

Математическая логика

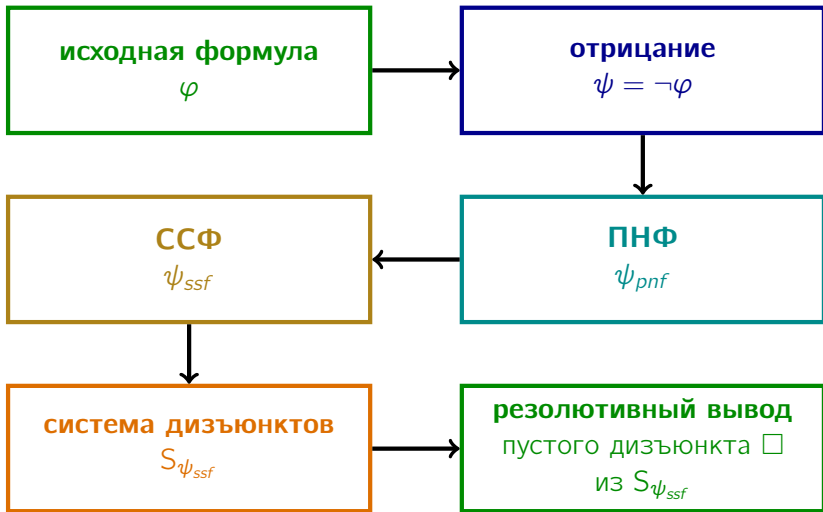
mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 19

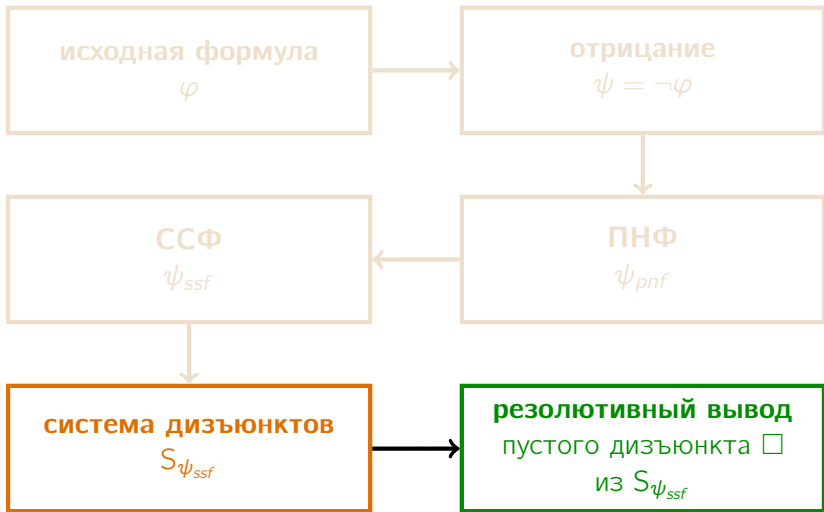
Композиция подстановок
Постановка задачи унификации

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, февраль–май



$$\models \varphi \Leftrightarrow \not\models \psi \Leftrightarrow \not\models \psi_{pnf} \Leftrightarrow \not\models \psi_{ssf} \Leftrightarrow \not\models S_{\psi_{ssf}}$$



$$\models \varphi \Leftrightarrow \not\models \psi \Leftrightarrow \not\models \psi_{pnf} \Leftrightarrow \not\models \psi_{ssf} \Leftrightarrow \not\models S_{\psi_{ssf}}$$

Противоречия в системах дизъюнктов

На последних этапах метода резолюций требуется проверить выполнимость системы дизъюнктов

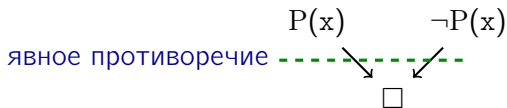
Попробуем, по аналогии с **методом семантических таблиц**, придумать способ извлечения явных противоречий из скрытых (неявных)

В качестве явного противоречия будем использовать **пустой дизъюнкт** (\square)

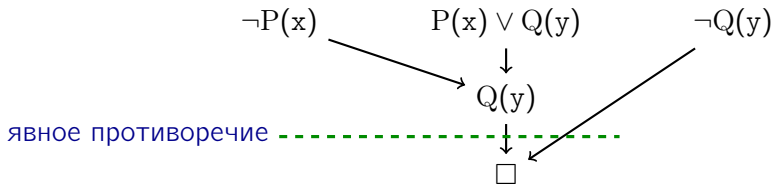
Начнём издалека: приведём несколько примеров того, как можно было бы «разумно» и «просто» извлечь \square из невыполнимой системы дизъюнктов

Противоречия в системах дизъюнктов

$\models \{P(x), \neg P(x)\}$:



$\models \{\neg P(x), \neg Q(y), P(x) \vee Q(y)\}$:

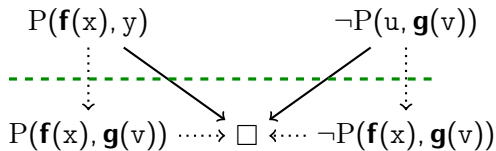


$$\forall x \neg P(x), \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y)) \models \forall y Q(y)$$

Противоречия в системах дизъюнктов

$$\not\models \{P(\mathbf{f}(x), y), \neg P(u, \mathbf{g}(v))\}$$

не очень явное противоречие



$$\forall x \forall y P(\mathbf{f}(x), y) \models \forall x \forall v P(\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(v))$$

$$\forall u \forall v \neg P(u, \mathbf{g}(v)) \models \forall x \forall v \neg P(\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(v))$$

Чтобы обнаружить **не очень явное противоречие** в системе дизъюнктов, потребовалось привести атомы дизъюнктов **к общему виду**

Приведение выражений к общему виду называется **унификацией**, и перед описанием последнего этапа метода резолюций (**резолютивного вывода** \square) необходимо строго сформулировать и научиться решать эту задачу

Композиция подстановок

Унификация атомов A , B достигается применением к ним подстановки θ , такой что $A\theta = B\theta$

Напоминание

Подстановка — это отображение $\theta : \text{Var} \rightarrow \text{Term}$

Конечная подстановка задаётся множеством связей:

$$\{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$$

$E\theta$ — это результат применения подстановки θ к выражению E

Чтобы поставить и решить задачу унификации, исследуем основные алгебраические свойства подстановок

Композиция подстановок

Композиция подстановок θ и η — это подстановка $\theta\eta$, такая что для любой переменной x верно равенство

$$x(\theta\eta) = (x\theta)\eta$$

Утверждение

Пусть $\theta = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$ и $\eta = \{y_1/s_1, \dots, y_k/s_k\}$. Тогда

$$\theta\eta = \{x_i/t_i\eta \mid 1 \leq i \leq n, x_i \neq t_i\eta\}$$

$$\cup \{y_j/s_j \mid 1 \leq j \leq k, y_j \notin \{x_1, \dots, x_n\}\}$$

Доказательство

Рассмотрим переменную $z \in \text{Var}$

Если $z \notin \text{Dom}_\theta \cup \text{Dom}_\eta$, то $z(\theta\eta) = (z\theta)\eta = z\eta = z$

Если $z = y_j \in \text{Dom}_\eta \setminus \text{Dom}_\theta$, то $z(\theta\eta) = (z\theta)\eta = z\eta = s_j$

Иначе $z = x_i \in \text{Dom}_\theta$, и $z(\theta\eta) = (z\theta)\eta = t_i\eta$ ▼

Композиция подстановок

Пример

$$\theta = \{x/f(x, c), y/g(u), z/y\}$$

$$\eta = \{x/g(y), y/z, u/c\}$$

$$\theta\eta = ?$$

$$\{x/f(x, c)\eta, y/g(u)\eta, z/y\eta\} \cup \{u/c\}$$

$$\{x/f(g(y), c), y/g(c), z/z\} \cup \{u/c\}$$

$$\{x/f(g(y), c), y/g(c)\} \cup \{u/c\}$$

$$\theta\eta = \{x/f(g(y), c), y/g(c), u/c\}$$

Задача унификации

Подстановка θ называется **унификатором** выражений E_1, E_2 , если $E_1\theta = E_2\theta$

$\mathcal{U}(E_1, E_2)$ — множество всех унификаторов выражений E_1, E_2

Выражения E_1, E_2 **унифицируемы**, если $\mathcal{U}(E_1, E_2) \neq \emptyset$

Утверждение

**Для любых подстановок θ, η и любых выражений E_1, E_2 верно:
если $\theta \in \mathcal{U}(E_1, E_2)$, то $\theta\eta \in \mathcal{U}(E_1, E_2)$**

Доказательство

$\theta \in \mathcal{U}(E_1, E_2) \Leftrightarrow E_1\theta = E_2\theta \Rightarrow E_1\theta\eta = E_2\theta\eta \Leftrightarrow \theta\eta \in \mathcal{U}(E_1, E_2) \blacktriangledown$

Подмножество S множества подстановок Θ называется **полным** в Θ , если любая подстановка θ из Θ представима в виде $\theta = \eta\mu$, где $\eta \in S$

Подстановка θ называется **наиболее общим унификатором** выражений E_1, E_2 , если множество $\{\theta\}$ является полным в $\mathcal{U}(E_1, E_2)$

$\text{НОУ}(E_1, E_2)$ — множество всех наиболее общих унификаторов выражений E_1, E_2

Задача унификации

Пример

Рассмотрим два атома:

$$A = P(\mathbf{f}(x), y) \quad B = P(u, \mathbf{g}(v))$$

Подстановка $\eta = \{y/\mathbf{g}(\mathbf{g}(v)), u/\mathbf{f}(c), v/\mathbf{g}(v), x/c\}$ —
унификатор атомов A и B (то есть $\eta \in \mathcal{U}(A, B)$), т.к.

$$P(\mathbf{f}(x), y)\eta = P(\mathbf{f}(c), \mathbf{g}(\mathbf{g}(v))) = P(u, \mathbf{g}(v))\eta$$

А подстановка $\theta = \{y/\mathbf{g}(v), u/\mathbf{f}(x)\}$ — более общий унификатор A и B :

$$\begin{aligned} P(\mathbf{f}(x), y)\theta &= P(\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(v)) = P(u, \mathbf{g}(v))\theta \\ \eta &= \theta\{v/\mathbf{g}(v), x/c\} \end{aligned}$$

На самом деле θ — **наиболее общий унификатор** атомов A и B
(но как это доказать?)

А выражения $P(x, \mathbf{f}(x))$ и $P(\mathbf{g}(y), y)$ **неунифицируемы**
(а это как доказать?)

Задача унификации

формулируется следующим образом:

**для заданных выражений E_1, E_2
выяснить, унифицируемы ли эти выражения,
и если это так, то вычислить
множество унификаторов, полное в $\mathcal{U}(E_1, E_2)$**