Графы, деревья. Свойства деревьев. Алгоритм построения остовного дерева. Оценка числа деревьев.

Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Графы

(**Неориентированным**) **графом** G называется пара (V, E), где V — непустое конечное множество вершин; E — конечное множество ребер, причем каждому ребру $e \in E$ сопоставлена **неупорядоченная** пара вершин, т. е. $e = (v, w)$, где $v, w \in V$.

Будем рассматривать графы без петель и кратных ребер.

Другими словами, без ребер вида $e = (v, v)$, где $v \in V$, которые называются *петлями*, и без ребер вида $e_1 = (v, w)$ и $e_2 = (v, w)$, где $v, w \in V$ и $e_1 \neq e_2$, которые называются *кратными* ребрами.

Изоморфизм графов

Два графа без петель и кратных ребер

$$G_1 = (V_1, E_1) \text{ и } G_2 = (V_2, E_2)$$

называются **изоморфными**, если найдется взаимно однозначное отображение $\varphi : V_1 \to V_2$, сохраняющее ребра, т. е. для любых вершин $v, w \in V_1$ выполняется соотношение:

$$(v, w) \in E_1 \;\Leftrightarrow\; (\varphi(v), \varphi(w)) \in E_2.$$

Пути в графах

Путем в графе $G = (V, E)$ из вершины v_0 в вершину v_m (или (v_0, v_m)-**путем**) называется последовательность вершин и ребер графа G

$$v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{m-1} e_m v_m,$$

в которой $e_j = (v_{j-1}, v_j) \in E$ для каждого $j = 1, \dots, m$, $m \geqslant 0$.

Для графов без петель и кратных ребер **путь** однозначно определяется последовательностью вершин $v_0 v_1 v_2 \dots v_{m-1} v_m$.

Цепь — путь без повторений ребер.

Простая цепь — цепь без повторений вершин.

Циклы в графах

Замкнутый путь — путь, в котором $m \geqslant 1$ и первая и последняя вершины совпадают.

Цикл — замкнутый путь без повторений ребер.

Простой цикл — цикл, в котором все вершины, кроме последней, различны.

Подграфы

Граф $H = (V', E')$ называется **подграфом** графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$.

Подграф $H = (V, E')$ графа $G = (V, E)$, т. е. подграф, содержащий все вершины графа G, называется его **остовным подграфом**.

Связность

Граф $G = (V, E)$ называется **связным**, если для каждой пары вершин $v, w \in V$ в графе G найдется (v, w)-путь.

Максимальный (по включению) связный подграф графа G называется его **компонентой связности**.

Если G — связный граф, то у графа G ровно одна компонента связности.

Простейшие свойства графов

Предложение.
1. *Если в к связному графу добавить новое ребро, соединяющее какие-то его две вершины, то полученном графе найдется цикл.*

2. *Если в связном графе удалить ребро, принадлежащее какому-то циклу, то останется связный граф.*

Предложение. *Пусть $G = (V, E)$ — граф без петель и кратных ребер с p вершинами, q ребрами и s компонентами связности. Тогда*

1) $s \geqslant p - q$;

2) *если в графе G отсутствуют циклы, то $s = p - q$.*

Деревья

Деревом называется связный граф без циклов.

Теорема (о равносильных определениях дерева). *Пусть* $G = (V, E)$ *— граф с* p *вершинами и* q *ребрами. Тогда следующие утверждения равносильны*:

1) G *— дерево, т. е. связный граф без циклов*;

2) G *— связный граф и* $q = p - 1$;

3) G *— граф без циклов и* $q = p - 1$;

4) G *— граф без циклов, но при соединении любой пары несмежных вершин ребром появляется цикл*;

5) G *— связный граф, но при удалении любого ребра остается несвязный граф*.

Деревья

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$.

Дано: G — связный граф без циклов.
Доказать: G — связный граф и $q = p - 1$.

Обоснование. По условию G связный.

По условию G без циклов, поэтому по соотношению для G между числом вершин p, числом ребер q и числом компонент связности $s = 1$ получаем: $1 = s = p - q$.

Значит, $q = p - 1$.

Деревья

Доказательство. $2 \Rightarrow 3$.

Дано: G — связный граф и $q = p - 1$.
Доказать: G — граф без циклов и $q = p - 1$.

Обоснование. По условию $q = p - 1$.

Если в связном графе G найдется цикл, то удалим из G некоторое ребро e из цикла. Останется связный граф G'. По соотношению для G' между числом вершин p, числом ребер $q - 1$ и числом компонент связности $s' = 1$ получаем: $s' \geqslant p - (q - 1) = (p - q) + 1 = 2$ — противоречие.

Значит, G без циклов.

Деревья

Доказательство. $3 \Rightarrow 4$.

Дано: G — граф без циклов и $q = p - 1$.
Доказать: G — граф без циклов, но при соединении любой пары несмежных вершин ребром появляется цикл.

Обоснование. По условию G без циклов.

По соотношению для G между числом вершин p, числом ребер q и числом компонент связности s получаем:
$s = p - q = 1$, т. е. G связный.

Значит, при соединении в G любой пары несмежных вершин ребром появится цикл.

Деревья

Доказательство. $4 \Rightarrow 5$.

Дано: G — граф без циклов, но при соединении любой пары несмежных вершин ребром появляется цикл.
Доказать: G — связный граф, но при удалении любого ребра остается несвязный граф.

Обоснование. Если G не связный, то при соединении двух вершин из разных компонент связности цикл не появится. Значит, G связный.

Пусть при удалении из G некоторого ребра e остался связный граф G'. Тогда G получается из связного графа G' добавлением нового ребра e. Поэтому в G найдется цикл — противоречие.

Значит, при удалении из G любого ребра останется несвязный граф.

Деревья

Доказательство. $5 \Rightarrow 1$.

Дано: G — связный граф, но при удалении любого ребра остается несвязный граф.
Доказать: G — связный граф без циклов.

Обоснование. По условию G связный.

Если в G найдется цикл, то удалим из G любое ребро из цикла. Останется связный граф —противоречие.

Значит, G без циклов.

$\square$

Остовные деревья

Остовным деревом связного графа называется его остовный подграф, являющийся деревом.

Теорема. *В любом связном графе найдется остовное дерево.*

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ — связный граф, $|V| = p$.

Покажем, что в графе G можно пошагово построить остовное дерево.

Остовные деревья

Доказательство. Пусть H — какой-то остовный связный подграф графа G, например, сам граф G.

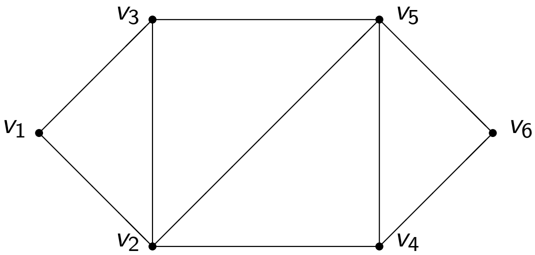
1) Если в подграфе H нет циклов, то он является остовным деревом графа G.

2) Иначе выберем в графе G произвольное ребро $e \in E$, принадлежащее какому-то циклу подграфа H. Повторим рассуждения 1–2 для остовного подграфа, получающегося из H удалением ребра e, который также является связным.

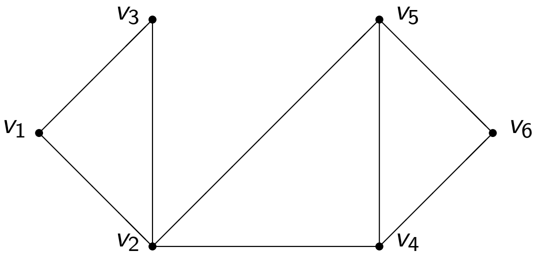
Т. к. на каждом шаге разрываем хотя бы один цикл графа G, а циклов конечное число, то через конечное число шагов получим подграф без циклов. Он является остовным деревом D графа G.

Построение остовного дерева

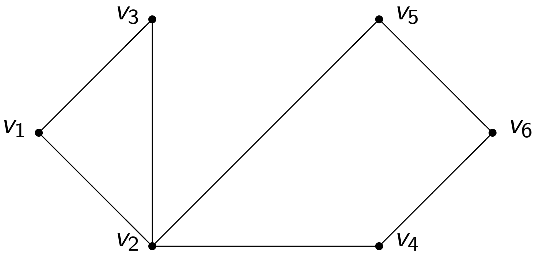
G :



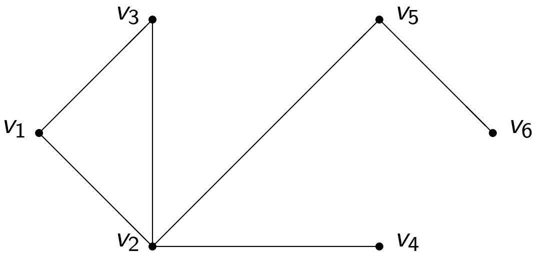
Построение остовного дерева



Построение остовного дерева

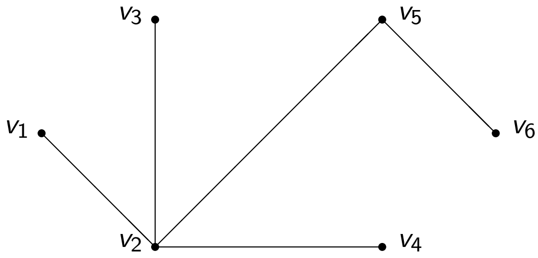


Построение остовного дерева



Построение остовного дерева

D :



Обход в глубину в дереве

Пусть $D = (V, E)$ дерево и $v_0 \in V$. **Обходом в глубину** из вершины v_0 назовем следующий обход дерева D:

1) по непройденному ребру $(v_0, v_i) \in E$ перейти в непройденное поддерево D_i, обойти его в глубину из вершины v_i и по ребру (v_0, v_i) вернуться в вершину v_0;

2) если пройдены все поддеревья, то закончить обход.

Оценка числа деревьев

Теорема. *Для числа $\delta(q)$ неизоморфных деревьев с q ребрами справедлива оценка:*

$$\delta(q) \leqslant 4^q.$$

Доказательство. Пусть $D = (V, E)$ — дерево с q ребрами и $v_0 \in V$. Обойдем дерево D в глубину из вершины $v_0 \in V$. При таком обходе по каждому ребру пройдем два раза: первый раз при переходе в соответствующее поддерево, второй раз при возвращении из него.

Оценка числа деревьев

Доказательство. По этому обходу построим код дерева D — набор $k(D)$ из нулей и единиц длины $2q$. Сначала этот код не заполнен. При проходе по очередному ребру заполняем в коде $k(D)$ первый незаполненный разряд по следующим правилам:

1) если по ребру переходим в поддерево, то в код $k(D)$ пишем ноль;

2) если по ребру возвращаемся из поддерева, то в код $k(D)$ пишем единицу.

Тогда различным деревьям соответствуют разные коды.

Поэтому $\delta(q)$ не превосходит числа наборов из нулей и единиц длины $2q$, т. е.

$$\delta(q) \leqslant 2^{2q} = 4^q.$$

$\square$

Литература

1. Алексеев В.Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра-М, 2012. С. 26–32.