

Общефакультетский курс «Основы кибернетики»

Весенний семестр 2014–2015 уч. г.
группы 320–328, 318

лектор — профессор С. А. Ложкин
(lozhkin@cs.msu.su)

Информационная поддержка курса по адресам:

[http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_\(3-й_поток\)](http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_(3-й_поток))

[http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_\(318,_418_группы\)](http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_(318,_418_группы))

1. Представление функций алгебры логики (ФАЛ) дизъюнктивными нормальными формами (ДНФ) и его «геометрическая» интерпретация. Совершенная ДНФ и критерий единственности ДНФ

Утверждение 1.1. Совершенная ДНФ ФАЛ f , $f \neq 0$, $f \in P_2(n)$, является единственной ДНФ от БП $X(n)$, которая реализует эту ФАЛ, тогда и только тогда, когда во множестве N_f нет соседних наборов.

Следствие. Совершенная ДНФ ФАЛ ℓ , $\bar{\ell}$, является единственной ДНФ этой ФАЛ от БП $X(n)$.

2. Сокращенная ДНФ и способы ее построения

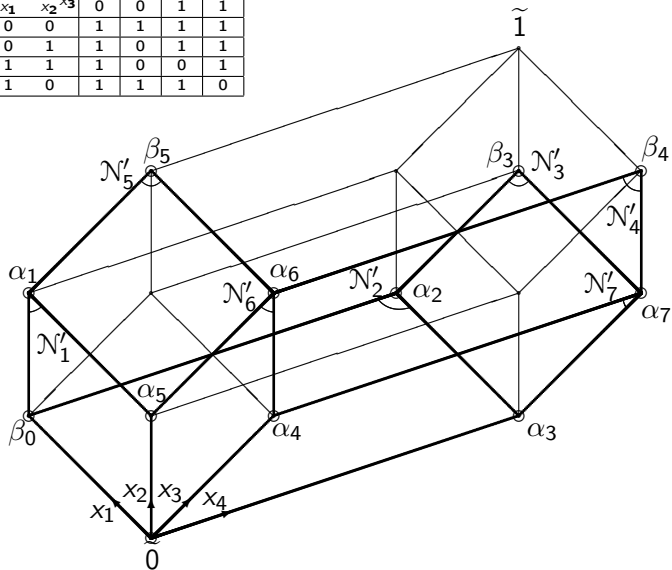
Утверждение 2.1. Пусть \mathfrak{A}' и \mathfrak{A}'' — сокращенные ДНФ ФАЛ f' и f'' соответственно, а ДНФ \mathfrak{A} без поглощений ЭК получается из формулы $\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{A}''$ в результате раскрытия скобок и приведения подобных. Тогда \mathfrak{A} — сокращенная ДНФ ФАЛ $f = f' \cdot f''$.

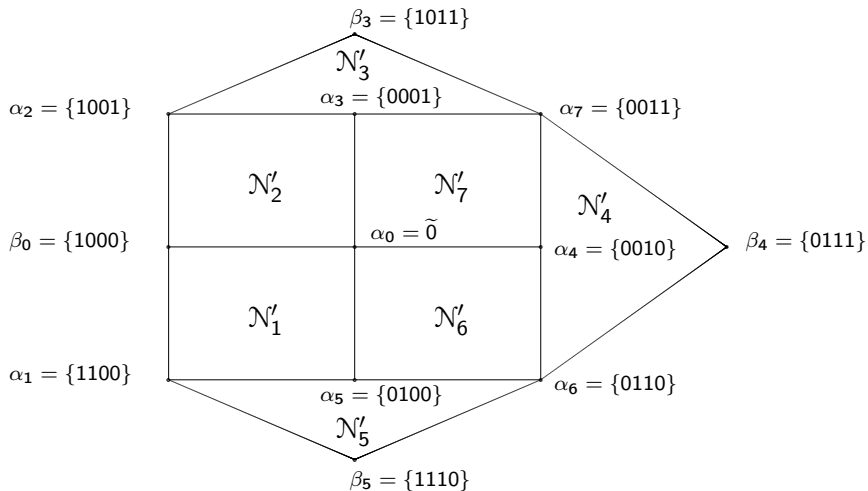
Следствие. Если ДНФ \mathfrak{A} без поглощений ЭК получается из КНФ \mathfrak{B} ФАЛ f в результате раскрытия скобок и приведения подобных, то \mathfrak{A} — сокращенная ДНФ ФАЛ f .

Утверждение 2.2. ДНФ без поглощений ЭК является сокращенной ДНФ тогда и только тогда, когда она не имеет строгих расширений.

Следствие. Из любой ДНФ \mathcal{A} ФАЛ f можно получить сокращенную ДНФ этой ФАЛ в результате построения последовательных строгих расширений и приведения подобных до получения ДНФ без поглощений ЭК, не имеющей строгих расширений.

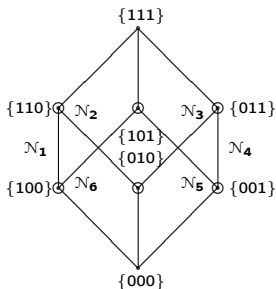
x_1	x_2	x_3	x_4	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	0





$$\mathfrak{A}'_1 = K'_1 \vee K'_3 \vee K'_4 \vee K'_5, \quad \mathfrak{A}'_2 = K'_2 \vee K'_3 \vee K'_4 \vee K'_5.$$

$$g\{x_1, x_2, x_3\} = \underbrace{x_1\bar{x}_3}_{K_1} \vee \underbrace{x_2\bar{x}_3}_{K_2} \vee \underbrace{\bar{x}_1x_2}_{K_3} \vee \underbrace{\bar{x}_1x_3}_{K_4} \vee \underbrace{\bar{x}_2x_3}_{K_5} \vee \underbrace{x_1\bar{x}_2}_{K_6}.$$



$$\bar{N}_g = \{\{000\}, \{111\}\},$$

$$\mathfrak{A}_1 = K_1 \vee K_3 \vee K_5,$$

$$\mathfrak{A}_2 = K_2 \vee K_4 \vee K_6,$$

$$\mathfrak{A}_3 = K_1 \vee K_2 \vee K_4 \vee K_5,$$

$$\mathfrak{A}_4 = K_2 \vee K_3 \vee K_5 \vee K_6,$$

$$\mathfrak{A}_5 = K_3 \vee K_4 \vee K_6 \vee K_1.$$

3. Тупиковые ДНФ, ядро и
ДНФ пересечение тупиковых.
ДНФ Квайна, критерий
вхождения простых
импликант в ДНФ сумма
тупиковых, его локальность.

Утверждение 3.1. Дизъюнктивная нормальная форма $\cap T$ ФАЛ f состоит из тех простых импликант ФАЛ f , которые соответствуют ядровым граням этой ФАЛ.

Следствие. Сокращенная ДНФ ФАЛ f является ее единственной тупиковой ДНФ тогда и только тогда, когда f — ядровая ФАЛ, т.е. все ее максимальные грани входят в ядро.

Утверждение 3.2. Простая импликанта K ФАЛ f входит в ДНФ ΣT тогда и только тогда, когда грань N_K не является регулярной гранью этой ФАЛ.

4. Особенности ДНФ линейных и монотонных функций. Функция покрытия, таблица Квайна и построение всех тупиковых ДНФ.

Утверждение 4.1. Сокращенная ДНФ \mathfrak{A} монотонной ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, является единственной тупиковой ДНФ этой ФАЛ и имеет вид:

$$\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\beta \in N_f^+} K_{\beta}^+(x_1, \dots, x_n).$$

При этом все наборы из N_f^+ являются ядровыми точками ФАЛ f .

Следствие. Монотонная ФАЛ является ядровой ФАЛ.

Утверждение 4.2. Функция покрытия $F(y_1, \dots, y_p)$ матрицы M , $M \in B^{p,s}$, без нулевых столбцов задается КНФ вида:

$$F(y_1, \dots, y_p) = \bigwedge_{j=1}^s \left(\bigvee_{\substack{1 \leq i \leq p \\ M\langle i,j \rangle = 1}} y_i \right).$$

Следствие. В результате раскрытия скобок и приведения подобных из этой КНФ можно получить сокращенную ДНФ ФАЛ $F(y)$, простые импликанты которой взаимно однозначно соответствуют тупиковым покрытиям матрицы M .

5. Градиентный алгоритм и
оценка длины градиентного
покрытия, лемма о
протыкающих наборах.
Использование градиентного
алгоритма для построения
ДНФ

Утверждение 5.1 Пусть для действительного γ , $0 < \gamma \leq 1$, в каждом столбце матрицы M , $M \in B^{p,s}$, имеется не меньше, чем $\gamma \cdot p$, единиц. Тогда покрытие матрицы M , получаемое с помощью градиентного алгоритма, имеет длину не больше, чем

$$\left\lceil \frac{1}{\gamma} \ln^+(\gamma s) \right\rceil + \frac{1}{\gamma},$$

$$\text{где } \ln^+ x = \begin{cases} \ln x, & \text{если } x \geq 1; \\ 0, & \text{если } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Утверждение 5.2 При любых натуральных n и m , $m \leq n$, в кубе B^n всегда найдется подмножество мощности не более, чем $n \cdot 2^m$, протыкающее все грани ранга m .

6. Задача минимизации ДНФ. Поведение функций Шеннона и оценки типичных значений для ранга и длины ДНФ.

Утверждение 6.1 Для любого $n, n \in \mathbb{N}$,
имеют место соотношения

$$\lambda(n) = 2^{n-1}, R(n) = n \cdot 2^{n-1}.$$

Утверждение 6.2 Для почти всех ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, выполняются неравенства

$$\lambda(f) \leq \frac{3}{4} 2^{n-1} (1 + O(n \cdot 2^{-n/2})),$$

$$\lambda(f) \leq \frac{3}{4} n \cdot 2^{n-1} (1 + O(n \cdot 2^{-n/2})).$$

7. Алгоритмические трудности минимизации ДНФ и оценки максимальных значений некоторых связанных с ней параметров. Теорема Ю. И. Журавлева о ДНФ сумма минимальных.

Утверждение 7.1 Число тупиковых (минимальных) ДНФ у ФАЛ f из $P_2(n)$, $n \geq 4$, вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, x_3) \cdot (x_4 \oplus \dots \oplus x_n),$$

где $\overline{N}_g = \{(000), (111)\}$, равно $5^{2^{n-4}}$ (соответственно $2^{2^{n-4}}$).

Следствие

$$\tau(n) \geq 5^{2^{n-4}}, \quad \mu_n(n) \geq 2^{2^{n-4}}.$$

Утверждение 7.2

$$\lambda_{\text{сокр.}}(n) \geq e_1 \frac{3^n}{n},$$

где e_1 — некоторая константа.

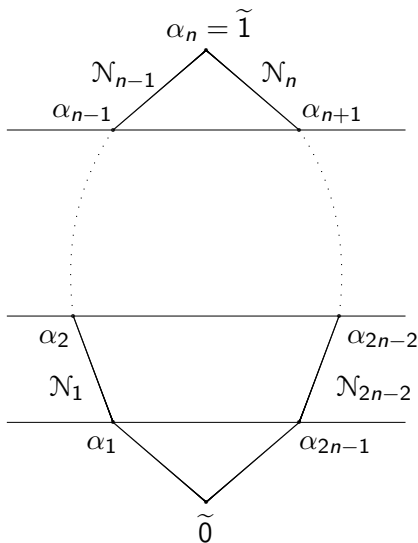


Рис.: цепная ФАЛ длины $(2n - 2)$ в кубе B^n

Утверждение 7.3 При любом $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, в $P_2(n)$ существуют ФАЛ f' и f'' , имеющие общую простую импликанту K , которая входит в ДНФ ΣM одной, но не входит в ДНФ ΣM другой из этих ФАЛ и для которой $S_{n-3}(N_K, f') = S_{n-3}(N_K, f'')$.

Замечание Из теоремы следует, что критерий вхождения ЭК в ДНФ ΣM не имеет такого локального характера, как критерий вхождения ЭК в ДНФ ΣT .

Замечание Известно, что при $n \geq 14$ в $P_2(n)$ имеется цепная ФАЛ четной длины t , $t \geq 2^{n-11} - 4$, на основе которой справедливость теоремы можно установить для окрестности порядка $(\frac{t}{2} - 2)$.

II. Основные классы дискретных управляющих систем, структурные представления схем и оценка их числа

8. Формулы и способы их задания,
эквивалентность формул и
функционалы их сложности.
Оптимизация подобных формул по
глубине

Утверждение 8.1 Для формулы \mathcal{F} , $\mathcal{F} \in \mathcal{U}^\Phi$, выполняются неравенства

$$R(\mathcal{F}) = L_{\&, \vee}(\mathcal{F}) + 1 \leq L(\mathcal{F}) + 1 \leq 2^{D(\mathcal{F})},$$

где $L_{\&, \vee}(\mathcal{F})$ — число ФС $\&$ и \vee в формуле \mathcal{F} .

Следствие

$$D(\mathcal{F}) \geq \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil.$$

Утверждение 8.2 Для любой формулы \mathcal{F} с поднятыми отрицаниями из \mathcal{U}^Φ существует подобная ей формула $\check{\mathcal{F}}$ такая, что

$$D(\check{\mathcal{F}}) \leq \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil + \text{Alt}(\mathcal{F}).$$

Следствие 1. Для любой ЭК или ЭД K существует подобная ей формула \check{K} такая, что

$$D(\check{K}) = \lceil \log(L(K) + 1) \rceil,$$

которая, минимальна по глубине.

Следствие 2. Для любой ДНФ или КНФ \mathfrak{A} существует подобная ей формула $\check{\mathfrak{A}}$ такая, что

$$D(\check{\mathfrak{A}}) \leq \lceil \log(L(\mathfrak{A}) + 1) \rceil + 1.$$

9. Схемы из функциональных элементов и операции их приведения. Оценка числа формул и схем в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$

Утверждение 9.1 Для приведенной СФЭ Σ , $\Sigma \in \mathcal{U}^C$, с одним выходом, выполняются неравенства

$$R(\Sigma) \leq L_{\&, \vee}(\Sigma) + 1 \leq L(\Sigma) + 1 \leq 2^{D(\Sigma)},$$

где $L_{\&, \vee}$ — число ФЭ $\&$ и \vee в Σ .

Утверждение 9.2 Для любых натуральных n , L , D выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |\mathcal{U}^\Phi(L, n)| &\leq (10n)^{L+1}, \\ \|\mathcal{U}^\Phi(L, n)\| &\leq (8n)^{L+1}, \\ \|\mathcal{U}^\Phi[D, n]\| &\leq (8n)^{2^D}. \end{aligned}$$

Следствие Число попарно не квазиизоморфных формул с поднятыми отрицаниями ранга R от БП x_1, \dots, x_n не больше, чем $(12n)^R$.

Утверждение 9.3 Для любых натуральных n и L выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}^C(L, n)\| \leq (8(L + n))^{L+1}.$$

10. Контактные схемы и π -схемы,
моделирование формул и π -схем.
Оценка числа контактных схем и
 π -схем, особенности
функционирования многополюсных
схем

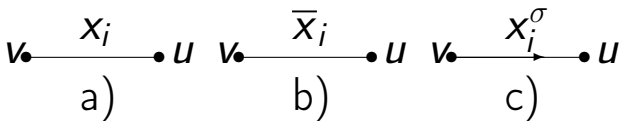


Рис.: типы контактов

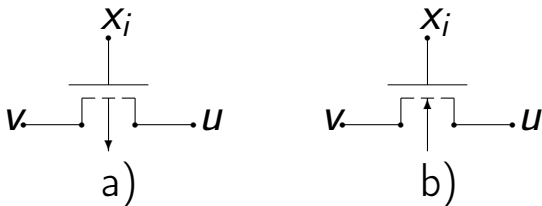
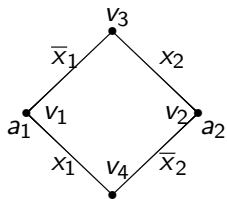
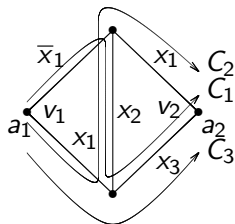


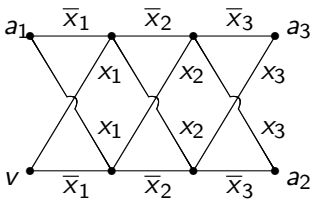
Рис.: физическая интерпретация контактов



a)



b)



c)

Рис.: некоторые КС от БП x_1, x_2, x_3

Утверждение 10.1 Любой π -схеме Σ можно сопоставить эквивалентную ей формулу \mathcal{F} из \mathcal{U}^Φ с поднятыми отрицаниями такую, что $R(\mathcal{F}) = L(\Sigma)$ и обратно.

Утверждение 10.2 При любых натуральных L и n выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}^\pi(L, n)\| \leq (12n)^L.$$

Утверждение 10.3 При любых натуральных L и n выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}^K(L, n)\| \leq (8nL)^L.$$