Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 27

Натуральное исчисление высказываний:
основные определения

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2020/2021, весенний семестр

Вступление

Логические исчисления, *в числе прочего*,
применяются для формализации и анализа доказательств,
записанных на естественном языке, и для этого, как правило:

- Выбираются как можно более простые “самоочевидные” аксиомы, и чем меньше аксиом, тем лучше
- В правилах вывода записываются все основные способы построения “естественных” математических доказательств
- Исчисление в целом устраивается так, доказуемость и доказательство формулы соответствовали справедливости утверждения, записанного в виде этой формулы, и доказательству этого утверждения на естественном языке

Исчисления такого вида принято называть

натуральными исчислениями

Для начала обсудим натуральное исчисление высказываний (НИВ),
предназначенное для доказательства
общезначимости формул *логики высказываний*

НИВ: формулы исчисления (секвенции)

Вернёмся к примеру, с которого начинался *блок 26*:

Утверждение. $A \mathbin{\&} B \to A \vee B$

Доказательство. Предположим, что верно $A \mathbin{\&} B$

Тогда, в частности, верно A

Значит, верно и $A \vee B$

Так как в предположении о верности $A \mathbin{\&} B$
обоснована верность $A \vee B$, верно и $A \mathbin{\&} B \to A \vee B$ ▼

Перепишем это доказательство так, чтобы было видно, про какие формулы и в каких предположениях утверждается, что они верны:

Предположения	Что верно
$A \mathbin{\&} B$	$A \mathbin{\&} B$
$A \mathbin{\&} B$	A
$A \mathbin{\&} B$	$A \vee B$
	$A \mathbin{\&} B \to A \vee B$

НИВ: формулы исчисления (секвенции)

Предположения	Что верно
$A \mathbin{\&} B$	$A \mathbin{\&} B$
$A \mathbin{\&} B$	A
$A \mathbin{\&} B$	$A \vee B$
	$A \mathbin{\&} B \to A \vee B$

Множество формул Γ, предполагающихся верными,
и формула φ, утверждающаяся верной в этих предположениях,
в НИВ записываются в виде секвенции

$$\Gamma \vdash \varphi$$

Тогда доказательство из примера можно записать
в виде последовательности из четырёх секвенций:

$$A \mathbin{\&} B \vdash A \mathbin{\&} B, \quad A \mathbin{\&} B \vdash A, \quad A \mathbin{\&} B \vdash A \vee B \quad \vdash A \mathbin{\&} B \to A \vee B$$

Формулами НИВ объявим всевозможные секвенции

Чтобы не путать формулы логики выскаываний и формулы НИВ,
будем для формул НИВ **всегда** использовать термин “секвенция”

НИВ: аксиомы

Семейство всех аксиом НИВ зададим одной *схемой аксиом* $\mathfrak{A}$:

$$\Gamma \cup \{A\} \vdash A$$

В этой схеме используются два параметра:

- A — произвольная формула
- Γ — произвольное множество формул

Содержательное прочтение схемы $\mathfrak{A}$:
Любое текущее предположение считается верным без доказательства

НИВ: правила вывода

В НИВ будут включены 10 правил вывода

В описании этих правил будут использоваться следующие параметры:

- A и B — произвольные формулы
- Γ — произвольное множество формул

Чтобы лучше понимать, почему правила вывода устроены именно так, а не по-иному, следует иметь в виду две их трактовки:

- Техническая трактовка: правила устроены так, чтобы можно было с их помощью **добавлять** (**вводить**) логические операции в формулу правой части секвенции и **удалять** операции из неё
- Содержательная трактовка: в правилах отражены основные принципы построения доказательств, основанные на использовании слов "и", "или", "не" и "если .., то .." ("из .. следует ..")

НИВ: правила вывода

Правило введения конъюнкции:

$$R_{\&}^{+}\colon\ \frac{\Gamma \vdash A,\ \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \,\&\, B}$$

Содержательная трактовка:
Если (*в предположениях* Γ) верно “A” и “B”, то верно “A и B”

Правила удаления конъюнкции:

$$R_{\&}^{-1}\colon\ \frac{\Gamma \vdash A \,\&\, B}{\Gamma \vdash A} \qquad\qquad R_{\&}^{-2}\colon\ \frac{\Gamma \vdash A \,\&\, B}{\Gamma \vdash B}$$

Содержательная трактовка:
Если верно “A и B”, то верно “A”
Если верно “A и B”, то верно “B”

НИВ: правила вывода

Правило введения импликации (правило дедукции):

$$R^{+}_{\rightarrow}:\ \frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}$$

Содержательная трактовка:
Если в предположении "A" верно "B",
то верно утверждение "из A следует B"

Правило удаления импликации (правило отделения; modus ponens):

$$R^{-}_{\rightarrow}:\ \frac{\Gamma \vdash A,\ \Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma \vdash B}$$

Содержательная трактовка:
Если верно "A" и верно утверждение "из A следует B", то верно "B"

НИВ: правила вывода

Правила введения дизъюнкции:

$$R_{\vee}^{+1}: \ \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad\qquad R_{\vee}^{+2}: \ \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

Содержательная трактовка:

Если верно "A", то верно "A или что угодно"

Если верно "B", то верно "что угодно или B"

Правило удаления дизъюнкции (правило разбора случаев):

$$R_{\vee}^{-}: \ \frac{\Gamma \vdash A \vee B, \ \Gamma \cup \{A\} \vdash C, \ \Gamma \cup \{B\} \vdash C}{\Gamma \vdash C}$$

Содержательная трактовка:

Если

- верно "A или B",
- в предположении "A" верно "C" и
- в предположении "B" верно "C",

то верно "C"

НИВ: правила вывода

Правило введения отрицания (правило рассуждения от противного):

$$R_{\neg}^{+}:\ \frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash B,\ \Gamma \cup \{A\} \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$$

Содержательная трактовка:
Если в предположении “A” что-то и верно, и неверно,
то “A” неверно (то есть верно “не A”)

Правило удаления отрицания (правило снятия двойного отрицания):

$$R_{\neg}^{-}:\ \frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$$

Содержательная трактовка:
Если утверждение “неверно A” неверно, то “A” верно

А куда подевались другие полезные законы и правила?