Занятие 2. Полином Жегалкина. Линейные конъюнктивные нормальные формы (ЛКНФ).

1. Построить полином Жегалкина P_f функции $f \in P_2$ по заданному ее вектору значений α_f, если
1) $\alpha_f = (1001\ 0110)$;
2) $\alpha_f = (0010\ 1110)$;
3) $\alpha_f = (0100\ 1010)$;
4) $\alpha_f = (0000\ 1110\ 1000\ 0001)$.

2. Выяснить, являются ли ЛФ из множества A линейными имплицентами функции $f \in P_2$, если
1) $f(x_1, x_2, x_3) = (0111\ 0000)$, $A = \{x_1 \oplus 1, x_3, x_1 \oplus x_2 \oplus 1, x_2 \oplus x_3\}$;
2) $f(x_1, x_2, x_3) = (0100\ 0010)$, $A = \{x_1 \oplus x_2, x_2 \oplus x_3 \oplus 1, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3\}$;
3) $f(x_1, x_2, x_3) = (0011\ 0100)$, $A = \{x_1 \oplus 1, x_1 \oplus x_2, x_2 \oplus x_3 \oplus 1\}$;
4) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1010\ 0001\ 0101\ 0001)$, $A = \{x_1, x_4 \oplus 1, x_2 \oplus x_3 \oplus 1, x_1 \oplus x_2 \oplus x_4\}$.

3. Найти все линейные имплиценты функции $f \in P_2$, если
1) $P_f = x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2 \oplus x_3$;
2) $P_f = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3$;
3) $P_f = x_1x_2x_3x_4 \oplus x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2x_4 \oplus x_1x_3x_4 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_4 \oplus x_2x_3 \oplus x_2$;
4) $P_f = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_4 \oplus x_1x_4$.

4. Выяснить, представима ли ЛКНФ каждая из функций $f \in P_2$ задачи 3.

5. Выяснить, представима ли ЛКНФ функция $f \in P_2$, если
1) $\alpha_f = (0010\ 0100)$;
2) $\alpha_f = (1100\ 0100)$;
3) $\alpha_f = (0110\ 1001\ 0011\ 1100)$;
4) $\alpha_f = (0000\ 1000\ 0001\ 0000)$.

6. Доказать, что если L_1, L_2, L_3 — линейные имплиценты функции $f \in P_2$, то $L_1 \oplus L_2 \oplus 1$ и $L_1 \oplus L_2 \oplus L_3$ также являются линейными имплицентами функции f.

7. Доказать, что если L_1, L_2 — линейные соимплиценты функции $f \in P_2$, то $L_1 \oplus L_2$ также является линейной соимплицентой функции f.

8. Опираясь на задачу 7 показать, что множество всех линейных соимплицент функции $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ образует линейное подпространство пространства всех линейных форм от переменных $x_1, \dots, x_n$ над полем вычетов по модулю два.

9. Опираясь на задачу 6 показать, что множество всех линейных имплицент функции $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ образует линейное аффинное многообразие в пространстве всех линейных форм от переменных $x_1, \dots, x_n$ над полем вычетов по модулю два.

10. Назовем линейные формы $L_1, \dots, L_m$, $m \geq 1$, *линейно зависимыми*, если можно подобрать такие $a_1, \dots, a_m \in E_2$, не все равные 0, что линейная форма $a_1L_1 \oplus \dots \oplus a_mL_m$ является нулевой. В обратном случае линейные формы назовем *линейно независимыми.*

Доказать, что если функция $f \in P_2$, $f \neq 0$, представима ЛКНФ, то она представима такой ЛКНФ, в которой все сомножители являются линейно независимыми линейными формами.