Математическая логика

(mk.cs.msu.ru $\to$ Лекционные курсы $\to$ Математическая логика (группы 318, 241))

Лекция 6

Полнота табличного вывода
Теорема Лёвенгейма-Сколема
Теорема компактности Мальцева
Равносильные формулы
Теорема о равносильной замене

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2020, весенний семестр

Напоминание

Корректность табличного вывода в логике предикатов:

если для таблицы T_0 существует **успешный** табличный вывод, то таблица T_0 невыполнима

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & T_0: \langle\, A(\mathbf{c}) \,\&\, A(\mathbf{d}) \to \neg A(\mathbf{e}) \mid \exists x\, \neg A(x) \,\rangle \arrow[dl, "L\to"'] \arrow[dr] & \\
 & T_1 \arrow[dl, "R\exists"'] & & T_2 \arrow[dl, "R\vee"'] \arrow[dr] \\
\begin{array}{c}\langle\, \neg A(\mathbf{e}) \mid \exists x\, \neg A(x), \neg A(\mathbf{e}) \,\rangle \\ \text{закр.таб.}\end{array} & & T_3 \arrow[dl, "R\exists"'] & & T_4 \arrow[d, "R\exists"] \\
 & T_5 \arrow[dl, "R\neg"'] & & & T_6 \arrow[d, "R\neg"] \\
\begin{array}{c}\langle\, A(\mathbf{c}) \mid A(\mathbf{c}), \exists x\, \neg A(x) \,\rangle \\ \text{закр.таб.}\end{array} & & & & \begin{array}{c}\langle\, A(\mathbf{d}) \mid A(\mathbf{d}), \exists x\, \neg A(x) \,\rangle \\ \text{закр.таб.}\end{array}
\end{tikzcd}
$$

А верно ли обратное утверждение?

(*если таблица невыполнима, то для неё существует успешный вывод*)

Полнота табличного вывода

Теорема(*о полноте табличного вывода*)
Для любой невыполнимой семантической таблицы существует успешный табличный вывод

Доказательство.

Рассмотрим произвольную невыполнимую семантическую таблицу $T_0 = \langle\, \Gamma_0 \mid \Delta_0 \,\rangle$

Покажем, как можно **построить** успешный вывод $\mathfrak{D}$ для T_0

Для простоты будем считать, что:

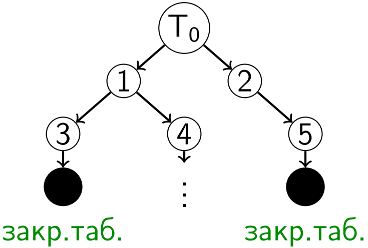
- множества Γ_0, Δ_0 конечны
- все формулы из Γ_0, Δ_0 замкнуты
- в *сигнатуре* формул нет ни одного функционального символа

Сформулируем свод правил, которых достаточно придерживаться, чтобы построить требуемый вывод $\mathfrak{D}$

Теорема о полноте табличного вывода: доказательство

Правила построения успешного вывода:

1. Незакрытые неатомарные таблицы обрабатываются в порядке появления при построении вывода (*то есть дерево вывода обходится в ширину*)



Результат: каждая таблица каждой ветви вывода рано или поздно будет построена

Теорема о полноте табличного вывода: доказательство

Правила построения успешного вывода:

2. Все неатомарные формулы таблицы упорядочены, правило вывода применяется к первой формуле, результат применения записывается последним

$$\langle\ 1{:}\forall \mathtt{x}\ \varphi,\ 3{:}\psi_1 \to \psi_2 \mid 2{:}\chi_1 \vee \chi_2\ \rangle$$
$$\downarrow$$
$$\langle\ 2{:}\psi_1 \to \psi_2,\ 3{:}\forall \mathtt{x}\ \varphi,\ 4{:}\varphi' \mid 1{:}\chi_1 \vee \chi_2\ \rangle$$
$$\downarrow$$
$$\langle\ 1{:}\psi_1 \to \psi_2,\ 2{:}\forall \mathrm{x}\ \varphi,\ 3{:}\varphi' \mid 4{:}\chi_1,\ 5{:}\chi_2\ \rangle$$
$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$
$$\begin{array}{cc} \langle 1{:}\forall \mathtt{x}\ \varphi, 2{:}\varphi', 5{:}\psi_2 \mid 3{:}\chi_1, 4{:}\chi_2\rangle & \langle 1{:}\forall \mathtt{x}\ \varphi, 2{:}\varphi' \mid 3{:}\chi_1, 4{:}\chi_2, 5{:}\psi_1\rangle \\ \cdots & \cdots \end{array}$$

Результат: в каждой бесконечной ветви вывода каждая неатомарная формула рано или поздно будет обработана

Теорема о полноте табличного вывода: доказательство

Правила построения успешного вывода:

3. При применении правил $L\forall$, $R\exists$ подставляются **все имеющиеся в таблице константы** (**c**, если констант нет)

$$\langle\ \forall \mathrm{x}\,\varphi,\ \exists \mathrm{x}\,\psi \mid \exists \mathrm{x}\,\chi\ \rangle$$
$$\big\downarrow L\forall$$
$$\langle\ \forall \mathrm{x}\,\varphi,\ \exists \mathrm{x}\,\psi,\ \varphi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\} \mid \exists \mathrm{x}\,\chi\ \rangle$$
$$\big\downarrow L\exists$$
$$\langle\ \forall \mathrm{x}\,\varphi,\ \psi\{\mathrm{x}/\mathbf{d}\},\ \varphi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\} \mid \exists \mathrm{x}\,\chi\ \rangle$$
$$\big\downarrow R\exists \times 2$$
$$\langle\ \forall \mathrm{x}\,\varphi,\ \psi\{\mathrm{x}/\mathbf{d}\},\ \varphi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\} \mid \exists \mathrm{x}\,\chi,\ \chi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\},\ \chi\{\mathrm{x}/\mathbf{d}\}\ \rangle$$
$$\cdots$$

Результат: в каждой бесконечной ветви вывода каждая константа рано или поздно будет подставлена для каждого квантора $\forall$ в левой части таблицы и каждого квантора $\exists$ в правой части

Теорема о полноте табличного вывода: доказательство

Покажем, что любой вывод $\mathfrak{D}$, построенный для $\mathsf{T}_0 = \langle\, \Gamma_0 \mid \Delta_0 \,\rangle$ согласно предложенным правилам, успешен

Предположим, что это не так: вывод $\mathfrak{D}$ неуспешен — получим из этого выполнимость таблицы T_0, *противоречащую выбору таблицы* T_0

Заменим в $\mathfrak{D}$ каждую незакрытую атомарную таблицу T_{atom} на бесконечную ветвь $\mathsf{T}_{atom} \to \mathsf{T}_{atom} \to \mathsf{T}_{atom} \to \dots$

Тогда в полученном дереве обязательно найдётся бесконечная ветвь $\mathcal{T}$, состоящая только из незакрытых таблиц:

$$\mathsf{T}_0 \to \mathsf{T}_1 \to \mathsf{T}_2 \to \dots$$

По этой ветви построим интерпретацию $\mathcal{I}$, такую что:

- каждая формула из Γ_0 выполнима в $\mathcal{I}$
- каждая формула из Δ_0 невыполнима в $\mathcal{I}$

Теорема о полноте табличного вывода: доказательство

$$\mathfrak{T}\colon \mathrm{T}_0 \to \mathrm{T}_1 \to \mathrm{T}_2 \to \dots, \quad \mathrm{T}_i = \langle\, \Gamma_i \mid \Delta_i \,\rangle$$

$\mathcal{I} = \left\langle \mathrm{D}, \overline{\mathrm{Const}}, -, \overline{\mathrm{Pred}} \right\rangle$, где

- предметная область D — это все константы всех формул в $\mathfrak{T}$:
  $$\mathrm{D} = \bigcup_{i \geq 0} \mathrm{Const}_i = \mathrm{Const}_\omega, \text{ где } \mathrm{Const}_i \text{ — все константы в } \mathrm{T}_i$$
- значение каждой константы — это её изображение (*она сама*):
  $$\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{c}$$
- предикат истинен = он встречается в левых частях таблиц $\mathfrak{T}$:
  $$\overline{\mathrm{P}}(\mathbf{c_1}, \dots, \mathbf{c_k}) = \mathbf{t} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{P}(\mathbf{c_1}, \dots, \mathbf{c_k}) \in \bigcup_{i \geq 0} \Gamma_i = \Gamma_\omega$$

Осталось показать *индукцией по структуре формулы*, что

- каждая формула из Γ_ω выполнима в $\mathcal{I}$
- каждая формула из $\Delta_\omega = \bigcup_{i \geq 0} \Delta_i$ невыполнима в $\mathcal{I}$

Теорема о полноте табличного вывода: доказательство

$$\mathfrak{T}\colon \mathrm{T}_0 \to \mathrm{T}_1 \to \mathrm{T}_2 \to \dots, \quad \mathrm{T}_i = \langle\, \Gamma_i \mid \Delta_i \,\rangle$$

$$\varphi \in \Gamma_\omega \overset{?}{\Rightarrow} \mathcal{I} \models \varphi \qquad\qquad \varphi \in \Delta_\omega \overset{?}{\Rightarrow} \mathcal{I} \not\models \varphi$$

База индукции: φ — атом

Тогда φ имеет вид $\mathrm{P}(\mathbf{c_1}, \dots, \mathbf{c_k})$, где $\mathbf{c_1}, \dots, \mathbf{c_k} \in \mathsf{Const}_\omega$ (почему?)

Подслучай 1: $\mathrm{P}(\mathbf{c_1}, \dots, \mathbf{c_k}) \in \Gamma_\omega$
Тогда $\overline{\mathrm{P}}(\mathbf{c_1}, \dots, \mathbf{c_k}) = \mathbf{t}$, а значит, $\mathcal{I} \models \varphi$

Подслучай 2: $\mathrm{P}(\mathbf{c_1}, \dots, \mathbf{c_k}) \in \Delta_\omega$
Тогда $\mathrm{P}(\mathbf{c_1}, \dots, \mathbf{c_k}) \notin \Gamma_\omega$ (почему?)
Значит, $\overline{\mathrm{P}}(\mathbf{c_1}, \dots, \mathbf{c_k}) = \mathbf{f}$ и $\mathcal{I} \not\models \varphi$

Индуктивный переход

Предположение индукции: для каждой формулы, содержащей менее N логических операций, утверждение доказано

Рассматриваемый случай: формула φ содержит ровно N логических операций

Теорема о полноте табличного вывода: доказательство

$$\mathfrak{T}\colon \mathsf{T}_0 \to \mathsf{T}_1 \to \mathsf{T}_2 \to \ldots, \quad \mathsf{T}_i = \langle\, \Gamma_i \mid \Delta_i \,\rangle$$

$$\varphi \in \Gamma_\omega \overset{?}{\Rightarrow} \mathcal{I} \models \varphi \qquad\qquad \varphi \in \Delta_\omega \overset{?}{\Rightarrow} \mathcal{I} \not\models \varphi$$

Переход 1: φ имеет вид $\psi \to \chi$

Подслучай 1: $\varphi \in \Gamma_\omega$

В ветви $\mathfrak{T}$ существует таблица T_i, такая что правило вывода применяется к φ в левой части этой таблицы (почему?)

Значит, верно хотя бы одно из двух: (почему?)

- $\chi \in \Gamma_{i+1}$, и тогда $\mathcal{I} \models \chi$ и $\mathcal{I} \models \varphi$
- $\psi \in \Delta_{i+1}$, и тогда $\mathcal{I} \not\models \psi$ и $\mathcal{I} \models \varphi$

Подслучай 2: $\varphi \in \Delta_\omega$ — рассуждения аналогичны

Переход 2/3/4: формула φ имеет вид $\psi \mathbin{\&} \chi / \psi \vee \chi / \neg\psi$ — рассуждения аналогичны

Теорема о полноте табличного вывода: доказательство

$$\mathfrak{T}\colon \mathsf{T}_0 \to \mathsf{T}_1 \to \mathsf{T}_2 \to \dots, \ \mathsf{T}_i = \langle\, \Gamma_i \mid \Delta_i \,\rangle$$

$$\varphi \in \Gamma_\omega \overset{?}{\Rightarrow} \mathcal{I} \models \varphi \qquad\qquad \varphi \in \Delta_\omega \overset{?}{\Rightarrow} \mathcal{I} \not\models \varphi$$

Переход 5: формула φ имеет вид $\forall \mathtt{x}\, \psi$

Подслучай 1: $\varphi \in \Gamma_\omega$

Тогда $\varphi\{\mathtt{x}/\mathbf{c}\} \in \Gamma_\omega$ для любой константы $\mathbf{c} \in \mathsf{Const}_\omega$ (почему?)

Значит, для любой константы $\mathbf{c} \in \mathsf{Const}_\omega$ верно: $\mathcal{I} \models \varphi\{\mathtt{x}/\mathbf{c}\}$

Но это и означает $\mathcal{I} \models \forall \mathtt{x}\, \varphi$

Подслучай 2: $\varphi \in \Delta_\omega$

В ветви $\mathfrak{T}$ существует таблица T_i, такая что правило вывода применяется к φ в правой части этой таблицы

Значит, $\varphi\{\mathtt{x}/\mathbf{c}\} \in \Delta_{i+1}$ для некоторой $\mathbf{c} \in \mathsf{Const}_{i+1} \subseteq \mathsf{Const}_\omega$

Тогда $\mathcal{I} \not\models \varphi\{\mathtt{x}/\mathbf{c}\}$, и следовательно, $\mathcal{I} \not\models \forall \mathtt{x}\, \varphi$

Переход 6: формула φ имеет вид $\exists \mathtt{x}\, \psi$ — рассуждения аналогичны

Теорема о полноте табличного вывода: доказательство

$$\mathfrak{T}\colon \mathsf{T}_0 \to \mathsf{T}_1 \to \mathsf{T}_2 \to \dots,\ \mathsf{T}_i = \langle\ \Gamma_i \mid \Delta_i\ \rangle$$

Итоги рассуждений

Существует (*и явно описана*) интерпретация $\mathcal{I}$, такая что

- все формулы в левых частях таблиц из $\mathfrak{T}$ выполнимы в $\mathcal{I}$
- все формулы в правых частях таблиц из $\mathfrak{T}$ невыполнимы в $\mathcal{I}$

В частности, все формулы из Γ_0 выполнимы в $\mathcal{I}$,
и все формулы из Δ_0 невыполнимы в $\mathcal{I}$

Значит, таблица T_0 выполнима, *что противоречит невыполнимости этой таблицы, заявленной в начале доказательства*

Противоречие получено в предположении о том, что вывод, построенный для T_0, неуспешен

Значит, предположение неверно: **любой вывод, построенный для невыполнимой таблицы T_0 согласно предложенным правилам, успешен**

Теорема о полноте табличного вывода: доказательство

А как адаптировать доказательство к общему случаю?

То есть:

- какой порядок обработки формул позволит “справедливо” обращаться со счётно-бесконечными множествами формул?
- какие термы подставлять, если в сигнатуре алфавита есть функциональные символы?
- как описать и что делать с интерпретацией $\mathcal{I}$, если в таблицах встречаются незамкнутые формулы?

Полнота табличного вывода

Следствие(*вариант теоремы Гёделя о полноте для исчисления семантических таблиц*)

$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ **для семантической таблицы $\langle \ \mid \varphi \rangle$ существует успешный табличный вывод**

Доказательство.

Следует из *корректности* и *полноты* табличного вывода и теоремы *о табличной проверке общезначимости формул* ▼

Кроме того, из теорем о корректности и полноте табличного вывода можно легко получить полезные следствия, не относящиеся к табличным выводам как таковым

Теорема Лёвенгейма-Сколема

Для любого предложения φ справедлива равносильность:
$\Vert\!\models \varphi \;\Leftrightarrow\; \varphi$ **имеет модель с <u>конечной</u> или <u>счётно-бесконечной</u> предметной областью**

Доказательство.

Корректность и *полнота*: φ выполнима $\Leftrightarrow$ для таблицы $T_0 = \langle\, \varphi \mid \;\rangle$ не существует успешного табличного вывода

Построив вывод согласно *правилам из доказательства теоремы о полноте*, получим

- бесконечную ветвь $T_0 \to T_1 \to \dots$, состоящую только из незакрытых таблиц
- интерпретацию $\mathcal{I}$ с **не более чем счётно-бесконечной** предметной областью, в которой выполнимы все таблицы этой ветви — в том числе таблица T_0

Теорема компактности Мальцева

Для любого предложения φ и любого множества предложений Γ справедлива равносильность:

$\Gamma \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ **существует <u>конечное</u> подмножество Γ' множества Γ, такое что $\Gamma' \models \varphi$**

Доказательство.

$\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow$ таблица $T = \langle\, \Gamma \mid \varphi \,\rangle$ невыполнима (почему?)
$\Leftrightarrow$ существует успешный табличный вывод $\mathfrak{D}$ для T

Подмножество Γ' формул множества Γ, к которым применяются правила и которые приводят к закрытости таблиц в $\mathfrak{D}$, <u>конечно</u> (почему?)

Тогда для таблицы $\langle\, \Gamma' \mid \varphi \,\rangle$ также существует успешный табличный вывод (почему?)

Значит, $\Gamma' \models \varphi$ ▼

Автоматическое доказательство теорем

Если программно реализовать стратегию[1] построения логического вывода[2], то в результате получится средство **автоматического доказательства теорем**:

First-order theorem prover

Основная задача прувера — предоставлять доказательство общезначимости формулы (успешный вывод)

Требования, предъявляемые к пруверу:

- корректность (выдаются только правильные ответы): обязательно
- полнота (ответы выдаются всегда): желательно
- эффективность (ответы выдаются за разумное время): желательно

---

[1] Не обязательно озвученную в доказательстве теоремы полноты, и даже не обязательно полную

[2] Не обязательно табличного вывода

Автоматическое доказательство теорем

Если программно реализовать стратегию построения логического вывода, то в результате получится средство **автоматического доказательства теорем**:

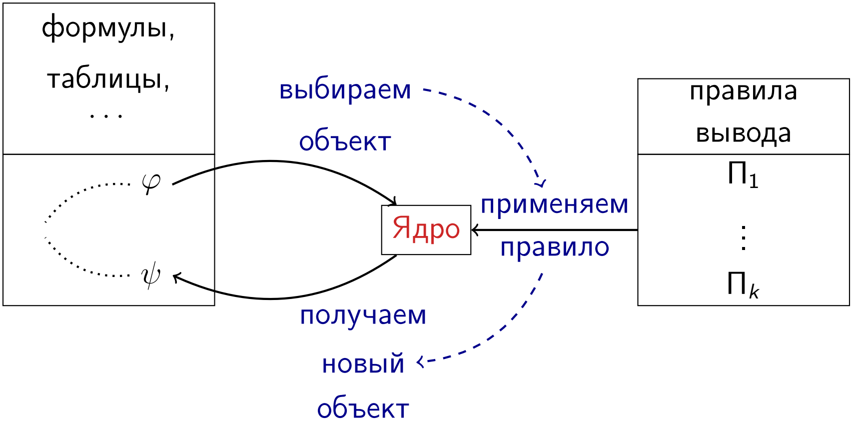
First-order theorem prover

Один из **многих** примеров того, чего позволило добиться использование пруверов:[1] строго доказана корректность *nix-микроядра L4, и в процессе доказательства найдены и исправлены сотни ошибок в коде

[1] Klein et al. seL4: formal verification of an OS kernel. 2009.
Конкретно этот пример выбран из-за наглядности, понятности и при этом "неоспоримой полезности" формулировки результата

Автоматическое доказательство теорем

Как устроены пруверы:



Автоматическое доказательство теорем: практический взгляд

Представим себе прувер, способный доказывать общезначимость формул логики предикатов:

- корректный
- не обязательно полный, но выдающий ответ “да” для **всех** общезначимых формул

Насколько эффективен может быть такой прувер?

Эффективность построения вывода определяется тем,

- как на каждом шаге выбираются формулы для применения к ним правил и
- какие термы подставляются при применении правил $L\forall$ и $R\exists$

Если прувером осуществляется полный перебор всех формул, возникающих в таблицах, или перебор слишком большого числа термов, то такой прувер, вероятно, окажется неэффективным

Автоматическое доказательство теорем: практический взгляд

Избежать полного перебора формул — непростая задача:

База знаний	Запрос
В огороде бузина	В Киеве дядька
$\mathrm{Растёт}(\textbf{бузина}, \textbf{огород})$	$\exists y\ (\mathrm{Дядька}(y)$ $\quad \& \ \mathrm{Живёт}(y, \textbf{Киев}))$

Автоматическое доказательство теорем: практический взгляд

Избежать полного перебора формул — непростая задача:

База знаний	Запрос
В огороде бузина $\text{Растёт}(\textbf{бузина}, \textbf{огород})$ Всё в огороде посадил дядька $\forall x\ (\text{Растёт}(x, \textbf{огород}) \to$ $\quad \exists y\ (\text{Посадил}(y, x)\ \&\ \text{Дядька}(y)))$	В Киеве дядька $\exists y\ (\text{Дядька}(y)$ $\quad \&\ \text{Живёт}(y, \textbf{Киев}))$

Автоматическое доказательство теорем: практический взгляд

Избежать полного перебора формул — непростая задача:

База знаний	Запрос
В огороде бузина $\text{Растёт}(\textbf{бузина}, \textbf{огород})$	В Киеве дядька $\exists y\ (\text{Дядька}(y)$ $\quad \& \text{Живёт}(y, \textbf{Киев}))$
Всё в огороде посадил дядька $\forall x\ (\text{Растёт}(x, \textbf{огород}) \rightarrow$ $\quad \exists y\ (\text{Посадил}(y, x) \,\&\, \text{Дядька}(y)))$	
Бузину сажают только Киевляне $\forall x\ (\text{Посадил}(x, \textbf{бузина})$ $\quad \rightarrow \text{Живёт}(x, \textbf{Киев}))$	

Автоматическое доказательство теорем: практический взгляд

$$L\forall \ \frac{\langle \Gamma,\ \forall \mathtt{x}\ \varphi(\mathtt{x}) | \Delta\rangle}{\langle \Gamma,\ \forall \mathtt{x}\ \varphi(\mathtt{x}),\ \varphi(\mathtt{x})\{\mathtt{x}/t\} | \Delta\rangle} \qquad R\exists \ \frac{\langle \Gamma | \Delta,\ \exists \mathtt{x}\ \varphi(\mathtt{x})\rangle}{\langle \Gamma | \Delta,\ \exists \mathtt{x}\ \varphi(\mathtt{x}),\ \varphi(\mathtt{x})\{\mathtt{x}/t\}\rangle}$$

Избежать перебора большого числа термов — непростая задача

Для примера представим себе, что при построении вывода придётся перебрать все термы, составленные из **одного** функционального символа $\mathbf{f}^{(2)}$, используемого не более 10 раз, и **двух** различных констант (*вроде бы это не очень большие термы?*)

Можно легко посчитать, что существует **более** 10^{300} различных термов такого вида

Число 10^{100} (на 200 нолей меньше) имеет особое название — гугол: это бессмысленно большое число, превосходящее число атомов в наблюдаемой вселенной

Автоматическое доказательство теорем: практический взгляд

$L\forall\ \dfrac{\langle \Gamma,\ \forall \mathtt{x}\ \varphi(\mathtt{x}) | \Delta\rangle}{\langle \Gamma,\ \forall \mathtt{x}\ \varphi(\mathtt{x}),\ \varphi(\mathtt{x})\{\mathtt{x}/t\} | \Delta\rangle}$ $\qquad$ $R\exists\ \dfrac{\langle \Gamma | \Delta,\ \exists \mathtt{x}\ \varphi(\mathtt{x})\rangle}{\langle \Gamma | \Delta,\ \exists \mathtt{x}\ \varphi(\mathtt{x}),\ \varphi(\mathtt{x})\{\mathtt{x}/t\}\rangle}$

Избежать перебора большого числа термов — непростая задача

Существуют способы повышения эффективности перебора термов при построении логического вывода для доказательства общезначимости формул,[1,2] и один из этих способов (метод резолюций) будет рассматриваться в курсе

[1] J.A. Robinson: метод резолюций

[2] С.Ю. Маслов: обратный вывод

Автоматическое доказательство теорем: теоретический взгляд

Бывают задачи, которые можно решить автоматически, *программно реализовав подходящий алгоритм* — такие задачи называются алгоритмически разрешимыми

Бывают задачи, для которых автоматическое решение принципиально невозможно — такие задачи называются алгоритмически неразрешимыми

После метода резолюций подробно обсудим следующий факт: **проблема общезначимости формул логики предикатов алгоритмически неразрешима**

Этот факт, в частности, означает, что принципиально невозможно разработать программное средство доказательства общезначимости формул логики предикатов, которое было бы одновременно *корректным* и *полным*

Равносильные формулы

Перед обсуждением метода резолюций научимся **упрощать** формулы логики предикатов: преобразовывать их к *простому* виду без изменения смысла

Для *булевых формул* (то есть *формул логики высказываний*) вам известно несколько таких простых видов — например, дизъюнктивные нормальные формы, конъюнктивные нормальные формы и полиномы

В этом курсе пригодятся воспоминания о конъюнктивной нормальной форме (КНФ)

КНФ — это конъюнкция элементарных дизъюнкций, а *элементарная дизъюнкция* — это дизъюнкция переменных и их отрицаний

Например:

$$(A \vee B \vee \neg C)\,\&\,(C \vee \neg A)\,\&\,(\neg D)$$

Равносильные формулы

Чтобы преобразовать формулу к КНФ, достаточно, *не особо задумываясь*, в нужном порядке применить *основные тождества булевой алгебры*:

$$A \vee B \to (C \,\&\, D \to E)$$

$$\mapsto$$

$$\neg A \,\&\, \neg B \vee \neg(C \,\&\, D) \vee E$$

$$\mapsto$$

$$\neg A \,\&\, \neg B \vee \neg C \vee \neg D \vee E$$

$$\mapsto$$

$$(\neg A \vee \neg C \vee \neg D \vee E) \,\&\, (\neg B \vee \neg C \vee \neg D \vee E)$$

Научимся аналогично преобразовывать формулы **логики предикатов**

Равносильные формулы

Равносильность (логическая связка):

$$\varphi \leftrightarrow \psi \text{ — это сокращение для } (\varphi \to \psi)\,\&(\psi \to \varphi)$$

Формулы φ, ψ равносильны ($\varphi \sim \psi$), если $\models \varphi \leftrightarrow \psi$

Утверждение. **Для любых равносильных формул $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$, $\psi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$, интерпретации $\mathcal{I}$ и набора предметов $\widetilde{d}^n$ справедлива эквивалентность:**

$$\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\widetilde{d}^n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \psi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\widetilde{d}^n]$$

Утверждение. **$\sim$ — отношение эквивалентности**

Утверждение. **Если формула φ общезначима (выполнима) [невыполнима], то любая равносильная ей формула ψ также общезначима (выполнима) [невыполнима]**

Доказательство. Самостоятельно

Равносильные формулы: примеры
Законы булевой алгебры

$\varphi \overset{\&}{\underset{\vee}{}} \psi \sim \psi \overset{\&}{\underset{\vee}{}} \varphi$ (коммутативность $\substack{\text{конъюнкции} \\ \text{дизъюнкции}}$)

$(\varphi \overset{\&}{\underset{\vee}{}} \psi) \overset{\&}{\underset{\vee}{}} \chi \sim \varphi \overset{\&}{\underset{\vee}{}} (\psi \overset{\&}{\underset{\vee}{}} \chi)$ (ассоциативность $\substack{\text{конъюнкции} \\ \text{дизъюнкции}}$)

$\varphi \overset{\&}{\underset{\vee}{}} (\psi \overset{\vee}{\underset{\&}{}} \chi) \sim (\varphi \overset{\&}{\underset{\vee}{}} \psi) \overset{\vee}{\underset{\&}{}} (\varphi \overset{\&}{\underset{\vee}{}} \chi)$
(дистрибутивность $\substack{\text{дизъюнкции} \\ \text{конъюнкции}}$ относительно $\substack{\text{конъюнкции} \\ \text{дизъюнкции}}$)

$\varphi \overset{\&}{\underset{\vee}{}} \varphi \sim \varphi$ (идемпотентность $\substack{\text{конъюнкции} \\ \text{дизъюнкции}}$)

$\neg\neg\varphi \sim \varphi$ (инволютивность отрицания)

$\neg(\varphi \overset{\&}{\underset{\vee}{}} \psi) \sim \neg\varphi \overset{\vee}{\underset{\&}{}} \neg\psi$ (законы де Моргана)

$\varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi$ (удаление импликации)

$\ldots$

Равносильные формулы: примеры

Правила работы с кванторами

$$\substack{\forall \\ \exists}\mathtt{x}\,\varphi \sim \substack{\forall \\ \exists}\mathtt{y}\,(\varphi\,\{\mathtt{x}/\mathtt{y}\})$$ (переименование переменных)

(*если* φ *не содержит вхождений* $\mathtt{y}$)

$$\neg\substack{\forall \\ \exists}\mathtt{x}\,\varphi \sim \substack{\exists \\ \forall}\mathtt{x}\,\neg\varphi$$ (продвижение отрицания)

$$\substack{\forall \\ \exists}\mathtt{x}\,\varphi \,\&\, \psi \sim \substack{\forall \\ \exists}\mathtt{x}\,(\varphi \,\&\, \psi)$$ (вынесение кванторов)

$$\substack{\forall \\ \exists}\mathtt{x}\,\varphi \vee \psi \sim \substack{\forall \\ \exists}\mathtt{x}\,(\varphi \vee \psi)$$

(*если* ψ *не содержит свободных вхождений* $\mathtt{x}$)

Доказательство (равносильностей). Очевидно

(например, *методом семантических таблиц*)

Равносильные формулы

$\varphi[\![\psi]\!]$ — обозначение формулы φ, содержащей подформулу ψ

$\varphi[\![\psi/\chi]\!]$ — формула, получающаяся из φ заменой некоторых (каких угодно) вхождений подформулы ψ на χ

Теорема(*о равносильной замене*)

$$\psi \sim \chi \quad \Rightarrow \quad \varphi[\![\psi]\!] \sim \varphi[\![\psi/\chi]\!]$$

Доказательство (индукцией по построению формулы φ).

База индукции: $\varphi = \psi$ — очевидно ($\psi \sim \chi \Rightarrow \psi \sim \chi$)

Индуктивный переход. Подробно разберём только один случай:

$$\varphi(\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}}) = \forall \mathtt{x}\ \varphi'[\![\psi]\!]$$

Остальные случаи аналогичны

Равносильные формулы

Доказательство. *Индуктивный переход.*
Утверждение: $\forall \mathtt{x}\ \varphi' [\![\psi]\!] \sim \forall \mathtt{x}\ \varphi' [\![\psi/\chi]\!]$
Индуктивное предположение: $\varphi' [\![\psi]\!] \sim \varphi' [\![\psi/\chi]\!]$, то есть

для любой интерпретации $\mathcal{I}$ и любых предметов d, $\widetilde{d}^n$ верно:

$$\mathcal{I} \models (\varphi' [\![\psi]\!] \to \varphi' [\![\psi/\chi]\!])[\mathtt{x}/d, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}/\widetilde{d}^n]$$
$$\mathcal{I} \models (\varphi' [\![\psi/\chi]\!] \to \varphi' [\![\psi]\!])[\mathtt{x}/d, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}/\widetilde{d}^n]$$

Тогда

$$\mathcal{I} \models \forall \mathtt{x}\ (\varphi' [\![\psi]\!] \to \varphi' [\![\psi/\chi]\!])[\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}/\widetilde{d}^n]$$
$$\mathcal{I} \models \forall \mathtt{x}\ (\varphi' [\![\psi/\chi]\!] \to \varphi' [\![\psi]\!])[\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}/\widetilde{d}^n]$$

Лекция 5: $\models \forall \mathtt{x}\ (A \to B) \to (\forall \mathtt{x}\ A \to \forall \mathtt{x}\ B)$, а значит:

$$\mathcal{I} \models (\forall \mathtt{x}\ \varphi' [\![\psi]\!] \to \forall \mathtt{x}\ \varphi' [\![\psi/\chi]\!])[\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}/\widetilde{d}^n]$$
$$\mathcal{I} \models (\forall \mathtt{x}\ \varphi' [\![\psi/\chi]\!] \to \forall \mathtt{x}\ \varphi' [\![\psi]\!])[\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}/\widetilde{d}^n]$$

Но это и есть $\forall \mathtt{x}\ \varphi' [\![\psi]\!] \sim \forall \mathtt{x}\ \varphi' [\![\psi/\chi]\!]$ ▼

Равносильные формулы

Используя равносильную замену, можно существенно изменить форму высказывания, полностью сохранив его смысл — выполнимость и невыполнимость в каждой интерпретации на каждом наборе предметов

Например,

$$\forall x\, P(x) \to \exists x\, P(x)$$

$$\sim \qquad \exists x\, \varphi \sim \exists y\, (\varphi\{x/y\})$$

$$\forall x\, P(x) \to \exists y\, P(y)$$

$$\sim \qquad \varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi$$

$$\neg\forall x\, P(x) \vee \exists y\, P(y)$$

$$\sim \qquad \neg\forall x\, \varphi \sim \exists x\, \neg\varphi$$

$$\exists x\, \neg P(x) \vee \exists y\, P(y)$$

$$\sim \qquad \exists x\, \varphi \vee \psi \sim \exists x\, (\varphi \vee \psi); \quad \varphi \vee \psi \sim \psi \vee \varphi$$

$$\exists x\, \exists y\, (\neg P(x) \vee P(y))$$

$$\sim \qquad \varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi$$

$$\exists x\, \exists y\, (P(x) \to P(y))$$