Лекция 2. Функции алгебры логики. Таблицы истинности. Существенные и несущественные переменные. Формулы. Двойственность.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте https://mk.cs.msu.ru

Функция алгебры логики

Пусть $E_2 = \{0, 1\}$. **Функцией алгебры логики** называем произвольное отображение из E_2^n в E_2, $n \geqslant 1$.

Т. е. если $f : E_2^n \to E_2$, то f — *n-местная функция алгебры логики*.

При этом если $f = f(x_1, \dots, x_n)$, то говорим, что f — функция n переменных $x_1, \dots, x_n$.

Иногда константы $0, 1$ будем считать 0-*местными функциями алгебры логики* (т. е. функциями без переменных).

Функции алгебры логики

Множество всех функций алгебры логики, зависящих от n переменных, обозначим $P_2^{(n)}$.

Множество всех функций алгебры логики обозначаем P_2, т. е. $P_2 = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} P_2^{(n)}$.

Таблица истинности

Как можно задавать функции алгебры логики?

1. Таблицы истинности (таблицы значений). Упорядочим все наборы из множества E_2^n в **лексико-графическом** порядке и сопоставим каждому набору значение функции $f \in P_2^{(n)}$ на нем:

x_1	$\dots$	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$
0	$\dots$	0	0	$f(0, \dots, 0, 0)$
0	$\dots$	0	1	$f(0, \dots, 0, 1)$
	$\dots$			
1	$\dots$	1	0	$f(1, \dots, 1, 0)$
1	$\dots$	1	1	$f(1, \dots, 1, 1)$

Вектор значений

2. Если считать, что все наборы из E_2^n упорядочены лексико-графически, то функция $f \in P_2^{(n)}$ однозначно задается правым столбцом ее таблицы истинности. Назовем его **вектором значений** функции f и обозначим α_f. Другими словами,

$$\alpha_f = (f(\alpha_0), f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_{2^n-1})) \in E_2^{2^n},$$

где наборы $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n-1}$ из E_2^n перечислены в лексико-графическом порядке.

Функции алгебры логики

Некоторые важные функции алгебры логики имеют собственные названия.

$n = 0$: **константы** 0, 1.

$n = 1$:

x	x	$\bar{x}$
0	0	1
1	1	0

x — **тождественно равная** x;
$\bar{x}$ — **отрицание** x.

Функции алгебры логики

$n = 2$:

x_1	x_2	$x_1 \& x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \to x_2$	$x_1 \sim x_2$	x_1 / x_2	$x_1 \downarrow x_2$
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0

Слева направо по порядку: **конъюнкция**, **дизъюнкция**, **сложение по модулю** 2, **импликация**, **эквивалентность**, **штрих Шеффера**, **стрелка Пирса**.

Конъюнкцию & будем также обозначать точкой $\cdot$ или знак операции пропускать.

Знаки $\bar{\ }$, &, $\cdot$, $\vee$, $\oplus$, $\to$, $\sim$, $/$, $\downarrow$ будем называть **связками**.

Функции алгебры логики

$n = 3$:

x_1	x_2	x_3	$m(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Функция $m(x_1, x_2, x_3)$ называется **функцией голосования**, или **медианой**.

Отметим, что функция $m(x_1, x_2, x_3)$ на наборе $\alpha \in E_2^3$ равна 0, если в наборе α больше нулей, чем единиц, и равна 1, если в наборе α больше единиц, чем нулей.

Существенная переменная

Введем понятие существенной переменной функции.

Переменная x_i называется **существенной** для функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$, если найдутся такие элементы $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \in E_2$, что

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n) \neq f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Другими словами, переменная x_i — существенна для функции $f \in P_2$, если найдутся два соседних по i-му разряду набора, на которых функция f принимает различные значения.

Т. е. переменная x_i — существенна для функции $f \in P_2$, если все другие переменные можно так определить, что полученная функция одной переменной x_i принимает два значения: и 0, и 1 (т. е. не является константой).

Несущественная переменная

Переменная, не являющаяся существенной, называется **несущественной**, или **фиктивной**.

Как правило, мы будем рассматривать функции с точностью до несущественных переменных.

Т. е. будем считать, что несущественные переменные можно добавлять и убирать.

Существенные переменные

Пример. Добавим к функции $f(x)$ несущественную переменную y:

x	$f(x)$
0	0
1	1

,

x	y	$g(x,y)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Получаем функцию $g(x,y)$.

Существенные переменные

Пример (продолжение). Проверим, что для функции $g(x, y)$ переменная y является несущественной:

x	y	$g(x, y)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Действительно,

1) если $x = 0$, то $g(0, 0) = g(0, 1) = 0$;
2) если $x = 1$, то $g(1, 0) = g(1, 1) = 1$.

Переменная y — несущественна для функции g, а значит, ее можно убрать.

Существенные переменные

Пример (продолжение). Уберем из функции $g(x, y)$ несущественную переменную y:

x	y	$g(x, y)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

,

x	$f(x)$
0	0
1	1

Получаем функцию $f(x)$.

Равенство функций алгебры логики

Равенство функций рассматриваем с точностью до несущественных переменных.

Функции $f \in P_2$ и $g \in P_2$ назовем **равными**, если добавляя или убирая несущественные переменные из них можно получить совпадающие функции, т. е. функции, зависящие от одних и тех же переменных и при любом наборе значений этих переменных принимающие одно и то же значение.

Пример. Функции $f(x) = x$ и $g(x, y) = x$ равны.

Переименование переменных

Пример. Рассмотрим функции $f(x, y) = x$ и $g(x, y) = y$.

Функции f и g не равны:

x	y	$f(x, y)$	$g(x, y)$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	1

Например, $f(0, 1) \neq g(0, 1)$.

Но можно заметить, что функция g получается из функции f переименованием переменных.

Конгруэнтность функций алгебры логики

Функции $f \in P_2$ и $g \in P_2$ называются **конгруэнтными**, если переменные одной из них можно так переобозначить (при этом разные переменные переобозначаются по-разному), что получится функция, равная другой.

Пример. Функции $f(x, y) = x$ и $g(x, y) = y$ конгруэнтны.

Число функций алгебры логики n переменных

Предложение 2.1. *При $n \geqslant 1$ верно равенство:* $|P_2^{(n)}| = 2^{2^n}$.

Доказательство.
Любую функцию $f \in P_2^{(n)}$ можно представить таблицей истинности, в которой 2^n строк.
В каждой строке (вне зависимости от других строк) находится 0 или 1 (значение f на соответствующем наборе).
Функций в $P_2^{(n)}$ столько же, сколько таких таблиц истинности.
Следовательно, $|P_2^{(n)}| = 2^{2^n}$.

$\square$

Формула

3. Функции алгебры логики можно задавать **формулами**.

Считаем, что задано некоторое счетно бесконечное множество переменных $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$.

Пусть $A \subseteq P_2$, причем каждая функция из A имеет свое, отличное от других функций, обозначение.

Определим **формулы** над множеством A.

Формула

Формула над множеством A определяется по индукции.

Базис индукции. Если f — обозначение m-местной функции из A и $x_1, \ldots, x_m$ — переменные (из X), причем не обязательно различные, то выражение $f(x_1, \ldots, x_m)$ — формула.

Индуктивный переход. Если f — обозначение m-местной функции из A и $F_1, \ldots, F_m$ — уже построенные формулы или переменные (не обязательно различные), то выражение $f(F_1, \ldots, F_m)$ — формула.

Формула

Отметим, что если множество A содержит тождественную функцию, то базис индукции можно записать проще.

Базис индукции. Если x_i — переменная (из X), то выражение x_i — формула.

Формулы со связками

Укажем особенности при построении формул, если A содержит функции со связками.

При построении формулы над A в таком случае записываем выражения следующим образом:

1) если $f = \bar{x}$, то $F = \overline{F_1}$;

2) если $f = x \circ y$, где $\circ \in \{\&, \cdot, \vee, \oplus, \rightarrow, \sim, /, \downarrow\}$, то

$$F = (F_1) \circ (F_2),$$

причем если F_i — переменная, то ее в скобки не заключаем, $i = 1, 2$.

Кроме того, в построенной формуле убираем некоторые скобки, считая, что конъюнкция имеет самый высокий приоритет среди двуместных связок.

Формулы

Пример. Пусть

$$A = \{0, 1, x, \bar{x}, x \cdot y, x \vee y, x \oplus y, x \to y, x \sim y, x/y, x \downarrow y\} \subseteq P_2.$$

Тогда

$F_1 = x$ и $F_2 = y$	формулы, построенные по базису индукции из переменных x и y;
$F_3 = x \oplus y$	формула, построенная по индуктивному переходу из функции $x \oplus y \in A$ и формул F_1 и F_2;
$F_4 = (x \oplus y) \cdot x$	формула, построенная по индуктивному переходу из функции $x \cdot y \in A$ и формул F_3 и F_1;
$F_5 = \overline{(x \oplus y) \cdot x}$	формула, построенная по индуктивному переходу из функции $\bar{x} \in A$ и формулы F_4;
	и т. д.

Формулы

Пусть F — формула над множеством A, $A \subseteq P_2$.

Если в формуле F встречаются только переменные $x_1, \ldots, x_n$ (но не обязательно все), то будем записывать $F(x_1, \ldots, x_n)$.

Если при построении формулы F применялись только функции $g_1, \ldots, g_t \in A$ (но не обязательно все), то будем записывать $F[g_1, \ldots, g_t]$.

Функция, определяемая формулой

Пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ — формула над множеством A, $A \subseteq P_2$.

Тогда формула F задает некоторую **функцию** $f_F \in P_2$ переменных $x_1, \ldots, x_n$ (возможно, зависящую не от всех переменных существенно).

Функция, определяемая формулой

Значение функции $f_F(x_1, \ldots, x_n)$ на наборе $\alpha \in E_2^n$ определяется по индукции.

Базис индукции. Если $F = x_i$, где x_i — переменная, то

$$f_F(\alpha) = \alpha_i.$$

Индуктивный переход. Если $F = f(F_1, \ldots, F_m)$, где f — обозначение m-местной функции из A и $F_1, \ldots, F_m$ — формулы или переменные, то

$$f_F(\alpha) = f(f_{F_1}(\alpha), \ldots, f_{F_m}(\alpha)).$$

При этом пользуемся тем, что f обозначает какую-то функцию из A.

Функция, определяемая формулой

Другими словами:

1) если $F = x_i$, где x_i — переменная, то $f_F(x_i) = x_i$, т. е. f_F — функция, тождественно равная переменной x_i;

2) если $F = f(F_1, \ldots, F_m)$, где f — обозначение m-местной функции из A и $F_1, \ldots, F_m$ — формулы или переменные, то

$$f_F(x_1, \ldots, x_n) = f(f_{F_1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_{F_m}(x_1, \ldots, x_n)),$$

т. е. f_F является соответствующей композицией функций $f \in A$ и $f_{F_1}, \ldots, f_{F_m}$.

Функции, определяемые формулами

Пример. Рассмотрим формулу $F_5 = \overline{(x \oplus y) \cdot x}$ из предыдущего примера. Тогда:

x	y	$f_{F_3} = x \oplus y$	$f_{F_4} = (x \oplus y) \cdot x$	$f_{F_5} = \overline{(x \oplus y) \cdot x}$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1

Функция f_{F_5}, определяемая формулой F_5, записана в самом правом столбце.

Эквивалентные формулы

Формулы F_1 и F_2 называются **эквивалентными**, если они определяют равные функции, т. е. функции f_{F_1} и f_{F_2} равны.

Т. е. формулы F_1 и F_2 — **эквивалентны**, если на любом наборе значений переменных, входящих в формулы F_1 и F_2, функции f_{F_1} и f_{F_2} принимают одинаковые значения.

Обозначение эквивалентных формул: $F_1 = F_2$; при этом равенство $F_1 = F_2$ называется **тождеством**.

Тождества алгебры логики

Верны следующие тождества:

1) коммутативность связок $\cdot, \vee, \oplus, \sim, /, \downarrow$;

2) ассоциативность связок $\cdot, \vee, \oplus$;

3) дистрибутивность видов

$$
\begin{gathered}
(x \vee y) \cdot z = x \cdot z \vee y \cdot z; \\
(x \cdot y) \vee z = (x \vee z) \cdot (y \vee z); \\
(x \oplus y) \cdot z = x \cdot z \oplus y \cdot z.
\end{gathered}
$$

Тождества алгебры логики

Тождества с одной переменной и с константами:

$$
\begin{array}{lllll}
x\cdot x=x, & x\vee x=x, & x\oplus x=0, & x\to x=1; & \\
x\cdot\bar{x}=0, & x\vee\bar{x}=1, & x\oplus\bar{x}=1, & \bar{x}\to x=x; & \\
x\cdot 0=0, & x\vee 0=x, & x\oplus 0=x, & 0\to x=1, & x\to 0=\bar{x}; \\
x\cdot 1=x, & x\vee 1=1, & x\oplus 1=\bar{x}, & x\to 1=1, & 1\to x=x.
\end{array}
$$

Выражение одних связок через другие:

$$
\begin{array}{ll}
x/y=\overline{x\cdot y}, & x\downarrow y=\overline{x\vee y}; \\
x\sim y=\overline{x\oplus y}, & x\sim y=(x\to y)(y\to x); \\
x\sim y=\bar{x}\bar{y}\vee xy, & x\sim y=(\bar{x}\vee y)(x\vee\bar{y}); \\
x\oplus y=\bar{x}y\vee x\bar{y}, & x\oplus y=(\bar{x}\vee\bar{y})(x\vee y); \\
x\to y=\bar{x}\vee y, & x\to y=\overline{x\bar{y}}.
\end{array}
$$

Тождества алгебры логики

Логические правила:

$x \cdot \bar{x} = 0$	правило противоречия;
$x \vee \bar{x} = 1$	правило исключенного третьего;
$\bar{\bar{x}} = x$	правило снятия двойного отрицания;
$\overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}$ и $\overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$	правила де Моргана.

Доказываются эти тождества построением функций, определяемых формулами в левой и правой частях равенства.

Правила тождественной замены

Пусть F и G — формулы, причем

$$F = f(F_1, \dots, F_m), \quad G = f(G_1, \dots, G_m),$$

где f — обозначение m-местной функции, а $F_1, \dots, F_m$ и $G_1, \dots, G_m$ — формулы.

Тогда если $F_1 = G_1, \dots, F_m = G_m$, то $F = G$.

Правила тождественной замены

Пусть F формула, причем

$$F = f(F_1, \ldots, F_m),$$

где f — обозначение m-местной функции, а $F_1, \ldots, F_m$ — формулы.

Пусть $H(y_1, \ldots, y_m)$ — формула, определяющая функцию f, и

$$G = H(F_1, \ldots, F_m),$$

т. е. в формулу H вместо переменной y_i подставляем формулу F_i для всех $i = 1, \ldots, m$.

Тогда $F = G$.

Эквивалентные преобразования формул

Пользуясь правилами тождественной замены, можно от одних представлений функций алгебры логики переходить к другим их представлениям.

При этом говорят, что выполняют эквивалентные преобразования формул.

Эквивалентные преобразования формул

Пример. Рассмотрим формулу $F_1 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \cdot (x_1 \vee x_2)$.

Применим тождество $\bar{x} \vee \bar{y} = \overline{x \cdot y}$:

$$F_1 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \cdot (x_1 \vee x_2) \quad = \quad (\overline{x_1 \cdot x_2}) \cdot (x_1 \vee x_2) = F_2.$$

Далее применим тождество $x \cdot y = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$:

$$F_2 = \overline{(x_1 \cdot x_2)} \cdot (x_1 \vee x_2) \quad = \quad \overline{\overline{\overline{(x_1 \cdot x_2)}} \vee \overline{(x_1 \vee x_2)}} = F_3.$$

Затем применим тождество $\bar{\bar{x}} = x$:

$$F_3 = \overline{\overline{\overline{(x_1 \cdot x_2)}} \vee \overline{(x_1 \vee x_2)}} \quad = \quad \overline{(x_1 \cdot x_2) \vee \overline{(x_1 \vee x_2)}} = F_4.$$

Теперь применим тождество $\overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$:

$$F_4 = \overline{(x_1 \cdot x_2) \vee \overline{(x_1 \vee x_2)}} \quad = \quad \overline{(x_1 \cdot x_2) \vee (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2)} = F_5.$$

При этом $F_1 = F_2$, $F_2 = F_3$, $F_3 = F_4$, $F_4 = F_5$, т. е. все эти формулы задают одну и ту же функцию $f(x_1, x_2) \in P_2$.

Двойственная функция

Функция $f^*(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ называется **двойственной** к функции $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$, если

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}.$$

Отметим, что для любой функции $f \in P_2$ верно $(f^*)^* = f$.

Следовательно, все функции алгебры логики можно разбить на пары двойственных друг к другу функций.

Пары двойственных функций

Найдем некоторые пары двойственных друг к другу функций:

$f \in P_2$	$f^* \in P_2$	названия функций
0	$\overline{0} = 1$	константы 0 и 1
x $\overline{x}$	$\overline{\overline{x}} = x$ $\overline{\overline{\overline{x}}} = \overline{x}$	тождественная функция отрицание
$x \cdot y$ $x \oplus y$ x / y	$\overline{\overline{x} \cdot \overline{y}} = x \vee y$ $\overline{\overline{x} \oplus \overline{y}} = x \sim y$ $\overline{\overline{x} / \overline{y}} = x \downarrow y$	конъюнкция и дизъюнкция сложение по mod 2 и эквивалентность штрих Шеффера и стрелка Пирса

Двойственные формулы

Рассмотрим произвольную формулу $F = F[g_1, \ldots, g_t]$ над некоторым множеством A, где $A \subseteq P_2$.

Если в формуле F обозначение каждой функции $g_j \in A$ заменить на обозначение функции $g_j^* \in P_2$, то получим новую формулу, которую назовем **двойственной формулой** к формуле F и обозначим F^*.

Двойственные формулы

Пример. Рассмотрим формулу $F_5 = \overline{(x \oplus y) \cdot x}$ из одного из предыдущих примеров. Тогда:

$$F_5^* = \overline{(x \sim y) \vee x}.$$

Принцип двойственности

Теорема 2.1. *Если формула F над некоторым множеством A, где $A \subseteq P_2$, определяет функцию $f \in P_2$, то двойственная к ней формула F^* определяет функцию $f^* \in P_2$, двойственную к функции f.*

Доказательство. Индукция по построению формулы F.

Базис индукции: $F = x$, где x — переменная, верен.

Принцип двойственности

Индуктивный переход: пусть

$$F = f_0(F_1, \ldots, F_m),$$

где $f_0 \in A$ и $F_1, \ldots, F_m$ — некоторые формулы над A.

Если формула F_i определяет функцию $f_i \in P_2$, зависящую от переменных $x_1, \ldots, x_n$ (возможно, не от всех существенно), $i = 1, \ldots, m$, то формула F определяет функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Принцип двойственности

Далее:

$$F^* = f_0^*(F_1^*, \ldots, F_m^*).$$

По предположению индукции формула F_i^* определяет функцию $f_i^* \in P_2$.

Значит, формула F^* определяет функцию $h(x_1, \ldots, x_n)$:

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f_0^*(f_1^*(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m^*(x_1, \ldots, x_n)).$$

Тогда:

$$\begin{aligned}
h(x_1, \ldots, x_n) &= f_0^*(f_1^*(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m^*(x_1, \ldots, x_n)) = \\
&= f_0^*(\overline{f_1(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}, \ldots, \overline{f_m(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}) = \\
&= \overline{f_0(\overline{\overline{f_1(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}}, \ldots, \overline{\overline{f_m(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}})} = \\
&= \overline{f_0(f_1(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n), \ldots, f_m(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n))} = \\
&= \overline{f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)} = f^*(x_1, \ldots, x_n).
\end{aligned}$$

Следовательно, $h = f^*$.

Литература к лекции

1. Алексеев В. Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра-М, 2012. С. 4–8.

2. Марченков С. С. Основы теории булевых функций. М.: Физматлит, 2014. С. 11–20.

3. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001. С. 9–23.

4. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004. Гл. I 1.17, 1.19, 1.20, 1.28, 1.30, 1.31, 1.33, 1.34, 1.35.