Распределенные алгоритмы и системы

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Распределенные алгоритмы и системы

Блок 38

Обнаружение завершения вычислений:
алгоритм Дейкстры-Шолтена

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, весенний семестр

Допущения

При обсуждении алгоритма Дейкстры-Шолтена будем полагать следующее:

- Базовый алгоритм является централизованным
  - То есть один узел является инициатором, остальные — последователями, и последователь первым действием обязан принять сообщение
- Топология сети задаётся произвольным неориентированным связным графом $\Gamma = (V, E)$
- Контрольный алгоритм является централизованным, и инициатором в контрольном алгоритме является тот же узел, что и в базовом

Общее описание

p^* — так дальше будем обозначать узел-инициатор

Контрольным алгоритмом строится и постоянно обновляется граф вычисления $T = (V_T, E_T)$ следующего вида:

1. Если $V_T \neq \emptyset$, то T — ориентированное дерево с корнем p^*, в сторону которого направлены дуги
2. V_T состоит из узлов и сообщений и включает в себя по крайней мере все активные узлы

Если $p^* \notin V_T$, то (активных узлов нет, и) узел p^* выполняет *announce*

Узел p, не содержащийся в V_T, при получении базового сообщения (и переходе в активное состояние) добавляется в дерево T и считает узел, приславший это сообщение, своим родителем

Общее описание

На каждое принятое базовое сообщение, кроме самого первого, узел p немедленно реагирует подтверждением — контрольным сообщением **ack**

В узле ведётся подсчёт отправленных базовых сообщений, для которых не получено подтверждение

Если узел пассивен и получил подтверждения для всех отправленных сообщений, то он отправляет подтверждение родителю (в ответ на самое первое принятое сообщение) и удаляется из дерева

Оповещение запускается узлом p^*, когда он удаляется из графа вычисления (и, следовательно, множество всех активных узлов становится пустым)

Код

Контрольные переменные узла p:

- $cou_p : \mathbb{N}_0 = 0$
- $parent_p : V \cup \{\perp\}$
  Если $p = p^*$, то начальное значение — p
  Иначе начальное значение — $\perp$

Процедура $S_p(m, q)$:

1. $send(m) \to q$ (*теперь* $active_p = \mathbb{t}$)
2. $cou_p := cou_p + 1$;

Процедура $R_p(m, q)$:

1. $receive(m) \leftarrow q$ (*теперь* $active_p = \mathbb{t}$)
2. Если $parent_p = \perp$: $parent_p := q$;
3. Иначе: $send(\mathbf{ack}) \to q$

Код

Вспомогательная процедура $Leave_p$ удаления из дерева:

1. Если $parent_p = p$: *announce*
2. Иначе: $send(\textbf{ack}) \to parent_p$
3. $parent_p := \bot$;

Процедура $I_p(\alpha)$:

1. α (*теперь* $active_p = \mathbb{f}$)
2. Если $cou_p = 0$: $Leave_p$

Процедура A_p обработки подтверждения:
Предусловие: среди сообщений, отправленных узлу p и ещё не принятых, есть хотя бы одно подтверждение

1. $receive(\textbf{ack})$
2. $cou_p := cou_p - 1$;
3. Если $cou_p = 0$ и $active_p = \mathbb{f}$: $Leave_p$

Корректность

Сообщение m, адресованное узлу p, далее будем обозначать записью $m_{\to p}$, а отправленное узлом p — $m_{p\to}$

Для заданной конфигурации γ дерево $T_\gamma = (V_\gamma, E_\gamma)$ зададим так

V_γ состоит из следующих вершин:

1. Каждый узел p, для которого $parent_p \neq \bot$
2. Каждое отправленное и ещё не принятое базовое сообщение (все такие сообщения считаются попарно различными)
3. Каждое отправленное и ещё не принятое подтверждение (все подтверждения считаются попарно различными)

E_γ состоит из следующих дуг:

1. $(p, parent_p)$ для каждого узла p, такого что $parent_p \notin \{\bot, p\}$
2. $(m_{p\to}, p)$ для каждого отправленного и ещё не принятого сообщения $m_{p\to}$
3. $(\mathbf{ack}_{\to p}, p)$ для каждого отправленного и ещё не принятого сообщения $\mathbf{ack}_{\to p}$

Корректность

Безопасность алгоритма Дейкстры-Шолтена обеспечивается инвариантом

$$P_{d-sch}(\gamma) = p_1 \,\&\, p_2 \,\&\, p_3 \,\&\, p_4 \,\&\, p_5,$$

где:

p_1: $\forall p \in V, active_p : p \in V_\gamma$

- То есть все активные узлы входят в T_γ

p_2: $\forall$ узлов и сообщений $u, v : (u, v) \in E_\gamma \Rightarrow u \in V_\gamma \,\&\, v \in V_\gamma \cap V$

- То есть T_γ — корректный граф, все дуги которого ведут в узлы

p_3: $\forall p \in V : cou_p = |\{v | \exists p : (v, p) \in E_\gamma\}|$

- То есть cou_p — это количество детей узла p в T_γ

p_4: $V_\gamma \neq \emptyset \Rightarrow T_\gamma$ — дерево с корнем p^*

p_5: $\forall p \in V : active_p = \mathbb{f} \,\&\, cou_p = 0 \Rightarrow p \notin V_\gamma$

- То есть пассивный узел не может быть листом дерева

Корректность

Лемма (задача 1). P_{d-sch} **— инвариант алгоритма Дейкстры-Шолтена**

Теорема (задача 2). **Алгоритм Дейкстры-Шолтена — это алгоритм о.з.в., в котором отправляется столько же контрольных сообщений, сколько и базовых**

Из второй нижней оценки сложности алгоритмов о.з.в. следует, что алгоритм Дейкстры-Шолтена оптимален по числу отправляемых контрольных сообщений