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ — произвольные постоянные. Тогда случайная величина $X = c_1 X_1 + \dots + c_n X_n$ имеет математическое ожидание

$$\mathbf{E}[X] = c_1 \mathbf{E}[X_1] + \dots + c_n \mathbf{E}[X_n].$$

Основы

Пример. Пусть σ — случайная перестановка на множестве $\{1, \dots, n\}$, выбранная равновероятно. Обозначим через $X(\sigma)$ количество неподвижных точек перестановки σ.

Чтобы найти $\mathbf{E}[X]$, рассмотрим сумму $X = X_1 + \ \dots \ + X_n$, где X_i — индикатор события $\sigma(i) = i$ $(1 \le i \le n)$. Тогда при всех i

$$\mathbf{E}[X_i] = \Pr[\sigma\,(i) = i] = \frac{1}{n},$$

и

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[X_1] + \ \dots + \mathbf{E}[X_n] = \frac{1}{n} + \ \dots \ + \frac{1}{n} = 1.$$

Основы

Замечание. В приложениях мы часто пользуемся тем, что существует точка вероятностного пространства, для которой $X \geq \mathbf{E}(X)$ и точка, для которой $X \leq \mathbf{E}(X)$. Результаты, представленные на этой лекции, подобраны так, чтобы проиллюстрировать эту базовую методологию.

Количество гамильтоновых путей в турнире

Определение 1. Гамильтоновым путём в графе называется остовный путь, в котором все вершины попарно различны.

Теорема 1. ([3] Селе, 1943). Существует турнир T с n игроками и по меньшей мере с $n!\,2^{-n+1}$ гамильтоновыми путями.

Доказательство было рассказано на первой лекции.

Замечание. Селе предположил, что максимально возможное число гамильтоновых путей в турнире из n игроков не превосходит величины $\frac{n!}{(2-o(1))^n}$. Это было доказано в работе Алона [2] спустя почти 50 лет.

Разбиение графов

Теорема 2. Пусть $G = (V, E)$ — n-вершинный граф с e рёбрами. Тогда G содержит двудольный подграф с не менее чем $e/2$ рёбрами.

Доказательство. Пусть $T \subseteq V$ — случайное подмножество, заданное распределением $\Pr[x \in T] = 1/2$, причём элементы подмножества выбираются независимо друг от друга. Положим $B = V \setminus T$.

Назовём ребро $\{x, y\} \in E$ **соединяющим**, если ровно одна из вершин x, y принадлежит T. Через X обозначим число соединяющих рёбер.

Разбиение графов

Доказательство (продолжение). Разложим в сумму

$$X = \sum_{\{x,y\}\in E} X_{xy},$$

где X_{xy} — индикатор того, что ребро $\{x, y\}$ является соединяющим. Тогда

$$\mathbf{E}[X_{xy}] = 1/2\,,$$

так как вероятность того, что результаты двух подбрасываний «правильной» монеты будут различными, равна $1/2$.

Разбиение графов

Доказательство (окончание). Следовательно,

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{\{x,y\}\in E} \mathbf{E}[X_{xy}] = \frac{e}{2}.$$

Таким образом, $X \geq e/2$ для некоторого T, а двудольный граф определяется множеством соединяющих рёбер. ■

Более тонко построенное вероятностное пространство позволяет немного улучшить результат:

Разбиение графов
(другое вероятностное пространство)

Теорема 3. Если граф содержит $2n$ вершин и e рёбер, то в нём найдётся двудольный подграф с не менее чем $\frac{en}{2n-1}$ рёбрами.

Если граф содержит $2n+1$ вершин и e рёбер, то в нём найдётся двудольный подграф с не менее чем $\frac{e(n+1)}{2n+1}$ рёбрами.

Доказательство. Пусть граф G имеет $2n$ вершин. Выберем T случайно из множества всех n-элементных подмножеств V. Каждое ребро $\{x, y\}$ является соединяющим с вероятностью $\frac{n}{2n-1}$ (поскольку, вне зависимости от того, куда попала вершина x, для вершины y есть ровно n возможностей из $2n-1$, чтобы ребро $\{x, y\}$ стало соединяющим).

Разбиение графов
(другое вероятностное пространство)

Доказательство (окончание).

Далее доказательство проводится аналогично предыдущему.

Пусть теперь граф G имеет $2n+1$ вершин. Выберем T случайно среди всех n – элементных подмножеств V. Дальнейшее доказательство проводится аналогично предыдущему. ■

Монохроматические клики

Теорема 4. Существует рёберная раскраска в два цвета графа K_n, при которой число монохроматических подграфов K_a не превосходит

$$\binom{n}{a} 2^{1-\binom{a}{2}}.$$

Доказательство [набросок, проведите рассуждения самостоятельно].

Рассмотрим некоторую случайную 2-раскраску рёбер. Обозначим через X число монохроматических подграфов K_a, и найдём $\mathbf{E}[X]$. Для некоторой раскраски значение X не превосходит значения математического ожидания. ■

Монохроматические клики

Далее в курсе будет показано, как такая раскраска может быть найдена с помощью детерминированного и эффективного алгоритма.

Монохроматические двудольные подграфы

Теорема 5. Существует рёберная раскраска в два цвета графа $K_{m,n}$, при которой число монохроматических подграфов $K_{a,b}$ не превосходит

$$\binom{m}{a}\binom{n}{b}2^{1-ab}.$$

Доказательство [набросок, проведите рассуждения самостоятельно].

Рассмотрим некоторую случайную 2-раскраску рёбер. Обозначим через X число монохроматических подграфов $K_{a,b}$, и найдём $\mathbf{E}[X]$. Для некоторой раскраски значение X не превосходит значения математического ожидания. ■

Балансировка векторов

Обозначим через $|v|$ обычную евклидову норму вектора v.

Теорема 6. Пусть векторы $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ таковы, что все $|v_i| = 1$. Тогда существует набор $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$, такой, что

$$| \varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_n v_n | \le \sqrt{n}.$$

Кроме того, существует набор $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$, такой, что

$$| \varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_n v_n | \ge \sqrt{n}.$$

Балансировка векторов

Доказательство. Выберем элементы набора $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ равновероятно и независимо из множества $\{-1, 1\}$. Положим

$$X = | \varepsilon_1 v_1 + \ldots + \varepsilon_n v_n |^2.$$

Тогда

$$X = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j \, v_i \cdot v_j.$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i \cdot v_j \, \mathbf{E}[\varepsilon_i \varepsilon_j].$$

Балансировка векторов

Доказательство (окончание). Если $i \neq j$, то из независимости ε_i и ε_j имеем $\mathbf{E}[\varepsilon_i \varepsilon_j] = \mathbf{E}[\varepsilon_i]\,\mathbf{E}[\varepsilon_j] = 0$.

Если же $i = j$, то $\varepsilon_i^2 = 1$ и $\mathbf{E}\left[\varepsilon_i^2\right] = 1$. Тогда

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot v_i\,\mathbf{E}[\varepsilon_i^2] = \sum_{i=1}^{n} |v_i|^2 = n.$$

Таким образом, найдутся наборы $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$, такие, что $X \geq n$, и такие, что $X \leq n$.

Извлекая квадратные корни, получаем требуемые утверждения. ■

Балансировка векторов

Теорема 7. Пусть векторы $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ таковы, что все $|v_i| \le 1$, а значения $p_1, \dots, p_n \in [0, 1]$ произвольны. Положим вектор $w = p_1 v_1 + \dots + p_n v_n$. Тогда существует набор $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}$, такой, что при $v = \varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_n v_n$ выполняется неравенство

$$|w - v| \le \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Доказательство. Выберем элементы набора $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ независимо друг от друга с вероятностями

$$\Pr[\varepsilon_i = 1] = p_i, \qquad \Pr[\varepsilon_i = 0] = 1 - p_i.$$

Балансировка векторов

Доказательство (продолжение).

Случайный набор чисел $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ порождает случайный вектор v и случайную величину

$$X = |w - v|^2.$$

Заметим, что

$$X = \left|\sum_{i=1}^{n} (p_i - \varepsilon_i)\, v_i\right|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_i \cdot v_j (p_i - \varepsilon_i)(p_j - \varepsilon_j).$$

Балансировка векторов

Доказательство (окончание). Тогда

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i \cdot v_j \, \mathbf{E}[(p_i - \varepsilon_i)(p_j - \varepsilon_j)].$$

Для $i \neq j$ имеем $\mathbf{E}[(p_i - \varepsilon_i)(p_j - \varepsilon_j)] = \mathbf{E}[p_i - \varepsilon_i]\mathbf{E}[p_j - \varepsilon_j] = 0$.

Для $i = j$ получим

$$\mathbf{E}[(p_i - \varepsilon_i)^2] = p_i(p_i - 1)^2 + (1 - p_i)p_i^2 = p_i(1 - p_i) \leq \frac{1}{4}.$$

Таким образом, $\mathbf{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i(1 - p_i)|v_i|^2 \leq \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2 \leq \frac{n}{4}$,

и доказательство завершается так же, как доказательство теоремы 6. ■

Без подбрасывания монет: Разбиение графов

Замечание.

*Не*вероятностное (конструктивное) доказательство **теоремы 2** может быть получено путём последовательного включения каждой вершины x в множества T или $B = V \setminus T$. На каждом шаге нужно поместить x либо в T либо в B так, чтобы по крайней мере половина рёбер из x, инцидентных предыдущим вершинам, были соединяющими.

Без подбрасывания монет: Разбиение графов

Упражнения.

1) Докажите, что при использовании этого эффективного алгоритма по крайней мере половина всех рёбер будут соединяющими;

2) Оцените сложность этого алгоритма (количество проверок смежности вершин графа, в худшем случае).

Без подбрасывания монет: Балансировка векторов

Существует простой итерационный алгоритм для выбора знаков в **теореме 6**. Возьмём, например, $\varepsilon_1 = 1$. Далее, для нужного выбора знака v_i $(2 \le i \le n)$ вычислим частичную сумму $w = \varepsilon_1 v_1 + \ldots + \varepsilon_{i-1} v_{i-1}$. Теперь, если требуется получить малое (по модулю) значение суммы, следует выбрать $\varepsilon_i = \pm 1$ так, чтобы вектор $\varepsilon_i v_i$ составлял с вектором w угол, не меньший прямого (тупой или прямой). Если же, наоборот, нужно получить большую по модулю сумму, то следует сделать угол острым или прямым.

Без подбрасывания монет: Балансировка векторов

В вырожденном случае, когда все углы прямые, с помощью теоремы Пифагора и индукции можно показать **(сделайте это!),** что конечный вектор будет иметь норму $\sqrt{n}$, а в остальных случаях норма будет меньше $\sqrt{n}$ или больше $\sqrt{n}$ (в первом и во втором случаях, соответственно).

Упражнение.

3) Оцените сложность этого алгоритма (под сложностью будем понимать количество вычислений норм, в худшем случае).

Без подбрасывания монет: Балансировка векторов

В **теореме 7** требуемые $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ можно получить с помощью так называемого «жадного» алгоритма. Пусть нам даны векторы $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$, такие, что все $|v_i| \le 1$, и значения $p_1, \dots, p_n \in [0, 1]$.

Шаг 1. Возьмём, например, $\varepsilon_1 = 1$.

Шаг $\boldsymbol{s}$ $(2 \le s \le n)$. Пусть все величины $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{s-1} \in \{0, 1\}$ уже выбраны. Рассмотрим частичную сумму

$$w_{s-1} = \sum_{i=1}^{s-1} (p_i - \varepsilon_i) v_i.$$

Без подбрасывания монет: Балансировка векторов

Выберем ε_s так, чтобы вектор

$$w_s = w_{s-1} + (p_s - \varepsilon_s)v_s = \sum_{i=1}^{s}(p_i - \varepsilon_i)v_i$$

имел минимальную норму. Случайное число $\varepsilon_s \in \{0,1\}$, выбранное с вероятностью $\Pr[\varepsilon_s = 1] = p_s$, даёт нам

$$\mathbf{E}[|w_s|^2] = |w_{s-1}|^2 + 2w_{s-1} \cdot v_s \mathbf{E}[p_s - \varepsilon_s] + |v_s|^2 \mathbf{E}[p_s - \varepsilon_s]^2 =$$

$$= |w_{s-1}|^2 + p_s(1 - p_s)|v_s|^2.$$

Таким образом, для некоторого выбора $\varepsilon_s \in \{0,1\}$ выполняется

Без подбрасывания монет: Балансировка векторов

неравенство

$$|w_s|^2 \leq |w_{s-1}|^2 + p_s(1 - p_s)|v_s|^2.$$

Поскольку это верно для всех $1 \leq s \leq n$ (при $w_0 = 0$), для вектора, получаемого жадным алгоритмом, будет выполняться неравенство

$$|w_n|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} p_i(1 - p_i)|v_i|^2 .$$

Без подбрасывания монет: Балансировка векторов

Несмотря на то, что эти доказательства схожи, прямое применение доказательства теоремы 7 для нахождения набора $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}$ может привести к перебору, требующему экспоненциального времени.

При применении жадного алгоритма на шаге с номером s производятся два вычисления значения $|w_s|^2$: для $\varepsilon_s = 0$ и 1, с последующим выбором того значения ε_s, которое даёт наименьшее значение целевой функции. Таким образом, мы проделываем лишь линейное количество вычислений норм, а алгоритм в целом занимает квадратичное время.

Без подбрасывания монет: Балансировка векторов

Упражнения.

4) Докажите, что вектор $v = \varepsilon_1 v_1 + \ldots + \varepsilon_n v_n$, получаемый по «жадному» алгоритму, удовлетворяет условию

$$|w - v| \leq \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

5) Оцените сложность этого алгоритма (под сложностью здесь также понимается количество вычислений норм, в худшем случае).

Литература к лекции

1. Алон Н., Спенсер Дж. Вероятностный метод. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007, С. 32-41.
2. Alon N. (1990) The maximum number of Hamiltonian paths in tournaments // *Combinatorica* **10**: P. 319-324.
3. Szele T. (1943) Kombinatorikai vizsgálatok az irányitott teljes gráffal kapcsolatban. // *Mat. Fiz. Lapok 50 P. 223-256*

   (перевод на немецкий язык: *Szele T., Publ. Math. Debrecen* **13**, 1966, P. 145-168).

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!