

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 28

Натуральное исчисление высказываний:
правило монотонности,
закон исключённого третьего,
корректность

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

Правило монотонности (утверждение)

Если секвенция $\Gamma \vdash A$ доказуема в НИВ, то для любого множества формул Δ секвенция $\Gamma \cup \Delta \vdash A$ также доказуема в НИВ

Доказательство.

Рассмотрим произвольное доказательство \mathcal{D} секвенции $\Gamma \vdash A$:

$$\Gamma_1 \vdash B_1, \quad \Gamma_2 \vdash B_2, \quad \dots, \quad \Gamma_n \vdash B_n \quad (\Gamma_n = \Gamma; B_n = A)$$

Добавив Δ к левым частям, получим из \mathcal{D} последовательность \mathcal{D}' :

$$\Gamma_1 \cup \Delta \vdash B_1, \quad \Gamma_2 \cup \Delta \vdash B_2, \quad \dots, \quad \Gamma_n \cup \Delta \vdash B_n$$

Если $\Gamma_i \vdash B_i$ — аксиома, то $\Gamma_i \cup \Delta \vdash B_i$ — тоже аксиома

Если $\Gamma_i \vdash B_i$ выводится из $\Gamma_{j_1} \vdash B_{j_1}, \dots, \Gamma_{j_k} \vdash B_{j_k}$ по правилу R НИВ, то $\Gamma_i \cup \Delta \vdash B_i$ выводится из $\Gamma_{j_1} \cup \Delta \vdash B_{j_1}, \dots, \Gamma_{j_k} \cup \Delta \vdash B_{j_k}$ по правилу R

Значит, \mathcal{D}' — доказательство секвенции $\Gamma \cup \Delta \vdash A$ в НИВ ▼

Правило монотонности иногда включается в НИВ как правило вывода

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \cup \Delta \vdash A}$$

Закон исключённого третьего (утверждение)

Любая секвенция вида $\Gamma \vdash A \vee \neg A$ доказуема в НИВ

Доказательство. По *правилу монотонности*,
достаточно предложить доказательство секвенции $\vdash A \vee \neg A$

Вот это доказательство:

$$\begin{array}{l} \mathcal{A}: \\ R_V^+ : \\ \mathcal{A}: \\ R_{\neg}^+ : \\ R_V^{+2} : \\ \mathcal{A}: \\ R_{\neg}^+ : \\ R_{\neg}^- : \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \neg(A \vee \neg A), A \vdash A \\ \neg(A \vee \neg A), A \vdash A \vee \neg A \\ \neg(A \vee \neg A), A \vdash \neg(A \vee \neg A) \\ \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A \\ \neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A \\ \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A) \\ \vdash \neg\neg(A \vee \neg A) \\ \vdash A \vee \neg A \end{array} \right. \quad \blacktriangledown$$

Закон исключённого третьего иногда включается в НИВ как аксиома

$$\Gamma \vdash A \vee \neg A$$

Содержательная трактовка доказательств НИВ

\mathcal{A} :	$\neg(A \vee \neg A), A \vdash A$
R_{\vee}^{+1} :	$\neg(A \vee \neg A), A \vdash A \vee \neg A$
\mathcal{A} :	$\neg(A \vee \neg A), A \vdash \neg(A \vee \neg A)$
R_{\vee}^{+2} :	$\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A$
R_{\vee}^{+2} :	$\neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A$
\mathcal{A} :	$\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A)$
R_{\neg}^{+} :	$\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)$
R_{\neg}^{-} :	$\vdash A \vee \neg A$

Попробуем перевести это доказательство в НИВ на естественный язык:

R_{\neg}^{-} : $\left\{ \begin{array}{l} \vdash \neg\neg(A \vee \neg A) \\ \vdash A \vee \neg A \end{array} \right\} \left| \begin{array}{l} \text{Чтобы показать, что } A \vee \neg A \text{ верно,} \\ \text{достаточно показать, что } \neg(A \vee \neg A) \text{ неверно} \end{array} \right.$

R_{\vee}^{+2} : $\left\{ \begin{array}{l} \neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A \\ \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A) \\ \vdash \neg\neg(A \vee \neg A) \end{array} \right\} \left| \begin{array}{l} \text{Покажем это от противного:} \\ \text{предположим, что } \neg(A \vee \neg A) \text{ верно;} \\ \text{покажем, что } A \vee \neg A \text{ и верно, и неверно} \end{array} \right.$

\mathcal{A} : $\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A) \left| \begin{array}{l} \text{"} A \vee \neg A \text{ неверно"} \text{ верно по предположению} \end{array} \right.$

R_{\vee}^{+2} : $\left\{ \begin{array}{l} \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A \\ \neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A \end{array} \right\} \left| \begin{array}{l} \text{"} A \vee \neg A \text{ верно"}: \text{ достаточно показать,} \\ \text{что } A \text{ неверно (то есть } \neg A \text{ верно)} \end{array} \right.$

Содержательная трактовка доказательств НИВ

\mathcal{A} :	$\neg(A \vee \neg A), A \vdash A$
R_{\vee}^{+1} :	$\neg(A \vee \neg A), A \vdash A \vee \neg A$
\mathcal{A} :	$\neg(A \vee \neg A), A \vdash \neg(A \vee \neg A)$
R_{\vee}^{+2} :	$\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A$
R_{\vee}^{-2} :	$\neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A$
\mathcal{A} :	$\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A)$
R_{\neg}^{+} :	$\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)$
R_{\neg}^{-} :	$\vdash A \vee \neg A$

Попробуем перевести это доказательство в НИВ на естественный язык:

R_{\neg}^{+} :	$\left(\begin{array}{l} \neg(A \vee \neg A), A \vdash A \vee \neg A \\ \neg(A \vee \neg A), A \vdash \neg(A \vee \neg A) \\ \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A \end{array} \right.$	<p>Покажем это от противного: предположим, что A верно; покажем, что $A \vee \neg A$ и верно, и неверно</p>
\mathcal{A} :	$\neg(A \vee \neg A), A \vdash \neg(A \vee \neg A)$	“ $A \vee \neg A$ неверно” верно по предположению
R_{\vee}^{+1} :	$\left(\begin{array}{l} \neg(A \vee \neg A), A \vdash A \\ \neg(A \vee \neg A), A \vdash A \vee \neg A \end{array} \right.$	<p>“$A \vee \neg A$ верно”: достаточно показать, что A верно</p>
\mathcal{A} :	$\neg(A \vee \neg A), A \vdash A$	A верно по предположению

Содержательная трактовка доказательств НИВ

\mathcal{A} :	$\neg(A \vee \neg A), A \vdash A$
R_V^{+1} :	$\neg(A \vee \neg A), A \vdash A \vee \neg A$
\mathcal{A} :	$\neg(A \vee \neg A), A \vdash \neg(A \vee \neg A)$
R_V^+ :	$\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A$
R_V^{+2} :	$\neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A$
\mathcal{A} :	$\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A)$
R_V^+ :	$\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)$
R_V^- :	$\vdash A \vee \neg A$

Попробуем перевести это доказательство в НИВ на естественный язык:

Доказательство.

Предположим, что верно $\neg(A \vee \neg A)$

Дополнительно предположим, что верно A

Так как верно A , то верно и $A \vee \neg A$

Это противоречит предположению $\neg(A \vee \neg A)$, а значит, A неверно

Тогда верно $A \vee \neg A$

Это противоречит предположению $\neg(A \vee \neg A)$,

а значит, $\neg(A \vee \neg A)$ неверно

Следовательно, верно $A \vee \neg A$ ▼

Теорема о корректности НИВ

Если секвенция $\vdash \varphi$ доказуема в НИВ,
то формула φ общезначима

Доказательство.

По *устройству правил НИВ*, левая часть Γ
любой секвенции $\Gamma \vdash \psi$ любого доказательства формулы φ конечна

Каждой секвенции σ вида $\{\psi_1, \dots, \psi_k\} \vdash \chi$
сопоставим формулу $\varphi_\sigma = \psi_1 \& \dots \& \psi_k \rightarrow \chi$

По *определению доказательства в НИВ*, достаточно показать следующее:

1. Если σ — аксиома с конечной левой частью,
то формула $\models \varphi_\sigma$ общезначима
2. Если σ — секвенция с конечной левой частью,
получающаяся из $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ по какому-либо из правил НИВ, и
формулы $\varphi_{\sigma_1}, \dots, \varphi_{\sigma_n}$ общезначимы, то и формула φ_σ общезначима

Теорема о корректности НИВ

Доказательство.

1. Формула φ_σ , сопоставленная аксиоме σ с конечной левой частью, устроена так:

$$\psi_1 \& \dots \& \psi_k \rightarrow \psi_i, \quad \text{где } 1 \leq i \leq k$$

По *определению общезначимости*, достаточно показать, что для любой интерпретации \mathcal{I} верно $\mathcal{I} \models \varphi_\sigma$

Если $\mathcal{I} \models \psi_i$, то по семантике \rightarrow верно и $\mathcal{I} \models \varphi_\sigma$

Иначе $\mathcal{I} \not\models \psi_i$, и по семантике $\&$ и \rightarrow всё равно верно $\mathcal{I} \models \varphi_\sigma$

2. Рассмотрим только *правило рассуждения от противного*
(для остальных правил рассуждения аналогичны)

Согласно этому правилу, требуется показать, что если формулы $\psi_1 \& \dots \& \psi_k \& A \rightarrow B$ и $\psi_1 \& \dots \& \psi_k \& A \rightarrow \neg B$ общезначимы, то и формула $\psi_1 \& \dots \& \psi_k \rightarrow \neg A$ общезначима

Теорема о корректности НИВ

Доказательство.

$$2. \chi_1 = \psi_1 \& \dots \& \psi_k \& A \rightarrow B, \quad \chi_2 = \psi_1 \& \dots \& \psi_k \& A \rightarrow \neg B, \\ \chi_3 = \psi_1 \& \dots \& \psi_k \rightarrow \neg A; \quad \models \chi_1 \text{ и } \models \chi_2 \Rightarrow \models \chi_3 ?$$

По *определению общезначимости*, достаточно показать, что для любой интерпретации \mathcal{I} верно $\mathcal{I} \models \chi_3$

По *общезначимости* формул χ_1 и χ_2 , верно $\mathcal{I} \models \chi_1$ и $\mathcal{I} \models \chi_2$

По *семантике* \rightarrow и устройству формул χ_1, χ_2 , верно

$$\mathcal{I} \not\models \psi_1 \& \dots \& \psi_k \& A$$

По *семантике* \neg , верно $\mathcal{I} \models \neg(\psi_1 \& \dots \& \psi_k \& A)$

При этом (*очевидно, что*)

$$\mathcal{I} \models \neg(\psi_1 \& \dots \& \psi_k \& A) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \psi_1 \& \dots \& \psi_k \rightarrow \neg A$$

Значит, $\mathcal{I} \models \chi_3$ ▼