Лекция: Схемы из функциональных элементов с задержками (СФЭЗ), автоматность осуществляемых ими отображений. Представление КАВ СФЭЗ. Упрощения КАВ. Отличимость и неотличимость состояний КАВ. Теорема Мура о длине слова, отличающего два отличимых состояния КАВ.

Лектор - доцент Селезнева Светлана Николаевна

Лекции по "Дискретной математике"-2,
1-й курс, группа 141,
факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mathcyb.cs.msu.su

СФЭ с задержками

Схемой из функциональных элементов с задержками (СФЭЗ) $S(x_1(t), \ldots, x_n(t); y_1(t), \ldots, y_m(t))$ в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ называется

1) ориентированный граф $G = (V, E)$ с **возможными ориентированными циклами**, все вершины которого имеют полустепень захода не больше двух;

2) вершины с нулевой полустепенью захода называются **входными** и им приписываются **входные переменные** $x_1(t), \ldots, x_n(t)$;

3) некоторым вершинам с полустепенью захода, равной единице, приписывается **элемент единичной задержки** z, причем в любом ориентированном цикле графа G должна быть хотя бы одна вершина с приписанным элементом единичной задержки;

СФЭ с задержками

4) остальным вершинам с полустепью захода, равной единице, приписываются элементы **отрицания** $\neg$;

5) каждой вершине с полустепью захода, равной двум, приписывается или элемент **конъюнкции** $\&$, или элемент **дизъюнкции** $\vee$;

6) некоторые (в том числе и входные) вершины называются **выходными** и им приписываются (различные) **выходные переменные** $y_1(t), \ldots, y_m(t)$.

Теорема о функционировании СФЭЗ

Теорема 1. *Каждая СФЭЗ* $S(x_1(t), \ldots, x_n(t); y_1(t), \ldots, y_m(t))$ *осуществляет* **автоматное отображение** *входов* $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ *в выходы* $y_1(t), \ldots, y_m(t)$.

Доказательство. Рассмотрим граф $G = (V, E)$ СФЭЗ S. Пусть $v_1, \ldots, v_k \in V$ – все вершины, которым приписан элемент единичной задержки z. Рассмотрим вершину v_i, в нее входит одна дуга из вершины, которую обозначим v_i'. Удалим эту дугу из графа. Вершине v_i' припишем **новую выходную** переменную $q_i(t)$. Вершина v_i станет входной, ей припишем **новую входную** переменную $p_i(t)$. Заметим, что т.к. в любом ориентированном цикле графа G хотя бы одной вершине был приписан элемент z, выполнив такое преобразование для вершин $v_1, \ldots, v_k$, мы разорвем все ориентированные циклы.

Теорема о функционировании СФЭЗ

Доказательство (продолжение). В результате получили СФЭЗ (без задержек) S'. Запишем функции алгебры логики, которые реализуются в ее выходах:

$$\begin{array}{ll} y_j(t) = F_j(x_1(t), \ldots, x_n(t), p_1(t), \ldots, p_k(t)), & 1 \le j \le m; \\ q_i(t) = G_i(x_1(t), \ldots, x_n(t), p_1(t), \ldots, p_k(t)), & 1 \le i \le k. \end{array}$$

Из описания **функции единичной задержки** верно, что $p_i(t) = q_i(t-1)$, $q_i(0) = 0$. Поэтому

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_j(t) = F_j(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_k(t-1)), & 1 \le j \le m; \\ q_i(t) = G_i(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_k(t-1)), & \\ q_i(0) = 0, & 1 \le i \le k. \end{array} \right.$$

Т.е. построили **канонические уравнения**. А значит, преобразование – **автоматное**. $\square$

Теорема о представлении КАВ СФЭЗ

Теорема 2. *Каждый КАВ* $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_*)$ *может быть реализован схемой с задержками в базисе* $\{\&, \vee, \neg\}$ *при некотором* **кодировании** *элементов из множеств* A, B, Q *векторами из нулей и единиц.*

Доказательство. Пусть $|A| = r$, $|B| = s$, $|Q| = t$.

Закодируем элементы множества A векторами $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$, где $n = \lceil \log_2 r \rceil$;

элементы множества B – векторами $(y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \{0, 1\}^m$, где $m = \lceil \log_2 s \rceil$;

элементы множества Q – векторами $(q_1, q_2, \ldots, q_k) \in \{0, 1\}^k$, где $k = \lceil \log_2 t \rceil$, причем начальное состояние q_* закодируем нулевым вектором $(0, \ldots, 0)$.

Теорема о представлении КАВ СФЭЗ

Доказательство (продолжение). КАВ $\mathcal{A}$ можно задать каноническими уравнениями:

$$\begin{cases} y(t) = \varphi(x(t), q(t-1)); \\ q(t) = \psi(x(t), q(t-1)); \\ q(0) = q_*. \end{cases}$$

Перепишем эти уравнения для кодов элементов множеств A, B, Q. При этом функции φ и ψ преобразуются в **векторы** функций алгебры логики $(F_1, \ldots, F_m)$ и $(G_1, \ldots, G_k)$:

$$\begin{cases} y_j(t) = F_j(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_k(t-1)), & 1 \leq j \leq m; \\ q_i(t) = G_i(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_k(t-1)), & \\ q_i(0) = 0, & 1 \leq i \leq k. \end{cases} \quad (1)$$

Теорема о представлении КАВ СФЭЗ

Доказательство (продолжение). Теперь построим СФЭ (без задержек) S' в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$, реализующую на выходах $y_1(t), \ldots, y_m(t), q_1(t), \ldots, q_k(t)$ функции алгебры логики:

$$\begin{aligned} y_j(t) &= F_j(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_k(t-1)), \quad 1 \leq j \leq m; \\ q_i(t) &= G_i(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_k(t-1)), \quad 1 \leq i \leq k. \end{aligned}$$

После чего соединим в схеме S' **выход** $q_i(t)$ со **входом** $q_i(t-1)$ через элемент единичной задержки z для всех $i = 1, \ldots, k$.

Получим СФЭЗ S, осуществляющую автоматное отображение в соответствии с каноническими уравнениями (1).

$\square$

Функции $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$

Пусть $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$ – КАВ.

Определим по функциям φ и ψ
однозначные функции $\bar{\varphi} : A^* \times Q \to B^*$ и $\bar{\psi} : A^* \times Q \to Q$.

Для всех $a \in A$, $\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in A^*$ и $q \in Q$ положим:

$$\bar{\varphi}(a, q) = \varphi(a, q);$$
$$\bar{\varphi}(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}, q) = \varphi(a_{i_1}, q)\bar{\varphi}(a_{i_2} \dots a_{i_k}, \psi(a_{i_1}, q));$$

$$\bar{\psi}(a, q) = \psi(a, q);$$
$$\bar{\psi}(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}, q) = \bar{\psi}(a_{i_2} \dots a_{i_k}, \psi(a_{i_1}, q)).$$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$.

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ **и** $\bar{\psi}$.

	t_0			$t_0 + k - 1$	
	a_{i_1}	a_{i_2}	$\dots$	a_{i_k}	

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$

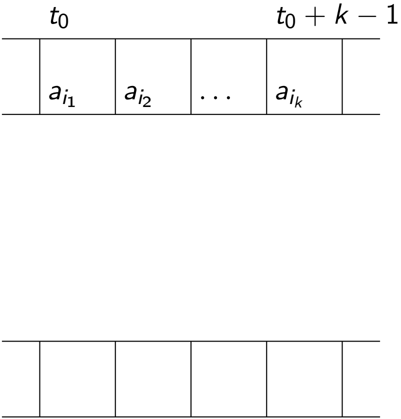
Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$.

	t_0			$t_0 + k - 1$	
	a_{i_1}	a_{i_2}	$\dots$	a_{i_k}	

$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in A^*$$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$

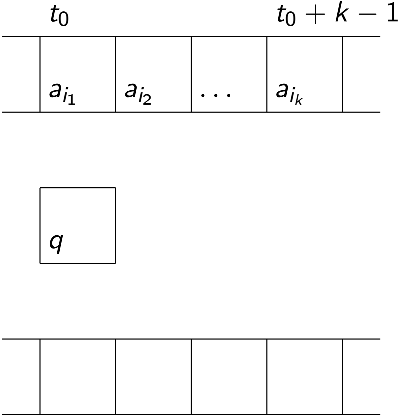
Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$.



$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in A^*$$

Содержательный смысл функций $\bar\varphi$ и $\bar\psi$

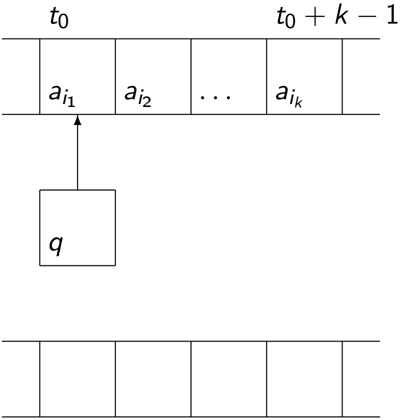
Содержательный смысл функций $\bar\varphi$ и $\bar\psi$.



$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k} \in A^*$$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$

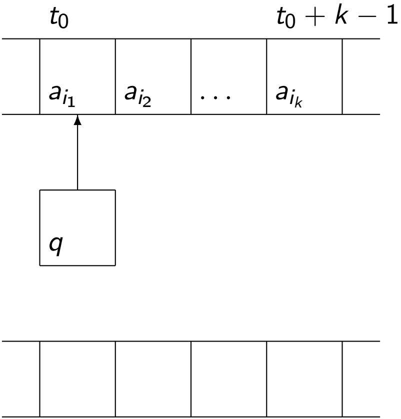
Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$.



$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k} \in A^*$$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$.

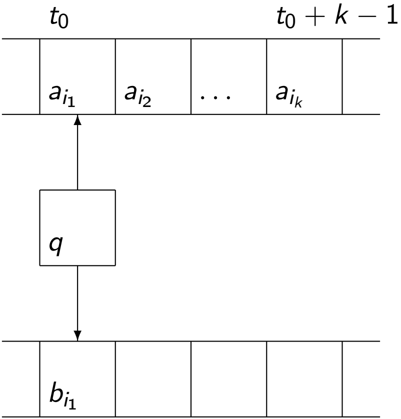


$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in A^*$$

$$b_{i_1} = \varphi(a_{i_1}, q)$$

Содержательный смысл функций $\bar\varphi$ и $\bar\psi$

Содержательный смысл функций $\bar\varphi$ и $\bar\psi$.

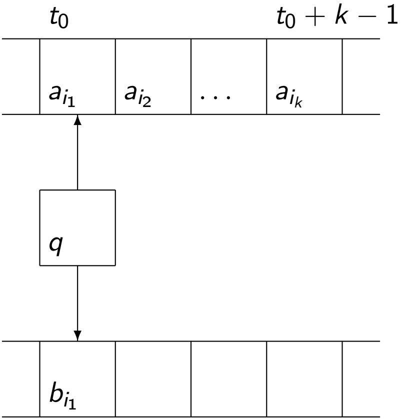


$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in A^*$$

$$b_{i_1} = \varphi(a_{i_1}, q)$$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$.

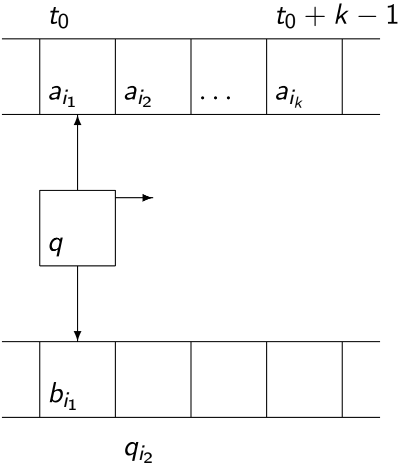


$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k} \in A^*$$

$$b_{i_1} = \varphi(a_{i_1}, q) \quad q_{i_2} = \psi(a_{i_1}, q)$$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ **и** $\bar{\psi}$.

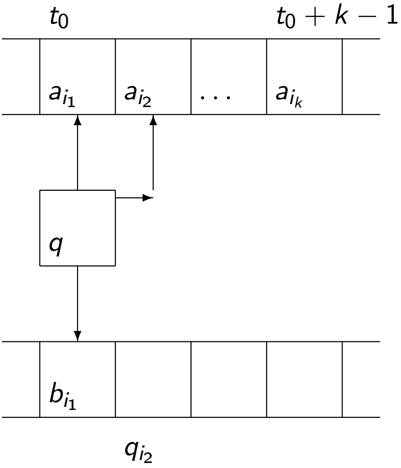


$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k} \in A^*$$

$$b_{i_1} = \varphi(a_{i_1}, q) \quad q_{i_2} = \psi(a_{i_1}, q)$$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$.

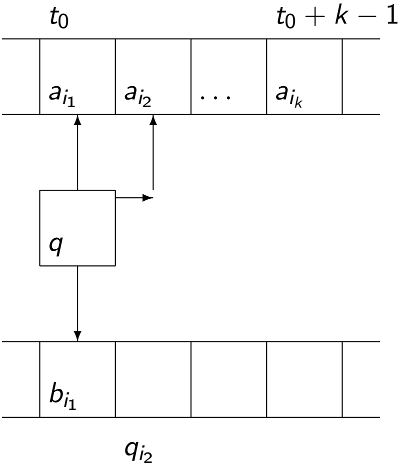


$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in A^*$$

$$b_{i_1} = \varphi(a_{i_1}, q) \quad q_{i_2} = \psi(a_{i_1}, q)$$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$.

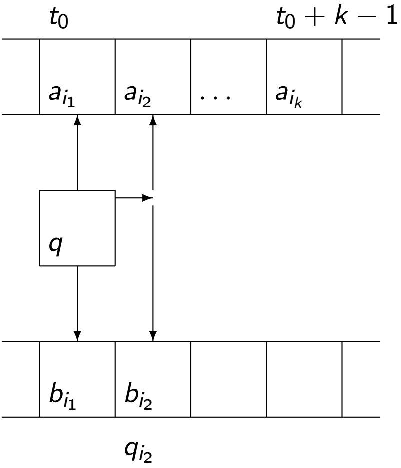


$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k} \in A^*$$

$$b_{i_1} = \varphi(a_{i_1}, q) \quad q_{i_2} = \psi(a_{i_1}, q)$$
$$b_{i_2} = \varphi(a_{i_2}, q_{i_2})$$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$.

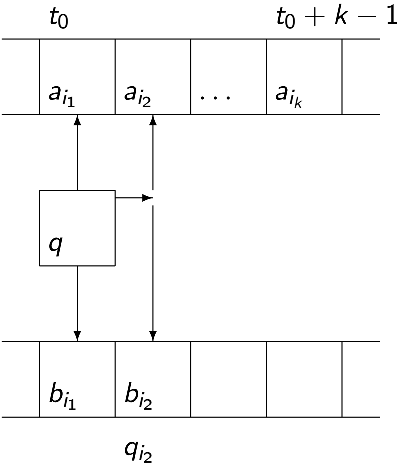


$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in A^*$$

$$b_{i_1} = \varphi(a_{i_1}, q) \quad q_{i_2} = \psi(a_{i_1}, q)$$
$$b_{i_2} = \varphi(a_{i_2}, q_{i_2})$$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$.

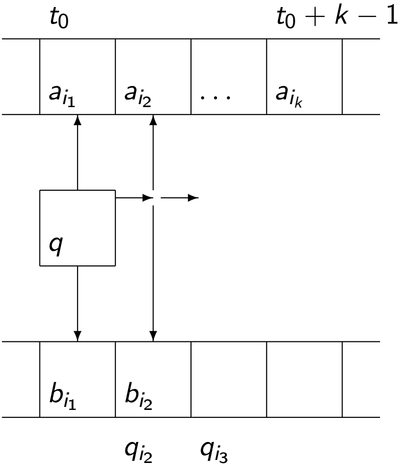


$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in A^*$$

$$b_{i_1} = \varphi(a_{i_1}, q) \quad q_{i_2} = \psi(a_{i_1}, q)$$
$$b_{i_2} = \varphi(a_{i_2}, q_{i_2}) q_{i_3} = \psi(a_{i_2}, q_{i_2})$$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ **и** $\bar{\psi}$.

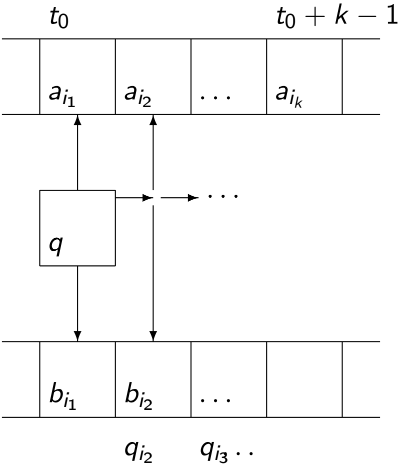


$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in A^*$$

$$b_{i_1} = \varphi(a_{i_1}, q) \quad q_{i_2} = \psi(a_{i_1}, q)$$
$$b_{i_2} = \varphi(a_{i_2}, q_{i_2}) q_{i_3} = \psi(a_{i_2}, q_{i_2})$$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$.

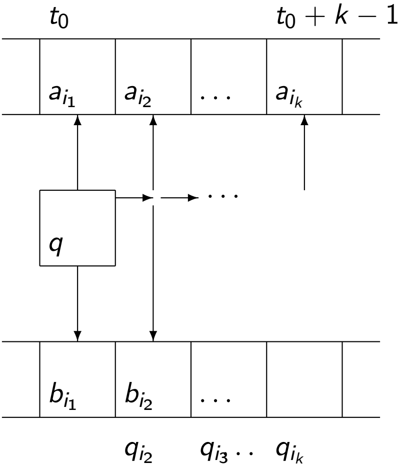


$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k} \in A^*$$

$$b_{i_1} = \varphi(a_{i_1}, q) \quad q_{i_2} = \psi(a_{i_1}, q)$$
$$b_{i_2} = \varphi(a_{i_2}, q_{i_2}) q_{i_3} = \psi(a_{i_2}, q_{i_2})$$
$$\ldots$$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$.

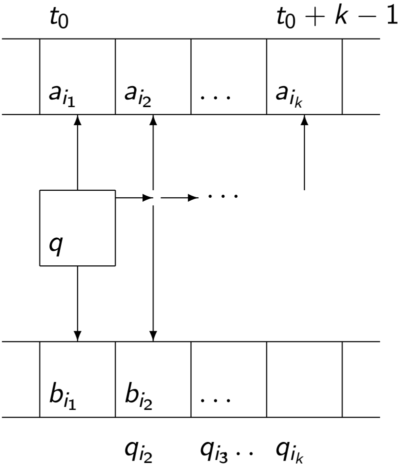


$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in A^*$$

$$b_{i_1} = \varphi(a_{i_1}, q) \quad q_{i_2} = \psi(a_{i_1}, q)$$
$$b_{i_2} = \varphi(a_{i_2}, q_{i_2}) q_{i_3} = \psi(a_{i_2}, q_{i_2})$$
$$\dots$$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$.

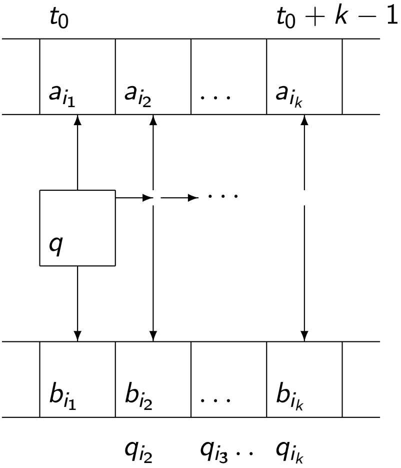


$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in A^*$$

$$b_{i_1} = \varphi(a_{i_1}, q) \quad q_{i_2} = \psi(a_{i_1}, q)$$
$$b_{i_2} = \varphi(a_{i_2}, q_{i_2}) q_{i_3} = \psi(a_{i_2}, q_{i_2})$$
$$\dots$$
$$b_{i_k} = \varphi(a_{i_k}, q_{i_k})$$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$.

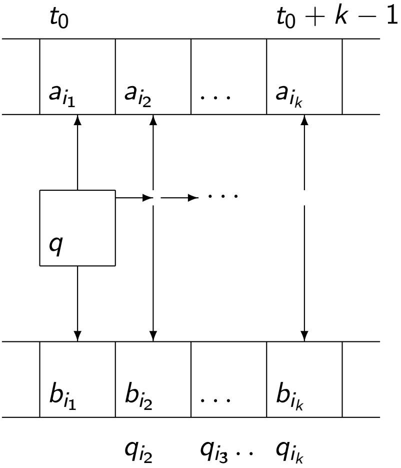


$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in A^*$$

$$b_{i_1} = \varphi(a_{i_1}, q) \quad q_{i_2} = \psi(a_{i_1}, q)$$
$$b_{i_2} = \varphi(a_{i_2}, q_{i_2}) q_{i_3} = \psi(a_{i_2}, q_{i_2})$$
$$\dots$$
$$b_{i_k} = \varphi(a_{i_k}, q_{i_k})$$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$.

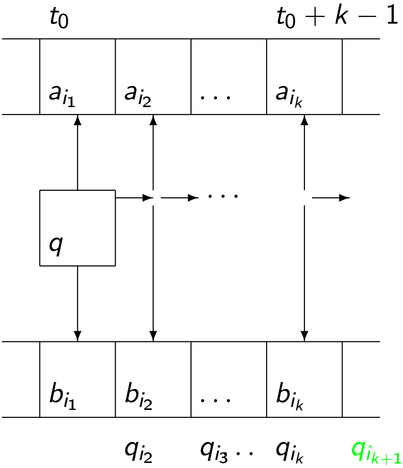


$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in A^*$$

$$b_{i_1} = \varphi(a_{i_1}, q) \quad q_{i_2} = \psi(a_{i_1}, q)$$
$$b_{i_2} = \varphi(a_{i_2}, q_{i_2}) q_{i_3} = \psi(a_{i_2}, q_{i_2})$$
$$\dots$$
$$b_{i_k} = \varphi(a_{i_k}, q_{i_k}) q_{i_{k+1}} = \psi(a_{i_k}, q_{i_k})$$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$.



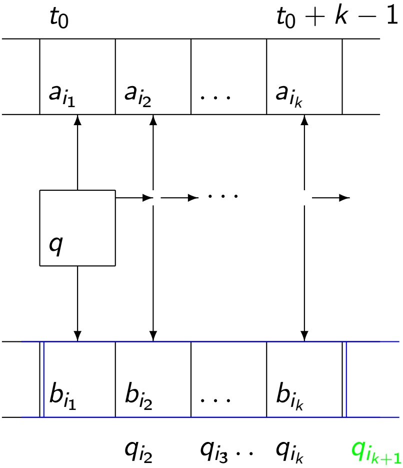
$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in A^*$$

$$b_{i_1} = \varphi(a_{i_1}, q) \quad q_{i_2} = \psi(a_{i_1}, q)$$
$$b_{i_2} = \varphi(a_{i_2}, q_{i_2}) q_{i_3} = \psi(a_{i_2}, q_{i_2})$$
$$\dots$$
$$b_{i_k} = \varphi(a_{i_k}, q_{i_k}) q_{i_{k+1}} = \psi(a_{i_k}, q_{i_k})$$

$$q_{i_{k+1}} = \bar{\psi}(\alpha, q)$$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$.



$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k} \in A^*$$

$$b_{i_1} = \varphi(a_{i_1}, q) \quad q_{i_2} = \psi(a_{i_1}, q)$$
$$b_{i_2} = \varphi(a_{i_2}, q_{i_2}) q_{i_3} = \psi(a_{i_2}, q_{i_2})$$
$$\ldots$$
$$b_{i_k} = \varphi(a_{i_k}, q_{i_k}) q_{i_{k+1}} = \psi(a_{i_k}, q_{i_k})$$

$$\beta = b_{i_1} b_{i_2} \ldots b_{i_k} = \bar{\varphi}(\alpha, q) \in B^*$$

$$q_{i_{k+1}} = \bar{\psi}(\alpha, q)$$

Эксперименты для КАВ

Экспериментом для КАВ $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$ называется произвольное слово $\alpha \in A^*$.

Длиной эксперимента $\alpha \in A^*$ называется число символов в нем $|\alpha|$.

Эксперимент $\alpha \in A^*$ **отличает** состояния $q' \in Q$ и $q'' \in Q$, если

$$\bar{\varphi}(\alpha, q') \neq \bar{\varphi}(\alpha, q'').$$

Иначе, эксперимент $\alpha \in A^*$ **не отличает** состояния $q' \in Q$ и $q'' \in Q$.

Отличимые и неотличимые состояния КАВ

Пусть $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$ – КАВ.

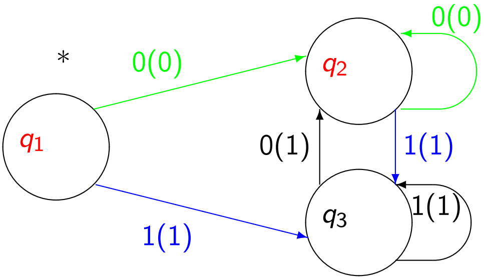
Состояния $q' \in Q$ и $q'' \in Q$ называются **отличимыми**, если найдется эксперимент $\alpha \in A^*$, который их отличает, т.е.

$$\bar{\varphi}(\alpha, q') \neq \bar{\varphi}(\alpha, q'').$$

Иначе, состояния $q' \in Q$ и $q'' \in Q$ называются **неотличимыми**, или **эквивалентными**.

Пример

Пример 1. Пусть $A = B = \{0, 1\}$. Рассмотрим автоматную функцию $f : A^\infty \to B^\infty$, задаваемую следующей диаграммой Мура.



Состояния q_1 и q_2 **неотличимы**.

Лемма об отличимых состояниях

Лемма 3. *Пусть* $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi)$ *– КАВ.*
Пусть состояния $q' \in Q$ *и* $q'' \in Q$ *отличимы экспериментом* $\alpha = a_{i_1} \dots a_{i_k} \in A^*$ *длины* k *и не отличимы никаким экспериментом меньшей длины.*
Тогда для каждого l, $1 \leq l \leq k$, *найдутся состояния* $q'_l \in Q$ *и* $q''_l \in Q$, *которые отличимы экспериментом длины* l *и не отличимы никаким экспериментом меньшей длины.*

Лемма об отличимых состояниях

Доказательство.

Лемма об отличимых состояниях

Доказательство.

Входная лента

	a_{i_1}	a_{i_2}	$\ldots$	a_{i_k}	

Лемма об отличимых состояниях

Доказательство.

Входная лента

	a_{i_1}	a_{i_2}	$\dots$	a_{i_k}	

$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in A^*$$

Лемма об отличимых состояниях

Доказательство.

Входная лента

	a_{i_1}	a_{i_2}	$\ldots$	a_{i_k}	

$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k} \in A^*$$

q'					

Лемма об отличимых состояниях

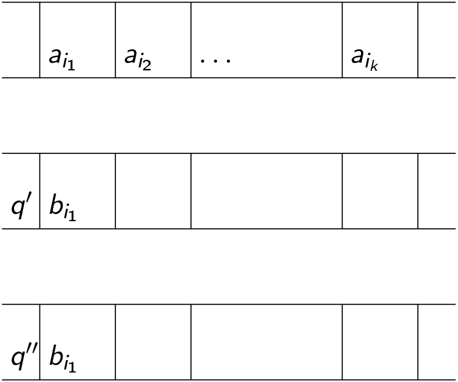
Доказательство.

$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k} \in A^*$$

Лемма об отличимых состояниях

Доказательство.

Входная лента



$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k} \in A^*$$

Лемма об отличимых состояниях

Доказательство.

$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in A^*$$

Лемма об отличимых состояниях

Доказательство.

$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in A^*$$

$$q'_{k-1} \neq q''_{k-1}$$

Лемма об отличимых состояниях

Доказательство.

Входная лента

	a_{i_1}	a_{i_2}	$\dots$	a_{i_k}	

$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in A^*$$

q'	b_{i_1}	b_{i_2}			

q'_{k-1}

$$q'_{k-1} \neq q''_{k-1}$$

q''	b_{i_1}	b_{i_2}			

q''_{k-1}

Лемма об отличимых состояниях

Доказательство.

$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k} \in A^*$$

$$q'_{k-1} \neq q''_{k-1}$$

Лемма об отличимых состояниях

Доказательство.

$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in A^*$$

$$q'_{k-1} \neq q''_{k-1}$$
$$q'_{k-2} \neq q''_{k-2}$$

Лемма об отличимых состояниях

Доказательство.

Входная лента

	a_{i_1}	a_{i_2}	$\dots$	a_{i_k}	

$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in A^*$$

q'	b_{i_1}	b_{i_2}	$\dots$		
		q'_{k-1}	q'_{k-2}	$\dots$	

$$q'_{k-1} \neq q''_{k-1}$$
$$q'_{k-2} \neq q''_{k-2}$$
$$\dots$$

q''	b_{i_1}	b_{i_2}	$\dots$		
		q''_{k-1}	q''_{k-2}	$\dots$	

Лемма об отличимых состояниях

Доказательство.

Входная лента

	a_{i_1}	a_{i_2}	$\ldots$	a_{i_k}	

$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k} \in A^*$$

q'	b_{i_1}	b_{i_2}	$\ldots$		
		q'_{k-1}	q'_{k-2} $\ldots$	q'_1	

q''	b_{i_1}	b_{i_2}	$\ldots$		
		q''_{k-1}	q''_{k-2} $\ldots$	q''_1	

$$q'_{k-1} \neq q''_{k-1}$$
$$q'_{k-2} \neq q''_{k-2}$$
$$\ldots$$

Лемма об отличимых состояниях

Доказательство.

Входная лента

	a_{i_1}	a_{i_2}	$\dots$	a_{i_k}	

$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in A^*$$

q'	b_{i_1}	b_{i_2}	$\dots$		
		q'_{k-1}	q'_{k-2} $\dots$	q'_1	

q''	b_{i_1}	b_{i_2}	$\dots$		
		q''_{k-1}	q''_{k-2} $\dots$	q''_1	

$$q'_{k-1} \neq q''_{k-1}$$
$$q'_{k-2} \neq q''_{k-2}$$
$$\dots$$
$$q'_1 \neq q''_1$$

Лемма об отличимых состояниях

Доказательство.

Входная лента

	a_{i_1}	a_{i_2}	$\dots$	a_{i_k}	

$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in A^*$$

q'	b_{i_1}	b_{i_2}	$\dots$	b	
		q'_{k-1}	q'_{k-2} $\dots$	q'_1	

q''	b_{i_1}	b_{i_2}	$\dots$	c	
		q''_{k-1}	q''_{k-2} $\dots$	q''_1	

$$q'_{k-1} \neq q''_{k-1}$$
$$q'_{k-2} \neq q''_{k-2}$$
$$\dots$$
$$q'_1 \neq q''_1$$

Лемма об отличимых состояниях

Доказательство.

Входная лента

	a_{i_1}	a_{i_2}	$\ldots$	a_{i_k}	

$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k} \in A^*$$

q'	b_{i_1}	b_{i_2}	$\ldots$	b	
		q'_{k-1}	q'_{k-2} $\ldots$	q'_1	

q''	b_{i_1}	b_{i_2}	$\ldots$	c	
		q''_{k-1}	q''_{k-2} $\ldots$	q''_1	

$$q'_{k-1} \neq q''_{k-1}$$
$$q'_{k-2} \neq q''_{k-2}$$
$$\ldots$$
$$q'_1 \neq q''_1$$
$$b \neq c$$

Лемма об отличимых состояниях

Доказательство.

Входная лента

	a_{i_1}	a_{i_2}	$\dots$	a_{i_k}	

$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in A^*$

q'	b_{i_1}	b_{i_2}	$\dots$	b	
		q'_{k-1}	q'_{k-2} $\dots$	q'_1	

q''	b_{i_1}	b_{i_2}	$\dots$	c	
		q''_{k-1}	q''_{k-2} $\dots$	q''_1	

$q'_{k-1} \neq q''_{k-1}$

$q'_{k-2} \neq q''_{k-2}$

$\dots$

$q'_1 \neq q''_1$

$b \neq c$

q'_l и q''_l – искомые

Лемма об отличимых состояниях

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$ – КАВ.
Пусть состояния $q' \in Q$ и $q'' \in Q$ **отличимы** экспериментом $\alpha = a_{i_1} \dots a_{i_k} \in A^*$ длины k и **не отличимы** никаким экспериментом меньшей длины.
Положим для каждого l, $1 \leq l \leq k$,

$$
\begin{aligned}
q'_l &= \bar{\psi}(a_{i_1} \dots a_{i_{k-l}}, q') \in Q; \\
q''_l &= \bar{\psi}(a_{i_1} \dots a_{i_{k-l}}, q'') \in Q;
\end{aligned}
$$

Тогда
1. Состояния q'_l и q''_l отличимы экспериментом $\alpha_l = a_{i_{k-l+1}} \dots a_{i_k}$ длины l.

Лемма об отличимых состояниях

Доказательство (продолжение). 2. Докажем от противного, что состояния q'_l и q''_l не отличимы никаким экспериментом меньшей длины.

Пусть найдется эксперимент $\alpha_0 \in A^*$ длины $m < l$, отличающий состояния q'_l и q''_l.

Но тогда состояния q' и q'' отличаются экспериментом $\alpha_1 = a_{i_1} \dots a_{i_{k-l}}\alpha_0$ длины $(k - l) + m < k$.

Получаем противоречие с условием.
Следовательно, состояния q'_l и q''_l не отличимы никаким экспериментом длины, меньшей l.

$\square$

Теорема Мура

Теорема 4 (Мура). *Пусть $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_1)$ – КАВ с r состояниями ($|Q| = r$).*
Если состояния $q' \in Q$ и $q'' \in Q$ отличимы, то они отличимы экспериментом длины, не большей $r - 1$.

Доказательство. Для каждого l, $l = 0, 1, \dots,$ рассмотрим бинарное отношение $R_l \subseteq Q \times Q$ на множестве Q:
если $q_i, q_j \in Q$, то $q_i R_l q_j$, если они не отличимы никаким экспериментом длины, меньшей или равной l.
Будем полагать, что $q_i R_0 q_j$ для всех $q_i, q_j \in Q$.

Теорема Мура

Доказательство (продолжение). Докажем, что для каждого l, $l = 0, 1, \ldots,$ отношение $R_l \subseteq Q \times Q$ является отношением эквивалентности на множестве Q.

1. Рефлексивность: qR_lq для кажого состояния $q \in Q$.
2. Симметричность: если $q_iR_lq_j$, то $q_jR_lq_i$.
3. Транзитивность: пусть $q_iR_lq_j$ и $q_jR_lq_s$, то есть для каждого такого эксперимента $\alpha \in A^*$, что $|\alpha| \leq l$, верно

$$\bar{\varphi}(\alpha, q_i) = \bar{\varphi}(\alpha, q_j);$$
$$\bar{\varphi}(\alpha, q_j) = \bar{\varphi}(\alpha, q_s).$$

Отсюда верно $\bar{\varphi}(\alpha, q_i) = \bar{\varphi}(\alpha, q_s)$, или $q_iR_lq_s$.
Следовательно, R_l – отношение эквивалентности на Q.

Теорема Мура

Доказательство. Пусть $r_l = |Q/R_l|$ – **число классов эквивалентности** по отношению R_l на множестве Q. Заметим, что $r_0 = 1$.
По условию состояния $q' \in Q$ и $q'' \in Q$ – отличимы.
Пусть $\alpha \in A^*$ – эксперимент **минимальной** длины, отличающий состояния $q' \in Q$ и $q'' \in Q$. Пусть $|\alpha| = k$.
То есть состояния $q' \in Q$ и $q'' \in Q$ **отличимы** экспериментом длины k и не отличимы никаким экспериментом меньшей длины.
Тогда по доказанной лемме для каждого l, $1 \leq l \leq k$, найдутся состояния $q'_l \in Q$ и $q''_l \in Q$, которые отличимы экспериментом длины l и не отличимы никаким экспериментом меньшей длины.

Теорема Мура

Доказательство (продолжение). Посмотрим, как устроены фактор-множества Q/R_l и Q/R_{l+1}, и как соотносятся между собой числа r_l и r_{l+1}.
Заметим, что если $q_i \bar{R}_l q_j$, то $q_i \bar{R}_{l+1} q_j$.
То есть если состояния q_i и q_j **отличимы** экспериментом длины, не большей l, то состояния q_i и q_j **отличимы** и экспериментом длины, не большей $(l+1)$.
Поэтому $r_l \leq r_{l+1}$.

Теорема Мура

Доказательство (продолжение). Рассмотрим состояния $q'_{l+1} \in Q$ и $q''_{l+1} \in Q$. Они не отличимы никаким экспериментом длины, меньшей $(l+1)$. Значит, по отношению R_l они находятся в **одном** классе эквивалентности.

Но они отличимы экспериментом длины $(l+1)$. Значит, по отношению R_{l+1} они находятся в **разных** классах эквивалентности.

Следовательно, при переходе от фактор-множества Q/R_l к фактор-множеству Q/R_{l+1} хотя бы один класс эквивалентности по отношению Q/R_l разбивается хотя бы на два класса эквивалентности по отношению R_{l+1}.

Отсюда $r_l < r_{l+1}$.

Теорема Мура

Доказательство (продолжение). Заметим, что так как $|Q| = r$, для всех l верно $r_l \leq r$ (в каждом классе эквивалентности не менее одного состояния).
Получаем возрастающую последовательности чисел

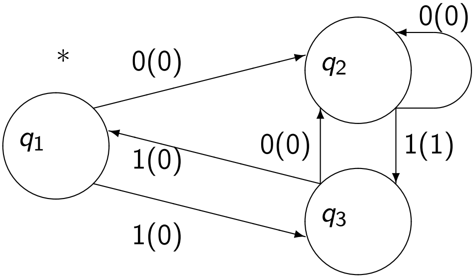
$$1 = r_0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_k \leq r.$$

Отсюда $k \leq r - 1$.

$\square$

Примеры

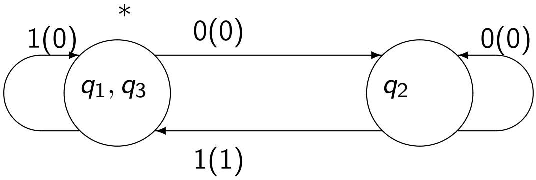
Пример 2. Рассмотрим диаграмму Мура автоматной функции f:



Состояния q_1 и q_2 **отличаются** экспериментом $\alpha = 1$.
Состояния q_2 и q_3 также **отличаются** экспериментом $\alpha = 1$.
Состояния q_1 и q_3 не отличаются никаким экспериментом длины, не большей 2. По теореме Мура они **неотличимы**.

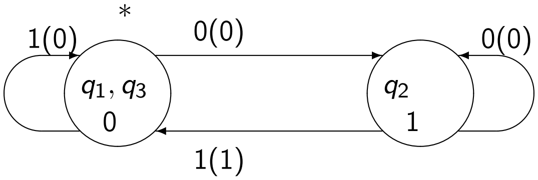
Примеры

Диаграмму Мура функции f можно упростить, отождествив неотличимые состояния q_1 и q_3:



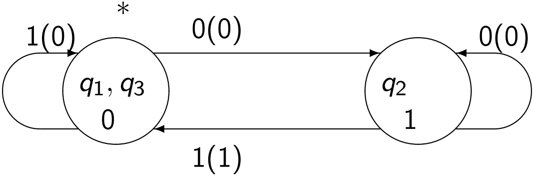
Примеры

Диаграмму Мура функции f можно упростить, отождествив неотличимые состояния q_1 и q_3:



Примеры

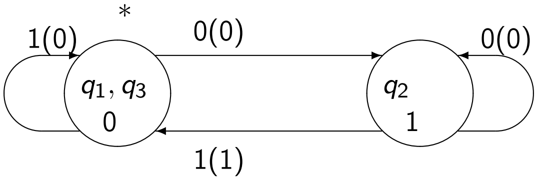
Диаграмму Мура функции f можно упростить, отождествив неотличимые состояния q_1 и q_3:



$q(t-1)$	$x(t)$	$y(t)$	$q(t)$
0	0	0	1
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	0

Примеры

Диаграмму Мура функции f можно упростить, отождествив неотличимые состояния q_1 и q_3:



$q(t-1)$	$x(t)$	$y(t)$	$q(t)$
0	0	0	1
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	0

$$\begin{cases} y(t) = x(t) \cdot q(t-1); \\ q(t) = \bar{x}(t); \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть $A = B = \{0, 1\}$. Построить СФЭЗ для автоматного отображения $y(1)y(2)\dots = f(x(1)x(2)\dots)$, если
1) $y(t) = x(t) \vee y(t-1)$ при $t \geq 2$, $y(1) = 0$;
2) $y(t)$ – $(t+1)$-я цифра после запятой в двоичной записи числа $\frac{2}{3} \cdot x(t)$.

2. Построить диаграмму Мура, в которой **нет неотличимых состояний**, для автоматной функции, заданной каноническими уравнениями:

$$\begin{cases} y(t) = x(t) \cdot q_1(t-1) \cdot q_2(t-1); \\ q_1(t) = \bar{x}(t); \\ q_2(t) = x(t) \cdot q_1(t-1); \\ q_1(0) = q_2(0) = 0. \end{cases}$$

Литература к лекции

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001.

2. Алексеев В.Б. Лекции по дискретной математике. М.: МАКС Пресс, 2004. Стр. 68-74.

3. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004.

Конец лекции