Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Вне программы 02

Натуральные исчисления

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2024/2025, осенний семестр

Так где же здесь ошибка?
И как выглядит строгое доказательство того, что это ошибка?

Теорема. **Все, кто здесь присутствует, пьют.**

Доказательство.

Здесь присутствует человек, такой что если он пьёт, то все пьют. (*)

Я пью.

Значит, все пьют. ▼

Лемма. **(*)**

Доказательство.

Если все в этой комнате пьют,
то этот человек — любой из присутствующих (например, я).

Иначе один из присутствующих ($\mathbf{x}$) — непьющий.

Пусть A — утверждение «$\mathbf{x}$ пьёт», и B — утверждение «все пьют».

Утверждение A ложно, а значит, утверждение «если A, то B» истинно. ▼

Чтобы строго проанализировать математическое доказательство, избежав демагогии, необходимо строго математически определить понятие математического доказательства

Математическое доказательство — это

- последовательность утверждений, формулирующихся относительно текущего *контекста доказательства*,
- некоторые из которых можно выписать «как данность»,
- а остальные должны получаться из записанных ранее согласно «общепризнанным» правилам построения доказательств

Слова выше специально подобраны так, чтобы было видно, что понятие математического доказательства удобно и естественно формализуется как логическое исчисление

Исчисления такого рода, в которых

- ФИ отвечают утверждениям в доказательстве,
- аксиомы отвечают утверждениям, которые разрешено записывать в любом месте доказательства, и
- правила вывода отвечают разрешённым способам связи утверждений в доказательствах,

обычно называют натуральными исчислениями

Рассмотрим пример $\mathfrak{N}$ натурального исчисления предикатов (натурального исчисления, в котором ФИ основаны на формулах логики предикатов, а правила вывода согласованы с семантикой логических операций в логике предикатов)

Формулой исчисления $\mathfrak{N}$ будем считать секвенцию: запись вида $\Gamma \vdash \varphi$, где Γ — множество формул логики предикатов и φ — формула логики предикатов

Чтобы не путать формулы исчисления и формулы логики предикатов, будем дальше называть «секвенцию» только «секвенцией», но помня, что она является ФИ

Секвенцию $\Gamma \vdash \varphi$ содержательно можно прочитать так: «в предположении о том, что верно всё записанное в Γ, доказанно верно и φ»

Аксиомами $\mathfrak{N}$ объявим все секвенции вида $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$: «любая формула доказанно верна в предположении о том, что она верна»

Добавим в $\mathfrak{N}$ следующие 15 правил вывода ...

Правило введения &: $$\frac{\Gamma \vdash A,\ \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \,\&\, B}$$

Правила удаления &: $$\frac{\Gamma \vdash A \,\&\, B}{\Gamma \vdash A}, \qquad \frac{\Gamma \vdash A \,\&\, B}{\Gamma \vdash B}$$

Правило дедукции (введения $\to$): $$\frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$$

Правило отделения (modus ponens) (удаления $\to$):
$$\frac{\Gamma \vdash A,\ \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B}$$

Правила введения $\vee$: $$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

Правило разбора случаев (удаления $\vee$):
$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B,\ \Gamma \cup \{A\} \vdash C,\ \Gamma \cup \{B\} \vdash C}{\Gamma \vdash C}$$

Правило снятия двойного $\neg$: $$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$$

Правило рассуждения от противного (введения $\neg$):
$$\frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash B,\ \Gamma \cup \{A\} \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$$

Правило перехода к частному (удаления $\forall$): $\dfrac{\Gamma \vdash \forall \mathrm{x}\ A}{\Gamma \vdash A\{\mathrm{x}/t\}}$

(если подстановка $\{\mathrm{x}/t\}$ правильна для A)

Правило введения $\exists$: $\dfrac{\Gamma \vdash A\{\mathrm{x}/t\}}{\Gamma \vdash \exists \mathrm{x}\ A}$

(если подстановка $\{\mathrm{x}/t\}$ правильна для A)

Правило обобщения (введния $\forall$): $\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall \mathrm{x}\ A}$

(если x не является свободной переменной формул из Γ)

Правило удаления $\exists$: $\dfrac{\Gamma \vdash \exists \mathrm{x}\ A,\ \ \Gamma \cup \{A\{\mathrm{x}/\mathrm{y}\}\} \vdash B}{\Gamma \vdash B}$

(если подстановка $\{\mathrm{x}/\mathrm{y}\}$ правильна для A и y не является свободной переменной формул из $\Gamma \cup \{\exists \mathrm{x}\ A, B\}$

Правило монотонности: $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi}$

В натуральном исчислении могут использоваться и другие правила, но оказывается, что этих правил достаточно

Теорема (о корректности и полноте натурального исчисления)

Для любой формулы логики предикатов φ верно:

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \textbf{секвенция } \vdash \varphi \textbf{ доказуема в } \mathfrak{N}$$

Пример

Дано:

1. Все прилежные студенты сдадут этот курс (φ_1)
$$\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{Diligent}(\mathrm{x}) \to \mathrm{Pass}(\mathrm{x}))$$
2. Этот курс слушает хотя бы один прилежный студент (φ_2)
$$\exists \mathrm{x}\,\mathrm{Diligent}(\mathrm{x})$$

Доказательство в $\mathfrak{C}$:

$$\begin{array}{lcl}
\varphi_1, \varphi_2 & \vdash & \exists \mathrm{x}\,\mathrm{Diligent}(\mathrm{x}) \\
\varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) & \vdash & \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) \\
\varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) & \vdash & \forall \mathrm{x}\,(\mathrm{Diligent}(\mathrm{x}) \to \mathrm{Pass}(\mathrm{x})) \\
\varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) & \vdash & \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) \to \mathrm{Pass}(\textbf{Вася}) \\
\varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) & \vdash & \mathrm{Pass}(\textbf{Вася}) \\
\varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) & \vdash & \exists \mathrm{x}\,\mathrm{Pass}(\mathrm{x}) \\
\varphi_1, \varphi_2 & \vdash & \exists \mathrm{x}\,\mathrm{Pass}(\mathrm{x})
\end{array}$$

$$
\begin{array}{lcl}
\varphi_1, \varphi_2 & \vdash & \exists x\ \mathrm{Diligent}(x) \\
\varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) & \vdash & \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) \\
\varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) & \vdash & \forall x\ (\mathrm{Diligent}(x) \to \mathrm{Pass}(x)) \\
\varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) & \vdash & \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) \to \mathrm{Pass}(\textbf{Вася}) \\
\varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) & \vdash & \mathrm{Pass}(\textbf{Вася}) \\
\varphi_1, \varphi_2, \mathrm{Diligent}(\textbf{Вася}) & \vdash & \exists x\ \mathrm{Pass}(x) \\
\varphi_1, \varphi_2 & \vdash & \exists x\ \mathrm{Pass}(x)
\end{array}
$$

Расшифровка этого доказательства:

- Известно, что существует прилежный студент
- Условимся называть этого студента «Вася»: Вася прилежен
- Известно, что всякий прилежный студент сдаст курс
- Значит, и Вася, если прилежен, сдаст этот курс
- Из этого и того, что Вася прилежен, следует, что он сдаст этот курс
- Таким образом, если существует прилежный Вася, то хотя бы один студент сдаст этот курс
- Значит, действительно хотя бы один студент сдаст этот курс