Математическая логика

(mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (группы 318, 241))

Лекция 8

Алгоритм унификации атомарных формул

Теорема об унификации

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2020, весенний семестр

Напоминание: задача унификации

Для заданных выражений E_1, E_2

выяснить, унифицируемы ли эти выражения,

и если это так, то вычислить

множество унификаторов, полное в $\mathbf{У}(E_1, E_2)$

Алгоритм унификации атомарных формул

Унификация, простой случай: $У(\mathtt{x}, t) = ?$ $(\mathtt{x} \in \mathsf{Var},\ t \in \mathsf{Term})$

Лемма(*о связке*). **Пусть** $\mathtt{x} \in \mathsf{Var}$ **и** $t \in \mathsf{Term}$.

1. **Если** $x = t$, **то** $\varepsilon \in$ **НОУ**$(\mathtt{x}, t)$
2. **Если** $\mathtt{x} \notin \mathsf{Var}_t$, **то** $\{\mathtt{x}/t\} \in$ **НОУ**$(\mathtt{x}, t)$
3. **Если** $\mathtt{x} \in \mathsf{Var}_t$ **и** $\mathtt{x} \neq t$, **то** **У**$(\mathtt{x}, t) = \emptyset$

Доказательство.

1. Это очевидно: $\mathtt{x}\varepsilon = \mathtt{x}$, и для любой подстановки θ верно $\theta = \varepsilon\theta$

2. $\mathtt{x} \notin \mathsf{Var}_t$

Достаточно показать, что:

а) $\{\mathtt{x}/t\}$ — унификатор (*переменной* $\mathtt{x}$ *и терма* t)

б) для любого унификатора θ существует унификатор η, такой что $\theta = \{\mathtt{x}/t\}\,\eta$

а) $\mathtt{x}\,\{\mathtt{x}/t\} = t = t\,\{\mathtt{x}/t\}$

Алгоритм унификации атомарных формул

Унификация, простой случай: $У(\mathrm{x}, t) = ?$ $(\mathrm{x} \in \mathsf{Var},\ t \in \mathsf{Term})$

Лемма(*о связке*). Пусть $\mathrm{x} \in \mathsf{Var}$ и $t \in \mathsf{Term}$.

1. **Если $x = t$, то $\varepsilon \in$ НОУ(x, t)**
2. **Если $\mathrm{x} \notin \mathsf{Var}_t$, то $\{\mathrm{x}/t\} \in$ НОУ(x, t)**
3. **Если $\mathrm{x} \in \mathsf{Var}_t$ и $\mathrm{x} \neq t$, то У$(\mathrm{x}, t) = \emptyset$**

Доказательство.

2б) $\mathrm{x} \notin \mathsf{Var}_t$; $\mathrm{x}\theta = t\theta \overset{?}{\Rightarrow} \exists \eta \quad \theta = \{\mathrm{x}/t\}\,\eta$

Рассмотрим произвольную переменную y

Если $\mathrm{y} = \mathrm{x}$, то $\mathrm{y}\theta = \mathrm{x}\theta = t\theta = \mathrm{x}\,\{\mathrm{x}/t\}\theta = \mathrm{y}\,\{\mathrm{x}/t\}\,\theta$

Если $\mathrm{y} \neq \mathrm{x}$, то $\mathrm{y}\theta = \mathrm{y}\,\{\mathrm{x}/t\}\theta$

Итог: для любой переменной y верно равенство $\mathrm{y}\,\{\mathrm{x}/t\}\,\theta = \mathrm{y}\theta$,
а значит, $\theta = \{\mathrm{x}/t\}\,\theta$

Алгоритм унификации атомарных формул

Унификация, простой случай: $У(\mathtt{x}, t) = ?$ $(\mathtt{x} \in \mathsf{Var},\ t \in \mathsf{Term})$

Лемма(*о связке*). Пусть $\mathtt{x} \in \mathsf{Var}$ и $t \in \mathsf{Term}$.

1. **Если $x = t$, то $\varepsilon \in$ НОУ$(\mathtt{x}, t)$**
2. **Если $\mathtt{x} \notin \mathsf{Var}_t$, то $\{\mathtt{x}/t\} \in$ НОУ$(\mathtt{x}, t)$**
3. **Если $\mathtt{x} \in \mathsf{Var}_t$ и $\mathtt{x} \neq t$, то У$(\mathtt{x}, t) = \emptyset$**

Доказательство.

3. $\mathtt{x} \in \mathsf{Var}_t$, $\mathtt{x} \neq t$

Рассмотрим произвольную подстановку θ

Пусть $\mathtt{x}\theta = s$

Тогда $|\mathtt{x}\theta| = |s| < |t\{\mathtt{x}/s\}| \leq |t\theta|$ $(|p|$— *длина терма* $p)$

$|\mathtt{x}\theta| < |t\theta|$, а значит, $\mathtt{x}\theta \neq t\theta$ ▼

Алгоритм унификации атомарных формул

Унификация атомов

$$E_1 = \mathrm{P}(t_1, \ldots, t_k),\ E_2 = \mathrm{P}(s_1, \ldots, s_k)$$

$$\Leftrightarrow$$

Вычисление подстановки θ, такой что левая (t_i) и правая (s_i) части каждого уравнения в системе

$$\mathcal{E}(E_1, E_2) = \begin{cases} t_1 = s_1 \\ \ldots \\ t_k = s_k \end{cases}$$

становятся посимвольно одинаковыми при применении θ ко всем термам системы

$$\Leftrightarrow$$

Вычисление **решения системы уравнений** $\mathcal{E}(E_1, E_2)$ в свободной[1] алгебре термов[2]

---

[1] Значение терма — это сам терм,
то есть термы равны, если они посимвольно совпадают

[2] **Операция** композиции — это подстановка терма на место переменной

Алгоритм унификации атомарных формул

Для устранения неоднозначности нотации будем до конца лекции использовать такие обозначения: $(t, s \in \mathrm{Term})$

- $t = s$ — уравнение с левой частью t и правой частью s
- $t \equiv s$ — "термы t и s посимвольно совпадают"

Подстановка θ — унификатор (*решение*) системы уравнений

$$\begin{cases} t_1 = s_1 \\ \dots \\ t_k = s_k \end{cases},$$

если $t_i\theta \equiv s_i\theta$ для каждого i, $1 \le i \le k$

$У(\mathcal{E})$ — множество всех унификаторов системы уравнений $\mathcal{E}$

Система уравнений $\mathcal{E}$ унифицируема (*имеет решение*), если $У(\mathcal{E}) \neq \emptyset$

$НОУ(\mathcal{E})$ — множество всех наиболее общих унификаторов системы уравнений $\mathcal{E}$

Алгоритм унификации атомарных формул

Пример

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{c}, \mathrm{x}) = \mathbf{f}(\mathrm{y}, \mathbf{g}(\mathrm{y})) \\ \mathbf{g}(\mathrm{y}) = \mathrm{z} \end{cases} \qquad \mathcal{E}\theta = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{c}, \mathbf{g}(\mathbf{c})) = \mathbf{f}(\mathbf{c}, \mathbf{g}(\mathbf{c})) \\ \mathbf{g}(\mathbf{c}) = \mathbf{g}(\mathbf{c}) \end{cases}$$

$\theta = \{\mathrm{x}/\mathbf{g}(\mathbf{c}), \mathrm{y}/\mathbf{c}, \mathrm{z}/\mathbf{g}(\mathbf{c})\}$ — унификатор системы $\mathcal{E}$
(*более того, наиболее общий*)

А система $\begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{c}, \mathrm{y}) = \mathbf{f}(\mathrm{y}, \mathbf{g}(\mathrm{y})) \\ \mathbf{g}(\mathrm{y}) = \mathrm{z} \end{cases}$ неунифицируема

Алгоритм унификации атомарных формул

Утверждение

Множества унификаторов любой пары атомов

$$E_1 = \mathrm{P}(t_1, \dots, t_k),\ E_2 = \mathrm{P}(s_1, \dots, s_k)$$

и соответствующей системы уравнений

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(E_1, E_2) = \begin{cases} t_1 = s_1 \\ \dots \\ t_k = s_k \end{cases}$$

совпадают

Доказательство. Очевидно (следует из определений унификатора)

Утверждение

Никакая пара атомов $\mathrm{P}(t_1, \dots, t_k)$, $\mathrm{Q}(s_1, \dots, s_m)$, такая что символы P и Q различны, не унифицируема

Доказательство. Очевидно?

Аналогия: системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x+y+z = y+3 \\ y+3z = x+2 \\ 2x+y = z+1 \end{cases}$$

Эту систему уравнений в *алгебре действительных чисел* можно решить **методом исключения переменных**:

$$\begin{cases} x = 3-z \\ y+3z = x+2 \\ 2x+y = z+1 \end{cases} \mapsto \begin{cases} x = 3-z \\ y+3z = 5-z \\ 6-2z+y = z+1 \end{cases} \mapsto$$

$$\begin{cases} x = 3-z \\ y = 5-4z \\ 6-2z+y = z+1 \end{cases} \mapsto \begin{cases} x = 3-z \\ y = 5-4z \\ 11-6z = z+1 \end{cases} \mapsto$$

$$\begin{cases} x = 3-z \\ y = 5-4z \\ z = \frac{10}{7} \end{cases} \mapsto \begin{cases} x = -\frac{3}{7} \\ y = -\frac{5}{7} \\ z = \frac{10}{7} \end{cases}$$

В *свободной алгебре термов* вместо операций сложения, вычитания, умножения и деления чисел содержится **только одна** операция композиции, но тем не менее метод исключения переменных работает и для алгебры термов

Алгоритм унификации атомарных формул

Система уравнений является приведённой, если она имеет вид

$$\begin{cases} \mathtt{x}_1 = t_1 \\ \dots \\ \mathtt{x}_k = t_k \end{cases},$$

где $\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_k$ — попарно различные переменные,
не встречающиеся в правых частях уравнений:

$$\{\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_k\} \cap \bigcup_{1 \le i \le k} \mathsf{Var}_{t_k} = \emptyset$$

Пример

$$\begin{cases} \mathrm{x} = \mathbf{f}(\mathrm{y}, \mathbf{g}(\mathrm{y})) \\ \mathrm{z} = \mathrm{w} \\ \mathrm{u} = \mathbf{g}(\mathbf{c}) \end{cases}$$ — **приведённая** система

Алгоритм унификации атомарных формул

Система уравнений является приведённой, если она имеет вид

$$\begin{cases} \mathrm{x}_1 = t_1 \\ \dots \\ \mathrm{x}_k = t_k \end{cases},$$

где $\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_k$ — попарно различные переменные, не встречающиеся в правых частях уравнений:

$$\{\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_k\} \cap \bigcup_{1 \le i \le k} \mathrm{Var}_{t_k} = \emptyset$$

Пример

$$\begin{cases} \mathrm{x} = \mathbf{f}(\mathrm{y}, \mathbf{g}(\mathrm{y})) \\ \mathrm{x} = \mathrm{w} \\ \mathrm{y} = \mathbf{g}(\mathbf{c}, \mathbf{c}) \\ \mathbf{g}(\mathrm{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{c}, \mathrm{x}) \end{cases}$$

— **неприведённая** система:

1. $\mathbf{g}(\mathrm{z})$ — не переменная, стоит в левой части уравнения
2. x встречается в левых частях два раза
3. y встречается и в левой, и в правой частях

Алгоритм унификации атомарных формул

Система уравнений является приведённой, если она имеет вид

$$\begin{cases} \mathtt{x}_1 = t_1 \\ \dots \\ \mathtt{x}_k = t_k \end{cases},$$

где $\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_k$ — попарно различные переменные, не встречающиеся в правых частях уравнений:

$$\{\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_k\} \cap \bigcup_{1 \leq i \leq k} \mathsf{Var}_{t_k} = \emptyset$$

Унификация, более сложный случай: $\text{У}(\mathcal{E}) =?$

($\mathcal{E}$ — приведённая система уравнений)

Лемма(*о приведённой системе*). **Если** $\mathcal{E} = \begin{cases} \mathtt{x}_1 = t_1 \\ \dots \\ \mathtt{x}_k = t_k \end{cases}$ **— приведённая система, то** $\{\mathtt{x}_1/t_1, \dots, \mathtt{x}_k/t_k\} \in \text{НОУ}(\mathcal{E})$

Доказательство. Следует из *леммы о связке* ▼

Алгоритм унификации атомарных формул

Унификация, общий случай: У($\mathcal{E}$) $=?$

($\mathcal{E}$ — произвольная система уравнений)

Системы уравнений $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ равносильны, если У$(\mathcal{E}_1) =$ У$(\mathcal{E}_2)$

Будем преобразовывать систему $\mathcal{E}$
методом исключения переменных так, чтобы в результате получилась равносильная система одного из двух видов:

- приведённая
- *очевидно* неунифицируемая

Алгоритм унификации атомарных формул

Алгоритм унификации[1]

Далее будут описаны 6 правил преобразования системы уравнений

Эти правила произвольно (недетерминированно) применяются к системе, пока не станет верным одно из условий:

- получена приведённая система уравнений
    - ответ: унификатор из *леммы о приведённой системе*
- **явно** установлена невозможность унификации системы
    - ответ: СТОП: система неунифицируема

[1] Martelli A., Montanari U. An efficient unification algorithm. 1982

Алгоритм унификации атомарных формул

Правила преобразования системы уравнений

Упрощение системы: $(\mathtt{x} \in \mathsf{Var},\ t \in \mathsf{Term})$

Triv: удалить $t = t$

Swap: заменить $t = \mathtt{x}$ на $\mathtt{x} = t$, если $t \notin \mathsf{Var}$

Func: заменить $\mathbf{f}(t_1, \ldots, t_k) = \mathbf{f}(s_1, \ldots, s_k)$ на $\begin{cases} t_1 = s_1 \\ \ldots \\ t_k = s_k \end{cases}$

Elim: если в системе содержится уравнение $Eq : \mathtt{x} = t$, где

- $\mathtt{x} \notin \mathsf{Var}_t$
- $\mathtt{x}$ встречается в других уравнениях системы

то применить подстановку $\{\mathtt{x}/t\}$ ко всем уравнениям системы, кроме Eq

Алгоритм унификации атомарных формул

Правила преобразования системы уравнений

Явная неунифицируемость: $(\mathtt{x} \in \mathsf{Var},\ t \in \mathsf{Term})$

NElim: если в системе содержится уравнение $\mathtt{x} = t$,
где $\mathtt{x} \in \mathsf{Var}_t$ и $\mathtt{x} \not\equiv t$, то
СТОП: система неунифицируема

NFunc: если в системе содержится уравнение
$\mathbf{f}(t_1, \ldots, t_k) = \mathbf{g}(s_1, \ldots, s_m)$, где $\mathbf{f} \neq \mathbf{g}$, то
СТОП: система неунифицируема

Алгоритм унификации атомарных формул

Примеры

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{aligned} \mathbf{f}(x, \mathbf{g}(y)) &= \mathbf{f}(\mathbf{g}(y), x) \\ \mathbf{c} &= y \end{aligned} \right. \xmapsto{\text{Func}} \left\{ \begin{aligned} x &= \mathbf{g}(y) \\ \mathbf{g}(y) &= x \\ \mathbf{c} &= y \end{aligned} \right.$$

$$\xmapsto{\text{Swap}} \left\{ \begin{aligned} x &= \mathbf{g}(y) \\ \mathbf{g}(y) &= x \\ y &= \mathbf{c} \end{aligned} \right. \xmapsto{\text{Elim} \times 2} \left\{ \begin{aligned} x &= \mathbf{g}(\mathbf{c}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{c}) &= \mathbf{g}(\mathbf{c}) \\ y &= \mathbf{c} \end{aligned} \right. \xmapsto{\text{Triv}} \left\{ \begin{aligned} x &= \mathbf{g}(\mathbf{c}) \\ y &= \mathbf{c} \end{aligned} \right.$$

приведённая система

Ответ: $\{x/\mathbf{g}(\mathbf{c}),\ y/\mathbf{c}\} \in \text{НОУ}(\mathcal{E})$

Алгоритм унификации атомарных формул

Примеры

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{f}(x, \mathbf{g}(y)) & = & \mathbf{h}(\mathbf{g}(y), x) \\ \mathbf{c} & = & y \end{array} \right.$$

$$\Big\downarrow \text{NFunc}$$

СТОП

Ответ: $\text{У}(\mathcal{E}) = \emptyset$

Алгоритм унификации атомарных формул

Примеры

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{array}{rl} \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathbf{g}(\mathrm{x})) & = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathrm{y}), \mathrm{x}) \\ \mathbf{c} & = \mathrm{y} \end{array} \right. \xmapsto{\text{Func}} \left\{ \begin{array}{rl} \mathrm{x} & = \mathbf{g}(\mathrm{y}) \\ \mathbf{g}(\mathrm{x}) & = \mathrm{x} \\ \mathbf{c} & = \mathrm{y} \end{array} \right. \xmapsto{\text{Swap}}$$

$$\xmapsto{\text{Swap}} \left\{ \begin{array}{rl} \mathrm{x} & = \mathbf{g}(\mathrm{y}) \\ \mathrm{x} & = \mathbf{g}(\mathrm{x}) \\ \mathbf{c} & = \mathrm{y} \end{array} \right. \xmapsto{\text{NElim}} \text{СТОП}$$

Ответ: $\text{У}(\mathcal{E}) = \emptyset$

Алгоритм унификации атомарных формул

Теорема(*об унификации*)
Для любой системы уравнений $\mathcal{E}$

- алгоритм унификации завершает работу на $\mathcal{E}$
  (завершаемость)
- по завершении работы алгоритмом выдаётся подстановка или сообщение СТОП (успешность)
- если выдана подстановка θ, то $\theta \in$ НОУ$(\mathcal{E})$
  (корректность)
- если выдано сообщение СТОП, то система $\mathcal{E}$ неунифицируема (полнота)

Следствие
Атомы $E_1 = \mathrm{P}(t_1, \dots, t_n)$ и $E_2 = \mathrm{Q}(s_1, \dots, s_k)$ унифицируемы
$\Leftrightarrow$ НОУ$(E_1, E_2) \neq \emptyset$

Доказательство теоремы об унификации

Завершаемость ($\mathcal{E} \not\rightarrowtail \infty$)

Далее будет строго сформулированы и обоснованы следующие факты:

- на каждом шаге работы алгоритма унификации система становится немного проще
- самая простая система обязательно будет получена после конечного числа шагов

Придумаем характеристику системы, которая
убывает на каждом шаге и при этом
не может убывать бесконечно долго

Доказательство теоремы об унификации

Завершаемость ($\mathcal{E} \not\rightarrowtail \infty$)

Переменная $\mathtt{x}$ — приведённая в $\mathcal{E}$, если $\mathcal{E}$ содержит уравнение вида $\mathtt{x} = t$, где $\mathtt{x} \notin \mathsf{Var}_t$, и не содержит $\mathtt{x}$ в других уравнениях

Характеристика системы $\mathcal{E}$ — упорядоченная тройка чисел $\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E})\rangle$, где

- $vr(\mathcal{E})$ — число **неприведённых** переменных системы $\mathcal{E}$
- $fs(\mathcal{E})$ — суммарное число функциональных символов и констант в **левых частях** уравнений $\mathcal{E}$
- $eq(\mathcal{E})$ — число уравнений системы $\mathcal{E}$

Доказательство теоремы об унификации

Завершаемость ($\mathcal{E} \not\rightarrow \infty$)

Лексикографический порядок на тройках целых чисел определяется так:

$$\langle n_1, n_2, n_3\rangle \succ \langle m_1, m_2, m_3\rangle \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n_1 > m_1 \\ n_1 = m_1,\ \ n_2 > m_2 \\ n_1 = m_1,\ \ n_2 = m_2,\ \ n_3 > m_3 \end{array}\right.$$

Пример:

$$\langle 2, 11, 2\rangle \succ \langle 2, 10, 5578\rangle \succ \langle 2, 10, 5577\rangle \succ \langle 1, 1001, 78\rangle$$

Доказательство теоремы об унификации

Завершаемость ($\mathcal{E} \not\mapsto \infty$)

Характеристика: $\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E}) \rangle$
$vr(\mathcal{E})$: число неприведённых переменных
$fs(\mathcal{E})$: число функциональных символов и констант в левых частях
$eq(\mathcal{E})$: число уравнений

Факт 1: при применении правил упрощения характеристика системы уменьшается относительно $\succ$

$$\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}(\mathcal{E}) \succ \mathcal{H}(\mathcal{E}')$$

Правило Triv:

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \dots \\ t = t \\ \dots \end{cases} \quad \mapsto \quad \mathcal{E}' = \begin{cases} \dots \\ \\ \dots \end{cases}$$

$$vr(\mathcal{E}) \geq vr(\mathcal{E}') \qquad fs(\mathcal{E}) \geq fs(\mathcal{E}') \qquad eq(\mathcal{E}) > eq(\mathcal{E}')$$

Доказательство теоремы об унификации

Завершаемость ($\mathcal{E} \not\rightarrowtail \infty$)

Характеристика: $\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E}) \rangle$
$vr(\mathcal{E})$: число неприведённых переменных
$fs(\mathcal{E})$: число функциональных символов и констант в левых частях
$eq(\mathcal{E})$: число уравнений

Факт 1: при применении правил упрощения характеристика системы уменьшается относительно $\succ$

$$\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}(\mathcal{E}) \succ \mathcal{H}(\mathcal{E}')$$

Правило Swap:

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \dots \\ t = \mathrm{x} \\ \dots \end{cases} \quad \mapsto \quad \mathcal{E}' = \begin{cases} \dots \\ \mathrm{x} = t \\ \dots \end{cases}$$

$$vr(\mathcal{E}) \geq vr(\mathcal{E}') \qquad fs(\mathcal{E}) > fs(\mathcal{E}')$$

Доказательство теоремы об унификации

Завершаемость ($\mathcal{E} \not\mapsto \infty$)

Характеристика: $\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E})\rangle$
$vr(\mathcal{E})$: число неприведённых переменных
$fs(\mathcal{E})$: число функциональных символов и констант в левых частях
$eq(\mathcal{E})$: число уравнений

Факт 1: при применении правил упрощения характеристика системы уменьшается относительно $\succ$

$$\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}(\mathcal{E}) \succ \mathcal{H}(\mathcal{E}')$$

Правило Func:

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \dots \\ \mathbf{f}(t_1, \dots, t_k) = \mathbf{f}(s_1, \dots, s_k) \\ \dots \end{cases} \quad \mapsto \quad \mathcal{E}' = \begin{cases} \dots \\ \quad t_1 = s_1 \\ \quad \dots \\ \quad t_k = s_k \\ \dots \end{cases}$$

$$vr(\mathcal{E}) \geq vr(\mathcal{E}') \qquad fs(\mathcal{E}) > fs(\mathcal{E}')$$

Доказательство теоремы об унификации

Завершаемость ($\mathcal{E} \not\mapsto \infty$)

Характеристика: $\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E})\rangle$
$vr(\mathcal{E})$: число неприведённых переменных
$fs(\mathcal{E})$: число функциональных символов и констант в левых частях
$eq(\mathcal{E})$: число уравнений

Факт 1: при применении правил упрощения характеристика системы уменьшается относительно $\succ$

$$\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}(\mathcal{E}) \succ \mathcal{H}(\mathcal{E}')$$

Правило Elim:

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \dots \\ \mathrm{x} = t \\ \dots \end{cases} \quad \mapsto \quad \mathcal{E}' = \begin{cases} \dots\{\mathrm{x}/t\} \\ \mathrm{x} = t \\ \dots\{\mathrm{x}/t\} \end{cases}$$

$$vr(\mathcal{E}) > vr(\mathcal{E}')$$

Доказательство теоремы об унификации

Завершаемость ($\mathcal{E} \not\rightsquigarrow \infty$)

Характеристика: $\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E}) \rangle$
$vr(\mathcal{E})$: число неприведённых переменных
$fs(\mathcal{E})$: число функциональных символов и констант в левых частях
$eq(\mathcal{E})$: число уравнений

Факт 2: характеристика не может убывать бесконечно долго относительно $\succ$

Доказательство теоремы об унификации

Факт 2: характеристика не может убывать бесконечно долго относительно $\succ$

Начнём с наглядной иллюстрации этого факта

Представьте, что у Вас есть 10 килограммов конфет: вкусных, обычных и невкусных — и Вы пришли в пункт обмена конфет, в котором можно

- отдать вкусную конфету
  и взамен получить сколько угодно обычных и невкусных
- отдать обычную конфету
  и взамен получить сколько угодно невкусных
- отдать невкусную конфету (*всё равно Вам она не нужна*)

Если слишком увлечётесь обменом, то
Вы обязательно останетесь без конфет

Доказательство теоремы об унификации

Завершаемость ($\mathcal{E} \not\to \infty$)

Характеристика: $\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E}) \rangle$
$vr(\mathcal{E})$: число неприведённых переменных
$fs(\mathcal{E})$: число функциональных символов и констант в левых частях
$eq(\mathcal{E})$: число уравнений

Факт 2: характеристика не может убывать бесконечно долго относительно $\succ$

Лемма. Не существует бесконечной последовательности троек неотрицательных целых чисел, убывающей относительно лексикографического порядка

Доказательство (леммы). Попробуйте сами

Эта лемма означает, что $(\mathbb{N}_0^3, \succ)$ — фундированное множество, или, по-другому, упорядоченное множество, обладающее свойством обрыва убывающих цепей

Доказательство теоремы об унификации

Успешность ($\mathcal{E} \rightsquigarrow \theta$/СТОП)

Неуспешность алгоритма означает, что на некотором шаге работы получена **неприведённая** система $\mathcal{E}'$, к которoой **невозможно применить** ни одно из правил Triv, Swap, Func, Elim, NFunc, NElim

Невозможно применить правила Triv, Swap, Func, NFunc $\Rightarrow$
в левых частях $\mathcal{E}'$ содержатся **только** переменные

Невозможно применить правила Elim, NElim $\Rightarrow$
все переменные в левых частях $\mathcal{E}'$ являются приведёнными

Итог: если к $\mathcal{E}'$ невозможно применить ни одно из правил Triv, Swap, Func, Elim, NFunc, NElim, то она обязательно является приведённой — значит, в качестве ответа выдаётся подстановка

Доказательство теоремы об унификации

Корректность ($\mathcal{E} \rightsquigarrow \theta \Rightarrow \theta \in$ НОУ$(\mathcal{E})$)

Достаточно показать, что при применении правил упрощения (Triv, Swap, Func, Elim) получается система, **равносильная** исходной

Для правил Triv, Swap, Func это показать довольно просто

Подробно рассмотрим только правило Elim:

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \dots \\ \mathrm{x} = t \\ \dots \end{cases} \mapsto \quad \mathcal{E}' = \begin{cases} \dots\{\mathrm{x}/t\} \\ \mathrm{x} = t \\ \dots\{\mathrm{x}/t\} \end{cases}$$

Покажем, что системы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ **равносильны**:

$$\text{У}(\mathcal{E}) = \text{У}(\mathcal{E}')$$

Доказательство теоремы об унификации

Корректность ($\mathcal{E} \rightsquigarrow \theta \Rightarrow \theta \in$ НОУ$(\mathcal{E})$)

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \mathtt{x} = t \\ \dots \end{array} \right. \mapsto \quad \mathcal{E}' = \left\{ \begin{array}{l} \dots \{\mathtt{x}/t\} \\ \mathtt{x} = t \\ \dots \{\mathtt{x}/t\} \end{array} \right.$$

$$\text{У}(\mathcal{E}) \stackrel{?}{=} \text{У}(\mathcal{E}')$$

($\subseteq$): Пусть η — унификатор системы $\mathcal{E}$

Тогда $\mathtt{x}\eta \equiv t\eta$

Из доказательства леммы о связке: $\eta = \{\mathtt{x}/t\}\,\eta$, а значит,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots \eta \\ \mathtt{x}\eta \equiv t\eta \\ \dots \eta \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \dots \{\mathtt{x}/t\}\,\eta \\ \mathtt{x}\eta \equiv t\eta \\ \dots \{\mathtt{x}/t\}\,\eta \end{array} \right.$$

Следовательно, η — унификатор системы $\mathcal{E}'$

($\supseteq$): Рассуждения аналогичны

Доказательство теоремы об унификации

Полнота ($\mathcal{E} \rightsquigarrow$ СТОП $\Rightarrow$ У$(\mathcal{E}) = \emptyset$)

Для определённости считаем, что сообщение СТОП выдано для системы $\mathcal{E}'$

Пусть для этого было применено правило NFunc

Тогда $\mathcal{E}'$ содержит уравнение $\mathbf{f}(\dots) = \mathbf{g}(\dots)$, где $\mathbf{f} \neq \mathbf{g}$

Ни для какой подстановки θ не верно $\mathbf{f}(\dots)\theta \equiv \mathbf{g}(\dots)\theta$

Пусть для этого было применено правило NElim

Тогда $\mathcal{E}'$ содержит уравнение $\mathtt{x} = t$, где $\mathtt{x} \in \mathsf{Var}_t$ и $\mathtt{x} \not\equiv t$

Лемма о связке: ни для какой подстановки θ не верно $\mathtt{x}\theta \equiv t\theta$

Итог: система $\mathcal{E}'$ неунифицируема

Система $\mathcal{E}'$ была получена из $\mathcal{E}$ применением правил Triv, Swap, Func, Elim

Корректность алгоритма: системы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ равносильны

Значит, система $\mathcal{E}$ неунифицируема ▼