

Основы кибернетики

Автор: профессор С. А. Ложкин

Лектор: профессор Д. С. Романов

Часть 2. Основные классы управляющих систем.

Оценка числа схем, их структурные
представления. Эквивалентные преобразования
управляющих систем

§ 1. Основные понятия из теории графов, сетей, схем. Свойства матриц достижимости сетей

Понятие графа, которое обобщает понятие бинарного отношения (см. §1 главы 1), часто используется для описания структурных моделей, связанных с вычислениями, представлениями или реализациями дискретных функций. Напомним основные понятия и обозначения из теории графов, сетей и схем, а также сформулируем некоторые известные результаты.

Упорядоченные (неупорядоченные) пары вершин называются *ориентированными ребрами* или, иначе, *дугами* (соответственно *неориентированными ребрами*), одинаковые пары — *параллельными ребрами* (*дугами*), дуги, отличающиеся порядком вершин, — *противоположными дугами*, а пары из совпадающих вершин — *петлями*. Граф из ориентированных (неориентированных) ребер считается *ориентированным* (соответственно *неориентированным*). Заметим, что бинарное отношение представляет собой ориентированный граф без параллельных дуг. При этом симметричное антирефлексивное отношение можно рассматривать как неориентированный граф без параллельных ребер и петель.

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ 🔍 ↺

Граф $G' = (V', E')$ называется *подграфом* графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$. При этом G' считается *подграфом графа G , натянутым на множество вершин V'* , если E' включает в себя все входящие в E пары вершин из V' . Подграф, содержащий все вершины исходного графа, называется его *остовным подграфом*. Легко видеть, что подграф всегда можно получить из исходного графа в результате (многократного) применения операций *удаления ребра* или *удаления вершины*. При этом удаление вершины, как обычно, подразумевает удаление всех инцидентных ей ребер.

При определении понятий, связанных с «движениями» по графу, ограничимся случаем ориентированных графов, считая, как обычно, что неориентированное ребро эквивалентно двум противоположным дугам, связанным с той же парой вершин. Последовательность C , состоящая из ребер $e_1, e_2, \dots, e_n$, где $e_i = (v_i, v_{i+1}) \in E(G)$ при всех i , $i \in [1, n]$, называется $(v_1 - v_{n+1})$ -*путем* графа G . При этом вершина v_1 (v_{n+1}) считается *начальной* (соответственно *конечной*) вершиной этого пути, вершины $v_2, \dots, v_n$ — его *внутренними* вершинами, а число n — его *длиной*. Если все ребра пути различны (как элементы соответствующего сочетания), то он называется *цепью*, а если, кроме того, различны все его вершины, то — *простой цепью*. Если начальная и конечная вершины пути (цепи) C совпадают, то C считается *замкнутым путем* (соответственно *циклом*). Цикл, в котором все вершины, кроме начальной и конечной, различны, называется *простым циклом*.

Будем говорить, что *вершина u достижима из вершины v в графе G* , где $u, v \in V(G)$, если $u = v$ или в G существует $(v - u)$ -цепь. Заметим, что отношение достижимости вершин графа G является рефлексивным и транзитивным, а если G — неориентированный граф, то и симметричным.

Следовательно, множество вершин графа G распадается на классы эквивалентности по отношению их достижимости в графе $\hat{G}$, который получается из графа G заменой каждой дуги на соответствующее неориентированное ребро ($G = \hat{G}$, если G — неориентированный граф). При этом подграф графа G , натянутый на каждый такой класс вершин, называется *связной компонентой* графа G , а множество всех его связных компонент обозначается через $c(G)$. Граф G называется *связным*, если $|c(G)| = 1$.

Напомним, что

$$|E(G)| - |V(G)| + |c(G)| \geq 0 \quad (1.2)$$

и что левая часть (1.2) называется *цикломатическим числом* графа G . Напомним также, что это число равно максимальному числу линейно независимых относительно операции симметрической разности¹ остовных подграфов графа G , состоящих из одного простого цикла и изолированных вершин.

¹Под симметрической разностью графов G_1 и G_2 понимается граф G , для которого

$$\begin{aligned} V(G) &= V(G_1) \cup V(G_2), \\ E(G) &= (E(G_1) \cup E(G_2)) \setminus (E(G_1) \cap E(G_2)). \end{aligned}$$

Множество S , которое состоит из ребер графа $G = (V, E)$ и обладает тем свойством, что вершина u , $u \in V$, достижима из вершины v , $v \in V$, в графе G , но не достижима из нее в графе $(V, E \setminus S)$, называется $(u|v)$ -сечением графа G . Легко видеть, что любая $(u - v)$ -цепь графа G имеет хотя бы одно общее ребро с любым $(u|v)$ -сечением этого графа. Сечение, которое не имеет собственных подмножеств, являющихся сечением, называется *тупиковым*.

Неориентированный (ориентированный) граф, не имеющий циклов (соответственно ориентированных циклов), называется *ациклическим*. Заметим, что в ориентированном ациклическом графе G всегда есть как стоки, так и истоки. При этом для каждой его вершины v можно определить ее *глубину* (соответственно *исходящую глубину*), как максимальную длину $(u - v)$ -путей (соответственно $(v - u)$ -путей) графа G , где u — один из истоков (соответственно стоков) G . Легко видеть, что отношение достижимости является отношением частичного порядка на множестве вершин ориентированного ациклического графа и обратно.

Неориентированный связный ациклический граф называется *деревом*. Для дерева G , как известно, имеет место равенство

$$|E(G)| = |V(G)| - 1. \quad (1.3)$$

Дерево с выделенной вершиной (*корнем*) называется *корневым деревом*, а все отличные от корня вершины степени 1 этого дерева считаются его *листьями*.

Ориентированный граф, который получается из корневого дерева заменой каждого его неориентированного ребра на соответствующую дугу, «направленную» к корню, называется *ориентированным деревом*.

Дерево (ориентированное дерево) $\mathcal{D}$, являющееся остовным подграфом графа G , называется его *остовным поддеревом*, а дерево $\mathcal{D}'$, получающееся из $\mathcal{D}$ в результате присоединения «конечной» вершины любого не вошедшего в $\mathcal{D}$ ребра графа G к той же вершине $\mathcal{D}$, которая была его конечной вершиной в G , и объявления начальной вершины этого ребра листом — *остовным наддеревом* графа G . Очевидно, что при этом граф G может быть получен из дерева $\mathcal{D}'$ в результате присоединения некоторых вершин степени 1 (листьев) к другим его вершинам. Заметим, что любой неориентированный связный граф, а также любой ориентированный ациклический граф с 1 стоком всегда имеют остовные поддеревья и наддеревья соответствующего типа.

Граф, вершинам и (или) ребрам которого сопоставлены определенные символы (пометки), считается *помеченным графом*. Примером такого графа является, в частности, корневое дерево. Другим примером помеченного графа является ациклический граф с *монотонной нумерацией вершин*, когда для любой дуги номер вершины, из которой она исходит, больше номера вершины, в которую эта дуга входит. Ориентированный граф G называется *упорядоченным*, если для любой его вершины v , $v \in V(G)$, все ребра, входящие в v , упорядочены и пронумерованы числами $1, 2, \dots, d_G^+(v)$.

Будем считать, что ребра и вершины остовного поддерева, а также ребра связанного с ним остовного наддерева помеченного графа имеют те же самые пометки, которые они имели в исходном графе. Это означает, в частности, что остовное наддерево ориентированного ациклического упорядоченного графа является упорядоченным.

Графы $G' = (V', E')$ и $G'' = (V'', E'')$ называются *изоморфными*, если существуют такие взаимно однозначные отображения $\varphi : V' \rightarrow V''$ и $\psi : E' \rightarrow E''$, при которых вершины и неориентированные ребра (дуги) G' переходят в вершины и неориентированные ребра (соответственно дуги) G'' с сохранением отношения инцидентности (соответственно исхода, захода) вершин и ребер, а также всех пометок. Для (конечного) множества графов $\mathcal{G}$ через $|\mathcal{G}|$ будем обозначать число попарно неизоморфных графов в $\mathcal{G}$.

Известно, что

$$|\mathfrak{D}(q)| \leq 4^q, \quad (1.4)$$

где $\mathfrak{D}(q)$ — множество упорядоченных ориентированных
корневых деревьев с не более, чем q ребрами.

Введем теперь общие определения и обозначения, связанные с сетями и «абстрактными» схемами, с реализацией ими функций, а также с некоторыми структурными представлениями схем.

Набор вида $\mathcal{G} = (G; V'; V'')$, где G — граф, а V' и V'' — выборки из множества $V(G)$ длины p и q соответственно, причем выборка V' является выборкой без повторений, называется (p, q) -сетью. При этом выборка V' (выборка V'') считается *входной* (соответственно *выходной*) *выборкой*, а ее i -я вершина называется i -м *входным* (соответственно *выходным*) *полюсом* или, иначе, i -м *входом* (соответственно *выходом*) сети $\mathcal{G}$. Вершины, не участвующие во входной и выходной выборках сети, считаются ее *внутренними* вершинами.

Для того чтобы выделить входную и выходную выборки сети $\mathcal{G} = (G; V', V'')$, будем записывать ее в виде $\mathcal{G} = \mathcal{G}(V'; V'')$ или $\mathcal{G} = G(V'; V'')$. Сеть, в которой входная и выходная выборки совпадают (не совпадают), называется *сетью с неразделенными* (соответственно *с разделенными*) *полюсами*. При этом в случае неразделенных полюсов сеть $\mathcal{G} = (G; V; V) = \mathcal{G}(V; V)$ будем записывать в виде $\mathcal{G} = (G; V) = \mathcal{G}(V)$. Как правило, входы и выходы (полюса) сети имеют специальные пометки, которые отличают эти вершины от других вершин сети и указываются вместо них в соответствующих выборках. Таким образом, сети можно считать специальным частным случаем помеченных графов.

Примером сети является корневое дерево, входами которого считаются его листья, а выходом — корень. При этом порядок листьев во входной выборке ориентированного упорядоченного корневого дерева $\mathcal{D}$ задается «естественной» нумерацией τ , отображающей множество вершин дерева $\mathcal{D}$ в $\mathbb{N}$ так, что $\tau(v') < \tau(v'')$ тогда и только тогда, когда либо v'' достижима из v' , либо $k' < k''$, где k' и k'' — номера дуг, по которым цепи, соединяющие вершины v' и v'' соответственно с корнем $\mathcal{D}$, входят в свою первую общую вершину.

Для произвольных выборок $V' = (v'_1, \dots, v'_p)$ и $V'' = (v''_1, \dots, v''_q)$ из множества $V(G)$ графа G определим матрицу достижимости выборки V' из выборки V'' как матрицу M , $M \in B^{p,q}$, для которой

$$M \langle i, j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } v''_j \text{ достижима из } v'_i, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Заметим, что в случае $V' = V''$ матрица M является рефлексивной и транзитивной¹, а если, кроме того, G — неориентированный граф, то и симметричной матрицей.

¹Матрица M , $M \in B^{m,m}$, считается рефлексивной (транзитивной) тогда и только тогда, когда она задает рефлексивное (соответственно транзитивное) отношение на множестве $[1, m]$, то есть

$$M \langle i, i \rangle = 1 \quad (\text{соответственно } M \langle i, t \rangle \cdot M \langle t, j \rangle \leq M \langle i, j \rangle)$$

для любого i (соответственно любых i, j и t) из отрезка $[1, m]$. 

Заметим также, что транзитивность рефлексивной матрицы M , $M \in B^{m,m}$, имеет место тогда и только тогда,¹

$$M^2 = M. \quad (1.5)$$

¹Считаем, что при умножении матриц из 0 и 1 вместо операции сложения используется операция дизъюнкции.

Действительно, полагая $\widehat{M} = M^2$, получим

$$\widehat{M} \langle i, j \rangle = \bigvee_{t=1}^m M \langle i, t \rangle \cdot M \langle t, j \rangle \quad (1.6)$$

и, следовательно, в случае $\widehat{M} = M$ неравенства транзитивности

$$\widehat{M} \langle i, j \rangle = M \langle i, j \rangle \geq M \langle i, t \rangle \cdot M \langle t, j \rangle$$

будут выполнены при любых i, j, t из отрезка $[1, m]$. С другой стороны, из транзитивности рефлексивной матрицы M , в силу (1.6), следует, что

$$\widehat{M} \langle i, j \rangle = M \langle i, j \rangle \vee \left(\bigvee_{\substack{1 \leq t \leq m \\ t \neq i, j}} M \langle i, t \rangle \cdot M \langle t, j \rangle \right) = M \langle i, j \rangle.$$

Матрица достижимости выходной выборки сети из ее входной выборки называется *матрицей достижимости* этой сети.

Под «абстрактной» схемой понимается сеть, часть пометок которой составляют входные переменные и в каждой вершине которой реализуется функция (столбец из функций) от этих переменных. При этом считается, что сама схема реализует систему (матрицу), состоящую из функций (соответственно столбцов функций), реализованных на ее выходах. В качестве выходных пометок схемы используются, как правило, специальные выходные переменные, а схема Σ с входными переменными (входами) $x_1, \dots, x_n$ и выходными переменными $z_1, \dots, z_m$ записывается в виде $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m)$.

Номер $\nu(\alpha)$ набора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ из B^n считается *номером ЭК (ЭД) ранга n от БП $X(n)$ вида $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$* (соответственно $x_1^{\bar{\alpha}_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\alpha}_n}$), множество всех таких ФАЛ обозначается Q_n (соответственно J_n), а система из всех указанных ФАЛ, упорядоченных по их номерам, называется *конъюнктивным* (соответственно *дизъюнктивным*) *дешифратором порядка n от БП $x_1, \dots, x_n$* и обозначается через $\overrightarrow{Q_n}$ (соответственно $\overrightarrow{J_n}$).

Функция вида

$$\mu_n(x_1, \dots, x_n, y_0, \dots, y_{2^n-1}) = \bigvee_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} y_{\nu(\alpha)}$$

называется *мультиплексорной функцией*, или, иначе, *мультиплексором порядка n* , а переменные $x = (x_1, \dots, x_n)$ ($y = (y_0, \dots, y_{2^n-1})$) считаются *адресными* (соответственно *информационными*) БП мультиплексора μ_n .

Мультиплексорную ФАЛ порядка $(n - q)$, $0 \leq q < n$, от адресных БП $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$ и информационных БП $y = (y_0, \dots, y_{2^{n-q}-1})$ часто используют для разложения произвольной ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ по БП x'' (см. разложение Шеннона (2.5) из §2 главы 1).

Схему, которая реализует систему ФАЛ $Q_n (J_n, \mu_n)$ будем называть *дешифратором* (соответственно *дизъюнктивным дешифратором*, *мультиплексором*) *порядка n* . Схемы, реализующие равные системы функций, называются *эквивалентными*. Предполагается, что изоморфные схемы всегда эквивалентны, и поэтому для любого конечного множества схем $\mathcal{U}$ выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}\| \leq |\mathcal{U}|, \quad (1.7)$$

где $\|\mathcal{U}\|$ — число попарно неэквивалентных схем в $\mathcal{U}$.

§2. Формулы, их структура, эквивалентность и способы задания. Оптимизация подобных формул по глубине

В §1 главы 1 дано индуктивное определение формулы и реализуемой ею функции. Напомним его и рассмотрим способ представления формул алгебры логики с помощью ориентированных упорядоченных деревьев.

Пусть, по-прежнему, $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ — счетный упорядоченный алфавит входных БП и пусть $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_b\}$ — базис, где ФАЛ φ_i , $i = 1, \dots, b$, зависит от k_i , $k_i \geq 1$, БП и является существенной ФАЛ, если $k_i \geq 2$. Предполагается, что B — полный базис (см. §1 главы 1) и допускается, в общем случае, наличие в нем равных ФАЛ. Чаще всего мы будем иметь дело с базисом $B_0 = \{\&, \vee, \neg\}$.

Любая переменная x_j из $\mathcal{X}$ считается *формулой глубины 0* или, иначе, *тривиальной формулой над базисом $\mathcal{B}$* , которая реализует функцию x_j . Если $i \in [1, b]$ и для каждого $j, j \in [1, k_i]$, определена формула $\mathcal{F}_j$ глубины q_j над $\mathcal{B}$, которая реализует ФАЛ f_j , то запись $\mathcal{F}$ вида

$$\mathcal{F} = \varphi_i(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k_i}) \quad (2.1)$$

является *формулой глубины q над $\mathcal{B}$* , где

$$q = \max\{q_1, \dots, q_{k_i}\} + 1, \quad (2.2)$$

которая реализует функцию f вида $f = \varphi_i(f_1, \dots, f_{k_i})$.

Все записи, полученные в результате указанного индуктивного построения, и только они считаются *формулами над базисом $\mathcal{B}$* . При этом формулы, полученные в процессе индуктивного построения формулы $\mathcal{F}$, называются ее *подформулами*, а те подформулы $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k_i}$, из которых на последнем шаге индуктивного построения строится формула $\mathcal{F}$ вида (2.1), считаются ее *главными подформулами*.

Заметим, что запись подформулы $\mathcal{F}'$ формулы $\mathcal{F}$ является частью записи $\mathcal{F}$, причём каждая такая часть считается *вхождением* $\mathcal{F}'$ в $\mathcal{F}$ или, иначе, *позиционной подформулой вида* $\mathcal{F}'$ формулы $\mathcal{F}$, а число указанных частей называется *кратностью* $\mathcal{F}'$ в $\mathcal{F}$. Под *сложностью* (*рангом*) формулы $\mathcal{F}$ понимается число вхождений в нее функциональных символов (соответственно символов переменных), которое обозначается через $L(\mathcal{F})$ (соответственно $R(\mathcal{F})$).

Напомним, что «графически» совпадающие формулы считаются *изоморфными*, а формулы $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$, реализующие равные функции f' и f'' , называются *равными* или, иначе, *эквивалентными*. При этом равенство вида $t : \mathcal{F}' = \mathcal{F}''$ считается *тождеством*. Через t_φ^K и t_φ^A будем обозначать тождество коммутативности и тождество ассоциативности для ФАЛ $\varphi(x_1, x_2)$, где $\varphi \in \{x_1 \cdot x_2, x_1 \vee x_2, x_1 \oplus x_2, x_1 \sim x_2\}$ (см. §2 главы 1).

Множество всех формул над базисом B будем обозначать через $\mathcal{U}_B^\Phi$ и положим $\mathcal{U}_{B_0}^\Phi = \mathcal{U}^\Phi$. Индукцией по глубине любой формуле глубины q над B можно сопоставить упорядоченное ориентированное корневое дерево глубины q , каждому листу которого приписана БП из $\mathcal{X}$, а каждой внутренней вершине — функциональный символ (ФС) из B . Формуле x_j глубины 0 сопоставим «тривиальное» дерево с единственной вершиной, являющейся корнем и листом одновременно, которой приписана БП x_j (см. рис. 2.1a). Формуле $\mathcal{F}$ вида (2.1) сопоставим дерево $\mathcal{D}$ глубины q , определяемой равенством (2.2), и с корнем v , показанное на рис. 2.1b, где $\mathcal{D}_j$, $j = 1, \dots, k_i$ — дерево глубины q_j с корнем v_j , которое соответствует формуле $\mathcal{F}_j$.

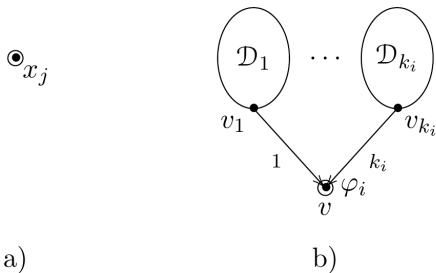


Рис. 2.1: представление формулы деревом

Заметим, что формула $\mathcal{F}$ по сопоставленному ей дереву $\mathcal{D}$ восстанавливается однозначно с точностью до изоморфизма, и что при этом поддеревья дерева $\mathcal{D}$ взаимно однозначно сопоставляются позиционным подформулам формулы $\mathcal{F}$. На рис. 2.2а показано дерево, соответствующее формуле

$$\overline{((x_1 \vee x_2) \vee x_3)} \vee (x_3 (x_1 \vee x_2) \vee x_1 x_2), \quad (2.3)$$

которая является формулой глубины 4 над базисом B_0 и реализует ФАЛ $s_3^{\{0,2,3\}}$.



Рис. 2.2: представление формулы (2.3) деревом и квазидеревом

$$\overline{((x_1 \vee x_2) \vee x_3) \vee (x_3 (x_1 \vee x_2) \vee x_1 x_2)}$$

Для удобства будем считать, что в $\mathcal{U}_B^\Phi$ входят не только отдельные формулы, но и упорядоченные системы (наборы) формул над базисом B , что каждая такая система реализует набор, состоящий из ФАЛ, реализуемых ее формулами, и что этой системе формул соответствует система из деревьев, сопоставленных ее формулам.

Заметим, что ранг $R(\mathcal{F})$ формулы $\mathcal{F}$ равен числу листьев связанного с ней дерева $\mathcal{D}$, ее сложность $L(\mathcal{F})$ равна числу остальных вершин $\mathcal{D}$, а ее глубина $D(\mathcal{F})$ — глубине его корня. Заметим также, что порядок вхождения БП в запись формулы $\mathcal{F}$ при ее просмотре слева направо соответствует последовательности появления БП на листьях связанного с ней дерева, просматриваемых в «естественном» порядке.

Лемма 2.1

$$R(\mathcal{F}) = L_{\&,\vee}(\mathcal{F}) + 1 \leq L(\mathcal{F}) + 1 \leq 2^{D(\mathcal{F})}, \quad (2.4)$$

где $L_{\&, \vee}(\mathcal{F})$ — число ΦC $\&$ и $\vee$ в формуле $\mathcal{F}$.

Доказательство.

Сравнивая число ребер, входящих в вершины дерева (формулы) $\mathcal{F}$ с числом ребер, выходящих из его вершин, получим

$$|E(\mathcal{F})| = 2L_{\&,\vee}(\mathcal{F}) + L_{\neg}(\mathcal{F}) = L(\mathcal{F}) + R(\mathcal{F}) - 1,$$

где $L_{\neg}(\mathcal{F})$ — число ФС $\neg$ в формуле $\mathcal{F}$, откуда следует, что

$$R(\mathcal{F}) = L_{\&,\vee}(\mathcal{F}) + 1.$$

Второе из соотношений (2.4) легко устанавливается индукцией по $D(\mathcal{F})$.

Лемма доказана. □

Следствие

$$D(\mathcal{F}) \geq \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil. \quad (2.5)$$

Для того чтобы выделить набор $x = (x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$, который состоит из всех различных БП алфавита $\mathcal{X}$, встречающихся в формуле $\mathcal{F}$ и перечисленных в порядке возрастания их номеров, будем записывать ее в виде $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x)$. При этом формулу, которая получается из $\mathcal{F}$ в результате замены каждого вхождения БП x_{i_j} , $j = 1, \dots, n$, формулой $\mathcal{F}_j$ будем считать *результатом подстановки формулы $\mathcal{F}_j$ вместо БП x_{i_j} , $j = 1, \dots, n$, в формулу $\mathcal{F}$* и будем обозначать ее через $\mathcal{F}(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$. Заметим, что формула $\mathcal{F}(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ реализует ФАЛ $f(f_1, \dots, f_n)$, где ФАЛ f (ФАЛ f_j) — ФАЛ, реализуемая формулой $\mathcal{F}$ (соответственно $\mathcal{F}_j$, $j = 1, \dots, n$).

Отсюда следует, что если указанную подстановку применить к обеим частям тождества $t: \mathcal{F}' = \mathcal{F}''$, где $\mathcal{F}' = \mathcal{F}'(x)$ и $\mathcal{F}'' = \mathcal{F}''(x)$, мы получим тождество

$$\hat{t}: \hat{\mathcal{F}}' = \hat{\mathcal{F}}'',$$

где $\hat{\mathcal{F}}' = \mathcal{F}'(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ и $\hat{\mathcal{F}}'' = \mathcal{F}''(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$, которое называется *подстановкой для тождества t* .

Из определений следует, что для формул имеет место так называемый принцип эквивалентной замены. Это означает, что если позиционную подформулу вида $\hat{\mathcal{F}}'$ (вида $\hat{\mathcal{F}}''$) формулы $\mathcal{F}$ заменить, учитывая тождество $\hat{t}$, эквивалентной ей формулой $\hat{\mathcal{F}}''$ (соответственно $\hat{\mathcal{F}}'$), то полученная в результате такой замены формула $\check{\mathcal{F}}$ будет эквивалентна формуле $\mathcal{F}$. Указанный переход от формулы $\mathcal{F}$ к формуле $\check{\mathcal{F}}$ называется (однократным) *эквивалентным преобразованием (ЭП) формулы $\mathcal{F}$* на основе тождества t , а последовательность однократных ЭП формулы $\mathcal{F}$, выполняемых на основе тождеств из системы τ , считается её (многократным) ЭП на основе этой системы.

Формулы из $\mathcal{U}^\Phi$, получающиеся друг из друга эквивалентными преобразованиями на основе тождеств $t_{\&}^K$ и $t_{\vee}^K$, а также тождеств $t_{\&}^A$ и $t_{\vee}^A$, называются *подобными*. Легко видеть, что подобные формулы получаются друг из друга перестановкой аргументов и изменением порядка выполнения однотипных двуместных базисных операций, образующих соответствующую многоместную операцию, и поэтому могут отличаться друг от друга только глубиной. Заметим, что сложность характеризует время вычисления формулы на одном процессоре, а глубина — время ее параллельного вычисления на неограниченном числе процессоров. Поэтому оптимизация подобных формул по глубине является частным случаем «распараллеливания» вычислений.

Формулы из $\mathcal{U}^\Phi$ можно оптимизировать также по числу отрицаний с помощью эквивалентных преобразований на основе тождеств

$$t_{\&}^M : \overline{(x_1 \cdot x_2)} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2, \quad t_{\vee}^M : \overline{(x_1 \vee x_2)} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2,$$

$$t_{\neg}^M : \overline{(\bar{x}_1)} = x_1$$

— тождеств де Моргана для конъюнкции, дизъюнкции и отрицания соответственно, а также преобразований подобия. Тождество $t_{\neg}^M$ используется при этом для устранения нескольких последовательных вхождений $\Phi C \neg$ в оптимизируемой формуле, а тождества $t_{\&}^M$, $t_{\vee}^M$ — для выполнения перехода

$$\mathcal{F}' = \bar{\mathcal{F}}_1 \circ \dots \circ \bar{\mathcal{F}}_t = \overline{(\mathcal{F}_1 \diamond \dots \diamond \mathcal{F}_t)},$$

где $(\circ, \diamond) \in \{(\&, \vee), (\vee, \&)\}$ и $t \geq 2$, во всех ее максимальных по включению подформулах вида $\mathcal{F}'$, формируемых с помощью преобразований подобия.

Формула, в которой все $\Phi C \rightarrow$ встречаются только над БП, называется *формулой с поднятыми отрицаниями*. Легко видеть, что с помощью тождеств де Моргана любую формулу из $\mathcal{U}^\Phi$ можно преобразовать в формулу с поднятыми отрицаниями. Заметим, что преобразования подобия и эквивалентные преобразования формул на основе тождеств де Моргана не изменяют ранг этих формул и, следовательно, число $\Phi C \{\&, \vee\}$ в них.

Определим альтернирование $\text{Alt}(\mathcal{F})$ формулы $\mathcal{F}$ с поднятыми отрицаниями как максимальное число изменений типов Φ С & и $\vee$ в цепях дерева, соответствующего формуле $\mathcal{F}$. Заметим, что альтернирование ЭК или ЭД равно нулю, а альтернирование любой (отличной от ЭК и ЭД) ДНФ или КНФ равно 1.

Теорема 2.1

Для любой формулы $\mathcal{F}$ с поднятыми отрицаниями из $\mathcal{U}^\Phi$ существует подобная ей формула $\check{\mathcal{F}}$ такая, что

$$D(\check{\mathcal{F}}) \leq \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil + \text{Alt}(\mathcal{F}). \quad (2.6)$$

Доказательство

Доказательство проведем индукцией по рангу формулы $\mathcal{F}$. Если $R(\mathcal{F}) = 1$, то формула $\mathcal{F}$ имеет вид $\mathcal{F} = x_i^\sigma$, $\sigma \in B$, и сама удовлетворяет неравенству (2.6).

Пусть неравенство (2.6) справедливо для любой подформулы $\mathcal{F}'$ такой, что $R(\mathcal{F}') \leq r - 1$, где $r \geq 2$, и пусть формула $\mathcal{F}$ имеет ранг r и альтернирование a . Представим формулу $\mathcal{F}$ в виде:

$$\mathcal{F} = \Phi(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_t),$$

где $t \geq 2$, формула $\Phi(y_1, \dots, y_t)$ при некотором $\circ$, $\circ \in \{\&, \vee\}$, имеет вид $y_1 \circ \dots \circ y_t$, альтернирование подформул $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_t$ формулы $\mathcal{F}$ не больше, чем a' , где $a' = \max\{0, (a - 1)\}$, а их ранг не превосходит $(r - 1)$.

Продолжение доказательства

Положим

$$d = \lceil \log (L(\mathcal{F}) + 1) \rceil + a - a' \quad \text{и} \quad d_i = \lceil \log (L(\mathcal{F}_i) + 1) \rceil ,$$

где $i = 1, \dots, t$, а затем для каждой формулы $\mathcal{F}_i$ построим по индуктивному предположению подобную ей формулу $\check{\mathcal{F}}_i$ такую, что

$$D(\check{\mathcal{F}}_i) \leq d_i + a'.$$

Заметим, что при этом

$$\sum_{i=1}^t 2^{d_i} \leq 2^d. \quad (2.7)$$

Продолжение доказательства

Действительно, если $a - a' = 1$, то

$$2^d \geq 2(L(\mathcal{F}) + 1) = \sum_{i=1}^t 2(L(\mathcal{F}_i) + 1) \geq \sum_{i=1}^t 2^{d_i},$$

а если $a = a' = 0$, то $\mathcal{F} = x_1^{\sigma_1} \circ \dots \circ x_t^{\sigma_t}$ и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^t 2^{d_i} = \sum_{i=1}^t (L(x_i^{\sigma_i}) + 1) = L(\mathcal{F}) + 1 \leq 2^d.$$

Продолжение доказательства

Заметим также, что перенумерацией формул $\check{\mathcal{F}}_i$, $i = 1, \dots, t$, можно добиться выполнения неравенств:

$$d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_t. \quad (2.8)$$

Пусть теперь Φ' — формула вида $y_1 \circ \dots \circ y_{2^d}$, которой соответствует полное двоичное d -ярусное дерево, а формула Φ'' получается из Φ' удалением последних q , где $q = (2^d - 2^{d_1} - \dots - 2^{d_t})$ и $q \geq 0$ в силу (2.7), вхождений БП вместе с теми ФС, которые с ними связаны.

Продолжение доказательства

В силу (2.8) первые 2^{d_1} вхождений БП в Φ'' составляют подформулу Φ_1 , которой соответствует полное двоичное d_1 -ярусное дерево, содержащее 2^{d_1} вхождений БП в Φ'' , следующие 2^{d_2} вхождений БП в Φ'' — подформулу Φ_2 , которой соответствует полное двоичное d_2 -ярусное дерево, и так далее, вплоть до последних 2^{d_t} вхождений БП в Φ'' , составляющих подформулу Φ_t , которой соответствует полное двоичное d_t -ярусное дерево.

Обозначим через $\tilde{\mathcal{F}}$ формулу, которая получается из Φ'' заменой подформулы Φ_i на формулу $\tilde{\mathcal{F}}_i$, $i = 1, \dots, t$.

Заметим, что $\tilde{\mathcal{F}}$ подобна $\mathcal{F}$, имеет глубину не больше, чем

$$d + a' = \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil + a,$$

и поэтому удовлетворяет неравенству (2.6).

Теорема доказана. □

Следствие 1

Для любой ЭК или ЭД K существует подобная формула $\check{K}$ такая, что

$$D(\check{K}) = \lceil \log(L(K) + 1) \rceil, \quad (2.9)$$

которая, в силу леммы 2.1, минимальна по глубине.

Следствие 2

Для любой ДНФ или КНФ $\mathfrak{A}$ существует подобная ей формула $\check{\mathfrak{A}}$ такая, что

$$D(\check{\mathfrak{A}}) \leq \lceil \log(L(\mathfrak{A}) + 1) \rceil + 1.$$

Замечание

Доказательство теоремы дает индуктивный метод оптимизации формул с поднятыми отрицаниями по глубине с помощью преобразований подобия.

**§3. Задача эквивалентных преобразований схем на
примере формул. Полнота системы основных
тождеств для эквивалентных преобразований
формул базиса $\{\&, \vee, \neg\}$**

Эквивалентные преобразования (ЭП), то есть преобразования, не изменяющие функционирования схем, играют важную роль при решении различных задач теории управляющих систем и, в частности, задачи синтеза схем (см. §1 главы 3). Изложим ряд вопросов ЭП схем из основных классов и рассмотрим сначала понятия, связанные с эквивалентными преобразованиями схем на основе тождеств на примере формул над базисом B . Напомним, что некоторые ЭП формул базиса B_0 уже использовались для раскрытия скобок и приведения подобных при построении сокращенной ДНФ (см. §3 главы 1), а также при оптимизации формул по глубине (см. §2).

При этом считается, что тождество

$$\tilde{t}: \mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}$$

выводится из системы тождеств τ , и этот факт записывается в виде выводимости $\tau \mapsto \tilde{t}$ или $\tau \vdash \tilde{t}$ в зависимости от числа использованных переходов. Заметим, что в силу обратимости ЭП из выводимости $\mathcal{F} \vdash_{\tau} \tilde{\mathcal{F}}$ следует обратная выводимость $\tilde{\mathcal{F}} \vdash_{\tau} \mathcal{F}$.

Система тождеств τ называется *полной* для ЭП формул над B , если для любых двух эквивалентных формул $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ над B имеет место выводимость $\mathcal{F}' \stackrel{\tau}{\vdash} \mathcal{F}''$.

Рассмотрим, в частности, систему τ , которая состоит из тождеств де Моргана и тождества

$$t_{1,\&}^{\text{ПК}} : x_1 (x_2 \vee \bar{x}_2) = x_1,$$

— тождества подстановки константы $1 = x_2 \vee \bar{x}_2$ в конъюнкцию (см. тождества (2.2) из главы 1). Пример ЭП формул из $\mathcal{U}^\Phi$ с помощью системы тождеств τ дает следующая цепочка выводимостей:

$$x_1 (x_2 x_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \stackrel{t_{\&}^{\text{M}}}{\vdash} x_1 (x_2 x_3 \vee \overline{x_2 \cdot x_3}) \stackrel{t_{1,\&}^{\text{ПК}}}{\vdash} x_1. \quad (3.1)$$

$$t_{\circ}^A : x_1 \circ (x_2 \circ x_3) = (x_1 \circ x_2) \circ x_3,$$
$$t_{\circ}^K : x_1 \circ x_2 = x_2 \circ x_2$$
$$t_{\circ}^{\text{O}\Pi} : x \circ x = x,$$
$$t_{\circ, \diamond}^D : x_1 \circ (x_2 \diamond x_3) = (x_1 \circ x_2) \diamond (x_1 \circ x_3)$$
$$t_{\neg}^{\mathbf{M}} : \overline{(\bar{x}_1)} = x_1, \quad t_{\circ}^{\mathbf{M}} : \overline{(x_1 \circ x_2)} = (\bar{x}_1) \diamond (\bar{x}_2),$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ 🔍 ↺

тождества подстановки констант¹

$$\begin{aligned} t_{0,\&}^{\text{ПК}} : x_1 (x_2 \cdot \bar{x}_2) &= x_2 \cdot \bar{x}_2, & t_{1,\&}^{\text{ПК}} : x_1 (x_2 \vee \bar{x}_2) &= x_1, \\ t_{0,\vee}^{\text{ПК}} : x_1 \vee x_2 \cdot \bar{x}_2 &= x_1, & t_{1,\vee}^{\text{ПК}} : x_1 \vee (x_2 \vee \bar{x}_2) &= x_2 \vee \bar{x}_2, \end{aligned}$$

а также тождество поглощения

$$t^{\Pi} : x_1 \vee x_1 x_2 = x_1,$$

тождество обобщенного склеивания

$$t^{\text{OC}} : x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_2 x_3$$

и другие.

¹В отличие от тождеств (2.1)–(2.2) главы 1 данные тождества подстановки констант ориентированы на базис B_0 , где роль константы 0 (константы 1) играет формула вида $x_i \cdot \bar{x}_i$ (соответственно $x_i \vee \bar{x}_i$)

Докажем, что

$$\{t_{\&}^M, t_{\neg}^M\} \models \{t_{\vee}^M\} \quad \text{и} \quad \{t_{\&}^K, \tau^M\} \models \{t_{\vee}^K\},$$

где $\tau^M = \{t_{\&}^M, t_{\neg}^M, t_{\vee}^M\}$. Действительно,

$$\overline{x_1 \vee x_2} \xrightarrow[t_{\neg}^M]{} \overline{(\overline{x_1}) \vee (\overline{x_2})} \xrightarrow[t_{\&}^M]{} \overline{(\overline{x_1}) \cdot (\overline{x_2})} \xrightarrow[t_{\neg}^M]{} \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$$

и

$$x_1 \vee x_2 \xrightarrow[t_{\neg}^M]{} \overline{\overline{x_1 \vee x_2}} \xrightarrow[t_{\vee}^M]{} \overline{\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}} \xrightarrow[t_{\&}^K]{} \overline{\overline{x_2} \cdot \overline{x_1}} \xrightarrow[t_{\&}^M, t_{\neg}^M]{} x_2 \vee x_1.$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$\begin{aligned} \{t_{\&}^A, \tau^M\} \models \{t_V^A\}, \quad \{t_{\&}^{\text{ОП}}, \tau^M\} \models \{t_V^{\text{ОП}}\}, \\ \{t_{\&,V}^D, \tau^M\} \models \{t_{V,\&}^D\} \text{ и } \{t_{\sigma,\&}^{\text{ПК}}, \tau^M\} \models \{t_{\bar{\sigma},V}^{\text{ПК}}\}, \end{aligned}$$

где $\sigma \in \{0, 1\}$. Завершая примеры выводимостей, докажем, что

$$\{t_{1,\&}^{\text{ПК}}, t_{\&,V}^D, t_V^A, t_V^K, t_V^{\text{ОП}}\} \models t^{\Pi}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
 x_1 \vee x_1 x_2 &\xrightarrow[t_{1,\&}^{\text{ПК}}]{} x_1 (x_2 \vee \bar{x}_2) \vee x_1 x_2 \xrightarrow[t_{\&,\vee}^{\text{D}}]{} x_1 ((x_2 \vee \bar{x}_2) \vee x_2) \\
 &\xRightarrow[t_{\vee,\vee}^{\text{A}}, t_{\vee}^{\text{K}}]{} x_1 ((x_2 \vee x_2) \vee \bar{x}_2) \xrightarrow[t_{\vee}^{\text{ОП}}]{} x_1 (x_2 \vee \bar{x}_2) \xrightarrow[t_{1,\&}^{\text{ПК}}]{} x_1.
 \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned}
 \tau^{\text{осн}} &= \{t_{\&}^{\text{M}}, t_{\neg}^{\text{M}}, t_{\&}^{\text{A}}, t_{\&}^{\text{K}}, t_{\&}^{\text{ОП}}, t_{\&,\vee}^{\text{D}}, t_{1,\&}^{\text{ПК}}, t_{0,\&}^{\text{ПК}}\}, \\
 \tau^{\text{A}} &= \{t_{\&}^{\text{A}}, t_{\vee}^{\text{A}}\}, \\
 \tau^{\text{K}} &= \{t_{\&}^{\text{K}}, t_{\vee}^{\text{K}}\}, \\
 \tau^{\text{ОП}} &= \{t_{\&}^{\text{ОП}}, t_{\vee}^{\text{ОП}}\}, \\
 \tau^{\text{D}} &= \{t_{\&,\vee}^{\text{D}}, t_{\vee,\&}^{\text{D}}\}, \\
 \tau^{\text{ПК}} &= \{t_{0,\&}^{\text{ПК}}, t_{1,\&}^{\text{ПК}}, t_{0,\vee}^{\text{ПК}}, t_{1,\vee}^{\text{ПК}}\}, \\
 \tilde{\tau}^{\text{осн}} &= \tau^{\text{M}} \cup \tau^{\text{A}} \cup \tau^{\text{K}} \cup \tau^{\text{ОП}} \cup \tau^{\text{D}} \cup \tau^{\text{ПК}} \cup \{t^{\text{П}}\}.
 \end{aligned}$$

Систему $\tau^{\text{осн}}$ будем называть *системой основных тождеств*, а систему $\tilde{\tau}^{\text{осн}}$ — *расширенной системой основных тождеств*.

Рассмотренные выше примеры выводимостей доказывают следующее утверждение.

Лемма 3.1

Система $\tilde{\tau}^{\text{осн}}$ выводима из системы $\tau^{\text{осн}}$.

Покажем теперь, что с помощью ЭП на основе системы тождеств $\tau^{\text{осн}}$ из любой формулы можно получить совершенную ДНФ или формулу $x_1\bar{x}_1$. Введем для этого некоторые понятия, характеризующие формулы, появляющиеся на промежуточных этапах указанного ЭП.

Произвольную конъюнкцию букв, содержащую, в общем случае, повторяющиеся или противоположные буквы, будем называть *обобщенной ЭК* (ОЭК), а дизъюнкцию таких конъюнкций, содержащую, в общем случае, повторяющиеся «слагаемые», — *обобщенной ДНФ* (ОДНФ). Обычную ЭК (ДНФ) и формулу $x_1 \cdot \bar{x}_1$ будем считать *канонической* ОЭК (соответственно *канонической* ОДНФ), а совершенную ДНФ и формулу $x_1 \cdot \bar{x}_1$ — *совершенными* ОДНФ. Напомним, что формула, в которой все ФС $\neg$ применяются только к БП и нет двух последовательно применяемых ФС $\neg$, называется формулой с поднятыми отрицаниями.

Пусть формула $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$ реализует ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$.
Докажем существование ЭП вида

$$\mathcal{F} \underset{\tau^M}{\mapsto} \mathcal{F}' \underset{\{t_{\&, \vee}^D, t_{\&}^K\}}{\mapsto} \mathcal{F}'' \underset{\tau^{\text{ПП}}}{\mapsto} \hat{\mathcal{F}} \underset{\{t_{\&, \vee}^D, \tau^{\text{ПП}}\}}{\mapsto} \tilde{\mathcal{F}}, \quad (3.2)$$

где $\tau^{\text{ПП}} = \{\tau^A, \tau^K, \tau^{\text{ПК}}, \tau^{\text{ОП}}, t^{\text{П}}\}$, $\mathcal{F}'$ — формула с
поднятыми отрицаниями, $\mathcal{F}''$ — обобщенная ДНФ, а $\hat{\mathcal{F}}$ и $\tilde{\mathcal{F}}$ —
каноническая и совершенная ОДНФ ФАЛ f соответственно.

Действительно, *поднятие отрицаний*, то есть переход от $\mathcal{F}$ к $\mathcal{F}'$ в (3.2) можно осуществить применением тождеств $t_{\neg}^M$, $t_{\&}^M$ и $t_{\vee}^M$ к подформулам вида $\overline{\overline{\mathcal{F}_1}}$, $\overline{\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2}$ и $\overline{\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2}$ соответственно до тех пор, пока все такие подформулы не будут «устранены». Переход от $\mathcal{F}'$ к $\mathcal{F}''$ в (3.2), который называется *раскрытием скобок*, осуществляется применением тождеств $\{t_{\&, \vee}^D, t_{\&}^K\}$ к подформулам вида $\mathcal{F}_1 \cdot (\mathcal{F}_2 \vee \mathcal{F}_3)$ или $(\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2) \cdot \mathcal{F}_3$ до тех пор, пока они встречаются в преобразуемой формуле.

Переход от $\mathcal{F}''$ к $\widehat{\mathcal{F}}$ в (3.2), который называется *приведением подобныx*, выполняется в три этапа. На первом этапе каждая ОЭК K'' из ОДНФ $\mathcal{F}''$ преобразуется в каноническую ОЭК K с помощью тождеств $\{t_{\&}^{\text{ОП}}, t_{0,\&}^{\text{ПК}}, t_{\&}^{\text{А}}, t_{\&}^{\text{К}}\}$, а также тождества

$$x_i \cdot \bar{x}_i = x_1 \cdot \bar{x}_1, \quad (3.3)$$

которое выводится из них следующим образом:

$$x_i \cdot \bar{x}_i \xrightarrow[t_{0,\&}^{\text{ПК}}]{} (x_1 \cdot \bar{x}_1) \cdot (x_i \cdot \bar{x}_i) \xrightarrow[t_{\&}^{\text{К}}]{} (x_i \cdot \bar{x}_i) \cdot (x_1 \cdot \bar{x}_1) \xrightarrow[t_{0,\&}^{\text{ПК}}]{} x_1 \cdot \bar{x}_1.$$

На втором этапе полученная формула $\check{\mathcal{F}}$ преобразуется в $\hat{\mathcal{F}}$ путем «устранения» повторных вхождений равных элементарных конъюнкций или подформул $x_1 \cdot \bar{x}_1$ с помощью тождеств $\{\tau^A, \tau^K, t_V^{OP}\}$ и, в случае $f \neq 0$, последующего «устранения» ОЭК $x_1 \cdot \bar{x}_1$ с помощью тождеств $\{t_V^A, t_V^K, t_{0,V}^{PK}\}$.

Заметим, что первые два этапа приведения подобных, на которых происходит приведение повторений БП в ОЭК и ЭК, уже дают нам искомую формулу $\hat{\mathcal{F}}$. Однако, для уменьшения числа шагов в последующих ЭП можно выполнить третий этап приведения подобных — этап приведения поглощений ЭК. На каждом шаге этого этапа в полученной ДНФ с помощью тождеств $\{\tau^A, \tau^K\}$ выделяется подформула вида $K'' \vee K'' \cdot K$, где K'' и K — некоторые ЭК, а затем ЭК $K'' \cdot K$ «устраняется» с помощью ЭП

$$K'' \vee K'' \cdot K \xrightarrow[t^{\Pi}]{} K''.$$

Заметим также, что раскрытие скобок и различные этапы приведения подобных можно чередовать друг с другом при ЭП подформул формулы $\mathcal{F}'$ или формул $\mathcal{F}'', \hat{\mathcal{F}}$.

Переход от $\widehat{\mathcal{F}}$ к $\widetilde{\mathcal{F}}$ в (3.2) выполняется в два этапа. Сначала каждая ЭК $\widehat{K}$ из $\widehat{\mathcal{F}}$, которая имеет ранг r , где $r = n - q < n$, и не содержит букв БП $x_{i_1}, \dots, x_{i_q}$, приводится к ее совершенной ДНФ $\widetilde{K}$ от БП $X(n)$ в результате следующего ЭП:

$$\widehat{K} \xrightarrow[t_{1,\&}^{\text{ПК}} \widehat{K} (x_{i_1} \vee \bar{x}_{i_1}) \cdots (x_{i_q} \vee \bar{x}_{i_q}) \xrightarrow[t_{\&,\vee}^{\text{D}} \widetilde{K}.$$

Затем в полученной ОДНФ устраняются повторные вхождения слагаемых так, как это делалось ранее при переходе от $\check{\mathcal{F}}$ к $\widehat{\mathcal{F}}$, и в результате мы приходим к совершенной ОДНФ $\widetilde{\mathcal{F}}$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 3.2

Любую формулу $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$, реализующую ФАЛ f , с помощью ЭП на основе системы тождеств $\tau^{осн}$ можно преобразовать в совершенную ОДНФ ФАЛ f от БП $X(n)$.

для которой

$$\mathcal{F} = (x_1 \vee x_2) \cdot \overline{(x_1 \cdot x_3)} \cdot (x_2 \vee x_3),$$

$$\mathcal{F} \mapsto_{t_{\&}^{\mathbf{M}}} (x_1 \vee x_2) \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3) \cdot (x_2 \vee x_3) = \mathcal{F}',$$

$$\mathcal{F}' \stackrel{\text{---}}{\underset{\{t_{\&\vee}^{\text{D}}, \tau^{\text{III}} \setminus t^{\text{II}}\}}{\rightleftarrows}} x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3 = \check{\mathcal{F}} = \hat{\mathcal{F}},$$

$$\widehat{\mathcal{F}} \quad \begin{array}{c} \vdash \\ \{ \tau^A, \tau^K, t^\Pi \} \end{array} \quad \bar{x}_1 x_2 \vee x_2 \bar{x}_3 \quad = \widehat{\mathcal{F}}',$$

$$\widehat{\mathcal{F}}' \stackrel{\text{D}}{\Rightarrow}_{\{t_{\&, \vee}^{\text{D}}, \tau^{\text{III}}\}} x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 = \widetilde{\mathcal{F}}.$$

Система $\tau^{\text{очн}}$ — полная система тождеств.

Пусть $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ — эквивалентные формулы, реализующие равные ФАЛ f' и f'' соответственно, а набор $x(n) = x$ содержит все различные БП, встречающиеся в $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$.

Пусть, далее, ФАЛ $f(x)$ равна f' и f'' , а $\tilde{\mathcal{F}}$ — совершенная ОДНФ ФАЛ f от БП $X(n)$. В силу леммы 3.2, имеет место ЭП

$$\mathcal{F}' \underset{\tau^{\text{OCH}}}{\rhd} \tilde{\mathcal{F}} \underset{\tau^{\text{OCH}}}{\rhd} \mathcal{F}'',$$

которое доказывает теорему.



§4. Задание формул графами, схемы из функциональных элементов. Оценка числа формул и схем в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$

Рассмотрим теперь более общую по сравнению с формулами модель — модель схем из функциональных элементов (СФЭ), в которой последовательность операций суперпозиции базисных ФАЛ задается с помощью ориентированного ациклического графа, обобщающего дерево, и где возможно многократное использование промежуточных результатов. По существу, СФЭ получается из системы деревьев (системы формул) в результате отождествления некоторых изоморфных поддеревьев (совпадающих подформул).

Пусть $\mathcal{Z}$ — счетный упорядоченный алфавит (выходных) БП, который не имеет общих БП с алфавитом $\mathcal{X}$.

Сопоставим каждому функциональному символу (ФС)

φ_i , $i = 1, \dots, b$, функциональный элемент (ФЭ) $\mathcal{E}_i$, имеющий k_i входов, причем входу с номером j соответствует j -я БП x_j ФАЛ φ_i , где $j = 1, \dots, k_i$, и один выход, на котором эта ФАЛ реализуется (см. рис. 4.1a). Упрощенный вариант изображения ФЭ $\mathcal{E}_i$ в виде вершины графа с пометкой φ_i , в которую входят k_i упорядоченных, то есть пронумерованных числами $1, \dots, k_i$ дуг, показан на рис. 4.1b. При этом предполагается, что дуга с номером j , $1 \leq j \leq k_i$, соответствует j -му входу ФЭ $\mathcal{E}_i$. В дальнейшем мы, как правило, не будем делать различий между функциональным символом φ_i и функциональным элементом $\mathcal{E}_i$.

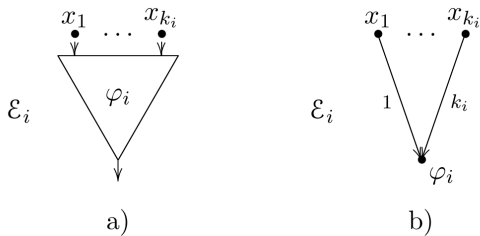


Рис. 4.1: функциональный элемент $\mathcal{E}_i$

Определение

Схемой из функциональных элементов над базисом B называется ориентированная ациклическая упорядоченная сеть Σ , входная выборка которой состоит из всех истоков Σ , а вершины помечены следующим образом:
каждому входу (выходу) Σ сопоставлена БП из $\mathcal{X}$ (соответственно $\mathcal{Z}$), являющаяся пометкой связанной с ним вершины, причем различным входам (выходам) сопоставлены различные БП, а упорядоченность вершин во входной и выходной выборках Σ определяется упорядоченностью сопоставленных им БП;
каждая отличная от истока вершина v схемы Σ помечена ФС φ_i , где $k_i = d_{\Sigma}^{+}(v)$.

Заметим, что в общем случае вершины в выходной выборке СФЭ могут повторяться, то есть одной и той же выходной вершине может быть сопоставлено несколько БП из $\mathcal{Z}$. Если множество $X = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$ ($Z = \{z_{j_1}, \dots, z_{j_m}\}$) состоит из всех входных (соответственно выходных) БП СФЭ Σ , перечисленных в порядке возрастания их номеров в алфавите $\mathcal{X}$ (соответственно $\mathcal{Z}$), то будем записывать СФЭ Σ в виде $\Sigma = \Sigma(X; Z)$ или $\Sigma = \Sigma(x; z)$, где $x = (x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ и $z = (z_{j_1}, \dots, z_{j_m})$ — наборы БП, соответствующие множествам X и Z .

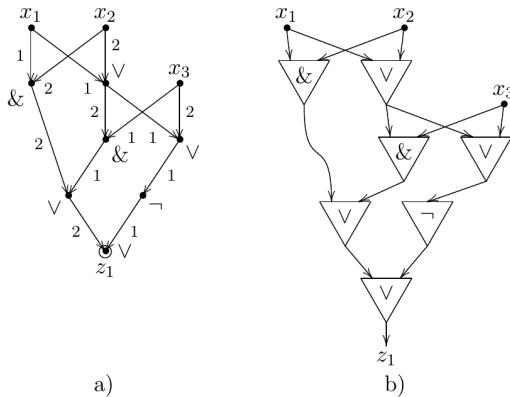


Рис. 4.2: СФЭ, полученная из квазидерева на рис. 2.2b

Схема Σ , которая получается из дерева $\mathcal{D}$, связанного с формулой $\mathcal{F}$ из $\mathcal{U}_B^\Phi$, в результате отождествления листьев с одинаковыми пометками и приписывания его корню выходной БП из $\mathcal{Z}$, называется *квазидеревом, соответствующим формуле $\mathcal{F}$* . Заметим, что указанное квазидерево Σ однозначно определяет формулу $\mathcal{F}$ и является СФЭ над базисом B . Из этого квазидерева путем «отождествления» (наложения) его изоморфных квазиподдеревьев можно получать и другие СФЭ, задающие формулу $\mathcal{F}$. На рис. 2.2b показано квазидерево над базисом B_0 с входными БП x_1, x_2, x_3 и выходной БП z_1 , которое получено из дерева, сопоставленного формуле (2.3) и изображенного на рис. 2.2a. На рис. 4.2a приведена СФЭ, полученная из данного квазидерева в результате отождествления двух его изоморфных квазиподдеревьев, а на рис. 4.2b дано более «наглядное» изображение этой СФЭ в виде системы соединенных соответствующим образом ФЭ.

Обозначим через $\mathcal{U}_B^C$ множество всех СФЭ над базисом B , и пусть $\mathcal{U}^C = \mathcal{U}_{B_0}^C$. Заметим, что система квазидеревьев с общими входами, соответствующая системе формул над базисом B , является СФЭ над B , если выходам этих квазидеревьев приписаны различные выходные БП. В связи с этим формулы над B и их системы будем считать частным случаем СФЭ над B , полагая, что имеет место включение $\mathcal{U}_B^F \subseteq \mathcal{U}_B^C$. Заметим также, что СФЭ Σ , $\Sigma \in \mathcal{U}_B^C$, входит в $\mathcal{U}_B^F$ тогда и только тогда, когда все стоки Σ , и только они, являются ее выходами, а из каждой вершины Σ , отличной от ее входов и выходов, исходит одна дуга.

Определим теперь функционирование СФЭ $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m)$ над базисом B . Сначала индукцией по q , $q = 0, 1, \dots$, определим для каждой вершины v глубины q в схеме Σ реализуемую в ней формулу $\mathcal{F}_v = \mathcal{F}_v(x_1, \dots, x_n)$ глубины q над базисом B . Если $q = 0$, то есть v — вход Σ , положим $\mathcal{F}_v = x_j$, где x_j — входная БП, сопоставленная вершине v .

Пусть теперь v — вершина глубины q , $q \geq 1$, схемы Σ , которая имеет пометку φ_i и в которую входит k_i дуг, причем дуга с номером j , $1 \leq j \leq k_i$, исходит из вершины v_j глубины q_j , где уже реализована формула $\mathcal{F}_j = \mathcal{F}_{v_j}$ глубины q_j , а для чисел $q, q_1, \dots, q_{k_i}$ выполнено (2.2). Тогда в вершине v реализуется формула $\mathcal{F} = \mathcal{F}_v$ вида (2.1), которая имеет глубину q . При этом считается, что в вершине v СФЭ Σ *реализуется ФАЛ* $f(x_1, \dots, x_n)$, если ФАЛ f реализуется формулой $\mathcal{F}_v$, и что СФЭ Σ *реализует систему ФАЛ* F , $F = (f_1, \dots, f_m)$, или *реализует систему булевых уравнений* $z_1 = f_1, \dots, z_m = f_m$, если f_j , $j = 1, \dots, m$, — ФАЛ, реализованная в той выходной вершине СФЭ Σ , которой приписана БП z_j .

Заметим, что квазидерево, которое соответствует формуле $\mathcal{F}$, реализующей ФАЛ f , а также любая СФЭ, полученная из него отождествлением изоморфных квазиподдеревьев, реализует и формулу $\mathcal{F}$, и ФАЛ f . Так, СФЭ на рис. 4.2 реализует формулу (2.3) и ФАЛ $s_3^{\{0,2,3\}}(x_1, x_2, x_3)$, или уравнение $z_1 = s_3^{\{0,2,3\}}(x_1, x_2, x_3)$.

Две СФЭ считаются изоморфными, если они изоморфны как помеченные графы, и эквивалентными, если они реализуют равные системы ФАЛ. Заметим, что СФЭ всегда эквивалентна системе формул, реализуемых ею на своих выходах. Заметим также, что изменение нумерации дуг, входящих в такую вершину v СФЭ Σ , которой сопоставлен ФЭ $\mathcal{E}_i$ с симметрической ФАЛ φ_i , не изменяет ФАЛ, реализуемую в вершине v , а значит, не влияет на функционирование Σ . Схемы, получающиеся друг из друга в результате указанных преобразований, называются *квазиизоморфными*, а номера дуг, входящих в вершину v с симметрической ФАЛ, как правило, не указываются. Легко видеть, что в соответствующих друг другу вершинах изоморфных (квазиизоморфных) СФЭ реализуются одинаковые (соответственно подобные) формулы, а значит, и одинаковые ФАЛ. Следовательно, две изоморфные (квазиизоморфные) СФЭ эквивалентны, то есть для СФЭ справедливо неравенство (1.7).

Вершина СФЭ называется *висячей*, если она является стоком, но не является выходом схемы. Схема называется *приведенной*, если в ней нет висячих вершин. Заметим, что система формул является приведенной СФЭ, и что из любой СФЭ можно получить эквивалентную ей приведенную СФЭ с помощью операции *удаления висячих вершин*. Заметим также, что приведенные СФЭ, и только они, получаются из систем квазидеревьев в результате отождествления некоторых изоморфных квазиподдеревьев, и что в приведенных СФЭ все вершины лежат на цепях, идущих от входов схемы к ее выходам.

Также как и для формул, для каждой СФЭ Σ , $\Sigma \in \mathcal{U}_B^C$, определим следующие параметры (функционалы сложности):

$L(\Sigma)$ — сложность Σ , то есть число всех ее ФЭ;

$D(\Sigma)$ — глубина Σ , то есть максимальная глубина ее вершин.

$R(\Sigma)$ — ранг Σ , то есть число дуг, исходящих из ее входов.

Лемма 2.1 обобщается для СФЭ следующим образом.

Лемма 4.1

Для приведенной СФЭ Σ , $\Sigma \in \mathcal{U}^C$, с одним выходом, выполняются неравенства

$$R(\Sigma) \leq L_{\&,\vee}(\Sigma) + 1 \leq L(\Sigma) + 1 \leq 2^{D(\Sigma)}, \quad (4.1)$$

где $L_{\&,\vee}$ — число ФЭ $\&$ и $\vee$ в Σ .

С содержательной точки зрения различные функционалы сложности отражают различные параметры моделируемых схем или программ. Так, например, сложность может характеризовать стоимость, размеры или потребляемую мощность СБИС, а также время выполнения программы на одном процессоре. При этом задержка схемы характеризует время срабатывания СБИС или время выполнения программы на параллельных процессорах. Ранг схемы отражает число обращений программы к памяти, в которой хранятся значения входных БП и т. п.

Обозначим через $\mathcal{U}_B^\Phi(L, n)$ и $\mathcal{U}_B^\Phi[D, n]$ множество формул $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$ над базисом B , для которых $L(\mathcal{F}) \leq L$ и $D(\mathcal{F}) \leq D$, причем индекс B_0 будем, как обычно, опускать. Заметим, что из неравенства (2.4) вытекает включение

$$\mathcal{U}^\Phi[D, n] \subseteq \mathcal{U}^\Phi(2^D - 1, n). \quad (4.2)$$

Для любого конечного множества схем $\mathcal{U}$ через $|\mathcal{U}|$ естественным образом будем обозначать число попарно неизоморфных схем в этом множестве, а через $\|\mathcal{U}\|$ — число попарно неэквивалентных схем в $\mathcal{U}$ (ясно, что $\|\mathcal{U}\| \leq |\mathcal{U}|$).

Лемма 4.2

Для любых натуральных n, L, D выполняются неравенства

$$|\mathcal{U}^{\Phi}(L, n)| \leq (10n)^{L+1}, \quad (4.3)$$

$$\|\mathcal{U}^{\Phi}(L, n)\| \leq (8n)^{L+1}, \quad (4.4)$$

$$\|\mathcal{U}^{\Phi}[D, n]\| \leq (8n)^{2^D}. \quad (4.5)$$

Доказательство

Оценим сверху число попарно не изоморфных (попарно не квазиизоморфных) формул во множестве $\mathcal{U}^\Phi(L, n)$. Для того, чтобы задать с точностью до изоморфизма упорядоченное дерево $\mathcal{D}$, соответствующее формуле $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{U}^\Phi(L, n)$, достаточно:

- 1) выбрать упорядоченное двоичное корневое дерево $\mathcal{D}'$ с q , $q \leq L$, нелистовыми вершинами, в котором вершины с полустепенью захода 2 помечены ФС $\&$, $\vee$,
- 2) каждый исток $\mathcal{D}'$ пометить одной из БП $x_1, \dots, x_n$, а вершины с полустепенью захода 1 — ФС $\neg$.

Продолжение доказательства

Пронумеруем множество нелистовых вершин дерева $\mathcal{D}'$ числами $1, 2, \dots, q$ в порядке обхода в глубину и сопоставим каждой такой вершине v с полустепенью захода d , $d \in [1, 2]$ набор α , $\alpha \in B^d$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ и $\alpha_j = 1$ тогда и только тогда, когда дуга с номером j , входящая в v , начинается с листа дерева $\mathcal{D}'$. Заметим, что набор $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_L)$, где γ_i — набор, сопоставленный вершине с номером i , если $1 \leq i \leq q$, и произвольный набор из объединения $B^1 \cup B^2$ в случае $i > q$, а также набор ФС $\&$ и $\vee$, приписанных тем вершинам v_i , $1 \leq i \leq L$, для которых $\gamma_i \in B^2$, однозначно определяет дерево $\mathcal{D}'$ с точностью до изоморфизма.

Продолжение доказательства

Следовательно, число упорядоченных деревьев $\mathcal{D}'$ рассматриваемого вида не больше, чем 10^L , а число получаемых из него деревьев $\mathcal{D}$ не больше, чем n^{L+1} , так как в силу леммы 2.1

$$R(\mathcal{F}) \leq L + 1.$$

Перемножая указанные числа, получаем оценку (4.3). Оценка (4.4) доказывается аналогично с учетом того, что при снятии нумерации с дуг дерева $\mathcal{D}'$, то есть при рассмотрении формул с точностью до квазиизоморфизма, двоичные наборы длины 2, сопоставленные его вершинам, можно выбирать из множества $\{(00), (01), (11)\}$ и поэтому число неупорядоченных деревьев $\mathcal{D}'$ рассматриваемого вида не больше, чем 8^L .

Неравенство (4.5) вытекает из (4.4) и (4.2).

Лемма доказана. □

Замечание

Число попарно не квазиизоморфных формул в базисе $\{\&, \vee\}$ от БП $X(n)$ сложности не больше, чем L , не превосходит $(6n)^{L+1}$.

Обозначим через $\mathcal{U}^C(L, n)$ множество приведенных СФЭ сложности не более L с n входами $(x_1, \dots, x_n)$ и одним выходом z_1 над базисом $B_0 = \{\&, \vee, \neg\}$.

Лемма 4.3

Для любых натуральных n и L выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}^C(L, n)\| \leq (8(L + n))^{L+1}. \quad (4.6)$$

Доказательство.

Заметим, что для того, чтобы задать СФЭ Σ , $\Sigma \in \mathcal{U}^C(L, n)$, с точностью до квазиизоморфизма достаточно:

выбрать её остовное неупорядоченное наддерево $\mathcal{D}'$ с q , $q \leq L$, нелистовыми вершинами, которые помечены ФС базиса B_0 ;

присоединить каждый лист $\mathcal{D}'$ либо к одному из n входов Σ , либо к одной из нелистовых вершин $\mathcal{D}'$, отличной от корня.

Оценка (4.6) получается из приведенной в лемме 4.2 оценки числа деревьев $\mathcal{D}'$ и оценки числа способов присоединения каждого листа $\mathcal{D}'$ путем их перемножения.

Лемма доказана. □

§5. Эквивалентные преобразования схем из функциональных элементов и моделирование с их помощью формульных преобразований.

Моделирование эквивалентных преобразований формул и схем в различных базисах, теорема перехода

Распространим введенные в предыдущем параграфе понятия и обозначения на произвольный класс схем $\mathcal{U}$.

Эквивалентность схем Σ' и Σ'' из $\mathcal{U}$ имеет место тогда и только тогда, когда Σ' и Σ'' реализуют равные системы (матрицы) ФАЛ. При этом, обычно, предполагается, что соответствующие друг другу полюса (выходы, входы) в Σ' и Σ'' имеют одинаковые пометки, а эквивалентность Σ' и Σ'' записывается в виде тождества

$$t : \Sigma' \sim \Sigma''.$$

Для схем из $\mathcal{U}$, как и для формул, определяется ряд «простейших» преобразований, сохраняющих эквивалентность схем, которые называются *подстановками*.

Тождество

$$\hat{t}: \hat{\Sigma}' \sim \hat{\Sigma}'',$$

которое получается в результате применения одной и той же подстановки к обеим частям тождества $t: \Sigma' \sim \Sigma''$, называется *подстановкой тождества t* . Схема Σ' называется *подсхемой схемы Σ* , если

$$V(\Sigma') \subseteq V(\Sigma), \quad E(\Sigma') \subseteq E(\Sigma)$$

и любая вершина v , $v \in V(\Sigma')$, которая либо относится к множеству входов (выходов) Σ , либо служит конечной (соответственно начальной) вершиной некоторого ребра из $E(\Sigma) \setminus E(\Sigma')$, является входом (соответственно выходом) Σ' .

Будем считать, что для схем из $\mathcal{U}$, как и для формул, имеет место принцип эквивалентной замены, то есть заменяя подсхему $\hat{\Sigma}'$ схемы Σ эквивалентной ей схемой $\hat{\Sigma}''$ мы получаем схему $\tilde{\Sigma}$, которая эквивалентна схеме Σ . При этом все введенные для случая эквивалентных преобразований формул понятия (однократная и кратная выводимость, полнота системы тождеств и др.), а также связанные с ними обозначения переносятся на случай ЭП схем из $\mathcal{U}$ без изменений. Заметим, что вопрос о существовании конечной полной системы тождеств (КПСТ) является одним из основных вопросов, связанных с изучением ЭП схем из заданного класса $\mathcal{U}$.

Рассмотрим эти вопросы на примере ЭП СФЭ. Мы будем использовать все введенные выше общие понятия и определения, касающиеся ЭП схем, считая подстановкой СФЭ переименование (с возможным отождествлением) ее входных БП и переименование (с возможным дублированием и снятием¹) ее выходных БП.

¹Под дублированием (снятием) выхода z_i СФЭ понимается нанесение на вершину с пометкой z_i еще одной выходной БП (соответственно удаление с неё пометки z_i)

Напомним, что формулы представляют собой частный случай СФЭ, и для определенности будем считать, что любая формула $\mathcal{F}$ из $\mathcal{U}_B^\Phi$ является формулой-словом (см. § 2), а соответствующую ей формулу-граф, т. е. квазидерево, будем обозначать через $\underline{\mathcal{F}}$. При этом тождеству $t: \mathcal{F}' = \mathcal{F}''$, где $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ — формулы из $\mathcal{U}_B^\Phi$, будет соответствовать тождество $\underline{t}: \underline{\mathcal{F}}' \sim \underline{\mathcal{F}}''$, где $\underline{\mathcal{F}}'$ и $\underline{\mathcal{F}}''$ — соответствующие $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ схемы из $\mathcal{U}_B^C$, являющееся «схемным» аналогом тождества t .

Множество СФЭ вида $\underline{\mathcal{F}}$, где $\mathcal{F} \in \mathfrak{F} \subseteq \mathcal{U}_B^\Phi$, будем обозначать через $\underline{\mathfrak{F}}$, а систему тождеств вида $\underline{t}$, где $t \in \tau$, а τ — система тождеств для $\mathcal{U}_B^\Phi$, — через $\underline{\tau}$. Так, на рис. 5.1a и 5.1b приведены тождества $\underline{t_{\&}^M}$ и $\underline{t_{1,\&}^{ПК}}$, являющиеся схемными аналогами введенных выше формульных тождеств $t_{\&}^M$ и $t_{1,\&}^{ПК}$.

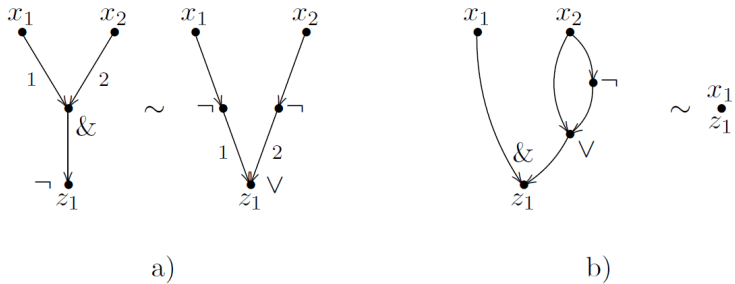


Рис. 5.1: тождества $\underline{t_{\&}^M}$ и $\underline{t_{1,\&}^{ПК}}$

На рис. 5.2а и 5.2б показаны тождество *ветвления* $t_{\mathcal{E}_i}^B$ и тождество *снятия* $t_{\mathcal{E}_i}^C$ для функционального элемента $\mathcal{E}_i$, $i \in [1, b]$, соответственно, а на рис. 5.2с — тождество *снятия входа* $t_{\text{вх}}^C$.

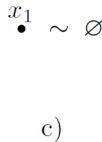
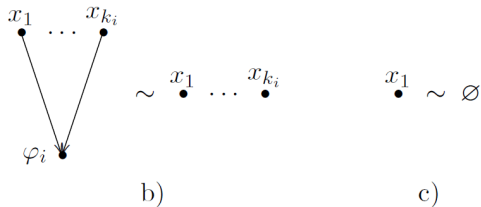
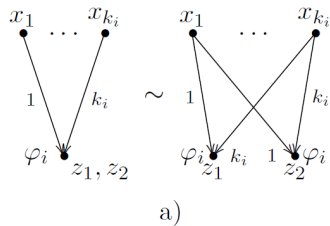


Рис. 5.2: тождества ветвления, снятия ФЭ и снятия входа

Заметим, что применение тождества снятия равносильно выполнению операции удаления висячей вершины соответствующего типа. Заметим также, что тождества $t_{\varepsilon_i}^B$, $t_{\varepsilon_i}^C$, $t_{\text{вх}}^C$ не являются аналогами формульных тождеств и положим

$$\tau_B^B = \bigcup_{i=1}^b \{t_{\varepsilon_i}^B\}, \quad \tau_B^C = \{t_{\text{вх}}^C\} \cup \bigcup_{i=1}^b \{t_{\varepsilon_i}^C\}.$$

Очевидно, что с помощью этих тождеств можно избавиться от всех висячих вершин и всех внутренних ветвлений, имеющих в СФЭ. Следовательно, для любой СФЭ Σ , $\Sigma \in \mathcal{U}_B^C$, существует ЭП вида $\Sigma \xrightarrow[\tau^C \cup \tau^B]{\quad} \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ — формула (система формул) из $\mathcal{U}_B^\Phi$.

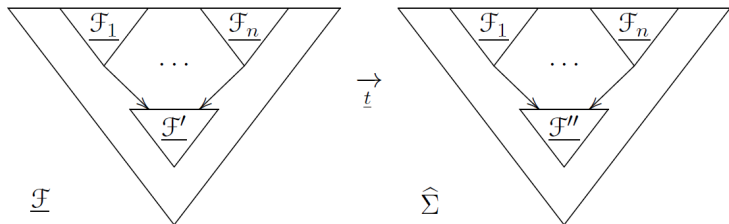


Рис. 5.3: моделирование ЭП формул с помощью ЭП СФЭ

Пусть, далее, $\mathcal{F} \mapsto_t \hat{\mathcal{F}}$ — однократное ЭП для формул из $\mathcal{U}_B^\Phi$, где тождество t имеет вид

$$t : \mathcal{F}'(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{F}''(x_1, \dots, x_n),$$

а формула $\hat{\mathcal{F}}$ получается из формулы $\mathcal{F}$ заменой подформулы $\mathcal{F}'(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ формулой $\mathcal{F}''(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$.

Сопоставим этому ЭП «моделирующее» его однократное ЭП СФЭ вида $\underline{\mathcal{F}} \mapsto_{\underline{t}} \hat{\underline{\Sigma}}$ (см. рис. 5.3). Заметим, что в том случае,

когда формулы $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ являются неповторными формулами, а БП $x_1, \dots, x_n$ — их существенными БП, СФЭ $\hat{\underline{\Sigma}}$ совпадает с СФЭ $\underline{\mathcal{F}''}$.

В остальных случаях из подформулы вида $\mathcal{F}'(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ формулы $\mathcal{F}$ необходимо с помощью тождеств τ_B^B сформировать сначала подсхему $\underline{\mathcal{F}}'(\underline{\mathcal{F}}_1, \dots, \underline{\mathcal{F}}_n)$, а затем применить тождество $\underline{t}$. При этом в СФЭ $\hat{\Sigma}$ могут появиться висячие вершины или внутренние «ветвления», и тогда для перехода от $\hat{\Sigma}$ к $\hat{\mathcal{F}}$ необходимо провести ЭП вида $\hat{\Sigma} \xrightarrow{\tau^C \cup \tau^B} \hat{\mathcal{F}}$. Следовательно, для любого ЭП вида $\mathcal{F} \xrightarrow{\tau} \hat{\mathcal{F}}$, где $\mathcal{F}, \hat{\mathcal{F}} \in \mathcal{U}_B^\Phi$, существует моделирующее его ЭП вида

$$\underline{\mathcal{F}} \xrightarrow{\underline{\tau} \cup \tau_B^B \cup \tau_B^C} \underline{\hat{\mathcal{F}}}.$$

На рис. 5.4 показано ЭП СФЭ из $\mathcal{U}^C$, которое моделирует ЭП (3.1) для формул из $\mathcal{U}^\Phi$:

$$x_1 (x_2 x_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \xrightarrow{t_{\&}^M} x_1 (x_2 x_3 \vee \overline{x_2 \cdot x_3}) \xrightarrow{t_{1,\&}^{\text{ПК}}} x_1.$$

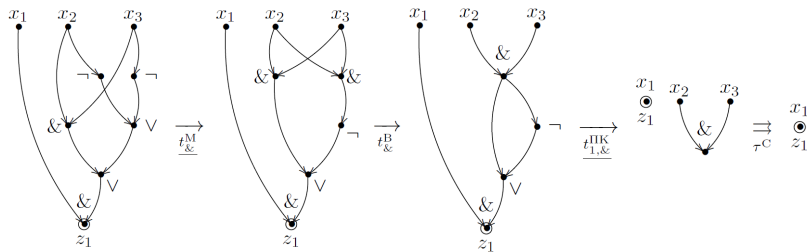


Рис. 5.4: пример моделирования ЭП формул с помощью ЭП СФЭ

Из описанного выше способа «моделирования» ЭП формул с помощью ЭП СФЭ, а также способа перехода от формул к СФЭ и обратно на основе ЭП с помощью тождеств τ_B^B , τ_B^C вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 5.1

Если τ — конечная полная система тождеств для ЭП формул из $\mathcal{U}_B^F$, то $\tau \cup \tau_B^C \cup \tau_B^B$ — конечная полная система тождеств для ЭП СФЭ из $\mathcal{U}_B^C$.

Следствие

Система тождеств $\tau^{\text{осн}} \cup \tau^B \cup \tau^C$ — КПСТ для ЭП СФЭ из $\mathcal{U}^C$.

Рассмотрим далее вопросы структурного моделирования формул в различных базисах. Пусть помимо базиса $B = \{\varphi_i\}_{i=1}^b$ у нас имеется другой конечный полный базис $B' = \{\varphi'_i\}_{i=1}^{b'}$, и пусть формула $\Phi'_i(x_1, \dots, x_{k'_i})$ из $\mathcal{U}_{B'}^\Phi$, где $k'_i \geq k_i$, реализует ФАЛ φ_i , $i = 1, \dots, b$. Заметим, что в случае $k'_i > k_i$ БП $x_{k_i+1}, \dots, x_{k'_i}$ являются фиктивными БП формулы Φ'_i . Положим

$$\Phi' = (\Phi'_1, \dots, \Phi'_b), \quad \Pi' = (\Pi'_1, \dots, \Pi'_b),$$

где Π'_i — тождество вида $\varphi_i = \Phi'_i$, $i = 1, \dots, b$, и формулы из Φ' (тождества из Π') будем называть *формулами* (соответственно *тождествами*) *перехода от базиса B к базису B'*.

Для формулы $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{U}_B^\Phi$, обозначим через $\Pi'(\mathcal{F})$ формулу над базисом B' , которая получается из $\mathcal{F}$ заменой каждой ее подформулы вида $\varphi_i(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k_i})$ формулой $\Phi'_i(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k_i}, x_{k_i+1}, \dots, x_{k'_i})$, то есть является результатом подстановки формулы $\mathcal{F}_j$ вместо БП x_j в формулу Φ'_i для всех j , $j = 1, \dots, k_i$. Переход от формулы $\mathcal{F}$ к формуле $\Pi'(\mathcal{F})$ будем называть *структурным моделированием формулы $\mathcal{F}$ в базисе B' на основе формул перехода Φ'* или, иначе, *на основе тождеств перехода Π'* .

Заметим, что этот переход является специальным ЭП вида

$$\mathcal{F} \underset{\Pi'}{\models} \Pi'(\mathcal{F})$$

для формул над базисом $B \cup B'$. Отсюда следует, в частности, что в результате указанного структурного моделирования обеих частей тождества t , являющихся формулами из $\mathcal{U}_B^\Phi$, получается тождество t' для формул из $\mathcal{U}_{B'}^\Phi$, которое мы будем обозначать через $\Pi'(t)$. Множество формул вида $\Pi'(\mathcal{F})$, где $\mathcal{F} \in \mathfrak{F} \subseteq \mathcal{U}_B^\Phi$, будем обозначать через $\Pi'(\mathfrak{F})$, а множество тождеств вида $\Pi'(t)$, где $t \in \tau$ — тождество над $\mathcal{U}_B^\Phi$, — через $\Pi'(\tau)$.

Рассмотрим теперь вопросы моделирования ЭП формул в базисе B с помощью ЭП формул базиса B' . Пусть $\Phi' = (\Phi'_1, \dots, \Phi'_b)$ — система формул перехода от базиса B к базису B' , а $\Pi' = (\Pi'_1, \dots, \Pi'_b)$ — система тождеств перехода, связанная с Φ' . Заметим, что любое ЭП для формул из $\mathcal{U}_B^\Phi$, имеющее вид

$$\mathcal{F} \underset{\tau}{\mapsto} \widehat{\mathcal{F}}, \quad (5.1)$$

может быть «промоделировано» с помощью ЭП для формул из $\mathcal{U}_{B'}^{\Phi'}$ вида

$$\mathcal{F}' \underset{\tau'}{\mapsto} \widehat{\mathcal{F}'}, \quad (5.2)$$

где $\mathcal{F}' = \Pi'(\mathcal{F})$, $\widehat{\mathcal{F}'} = \Pi'(\widehat{\mathcal{F}})$ и $\tau' = \Pi'(\tau)$.

Действительно, пусть ЭП (5.1) является однократным ЭП на основе тождества t , $t \in \tau$, которое имеет вид

$$t : \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_q) = \mathfrak{B}(x_1, \dots, x_q),$$

и пусть формула $\widehat{\mathcal{F}}$ получается в результате замены подформулы $\mathfrak{A}(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_q)$ формулы $\mathcal{F}$ формулой $\mathfrak{B}(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_q)$. Тогда тождество $t' = \Pi'(t)$ имеет вид

$$t' : \mathfrak{A}'(x_1, \dots, x_q) = \mathfrak{B}'(x_1, \dots, x_q),$$

где $\mathfrak{A}' = \Pi'(\mathfrak{A})$ и $\mathfrak{B}' = \Pi'(\mathfrak{B})$, а формула $\widehat{\mathcal{F}}'$ может быть получена из формулы $\mathcal{F}'$ в результате замены ее подформулы $\mathfrak{A}'(\mathcal{F}'_1, \dots, \mathcal{F}'_q)$, где $\mathcal{F}'_j = \Pi'(\mathcal{F}_j)$ для всех j , $j \in [1, q]$, формулой $\mathfrak{B}'(\mathcal{F}'_1, \dots, \mathcal{F}'_q)$.

Моделирование кратного ЭП вида (5.1) с помощью кратного ЭП вида (5.2) осуществляется путем последовательного моделирования однократных ЭП, составляющих ЭП (5.1). Описанное выше моделирование позволяет выполнять ЭП для тех эквивалентных формул из $\mathcal{U}_{B'}^{\Phi}$, которые принадлежат множеству $\Pi'(\mathcal{U}_B^{\Phi})$, то есть являются «моделями» формул из $\mathcal{U}_B^{\Phi}$, на основе системы тождеств $\Pi'(\tau)$, являющихся «моделями» тождеств из τ . Для того чтобы проводить ЭП для произвольных формул из $\mathcal{U}_{B'}^{\Phi}$ с использованием системы тождеств $\Pi'(\tau)$, выберем какую-либо систему формул перехода $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_{b'})$ от базиса B' к базису B и рассмотрим связанную с ней систему тождеств перехода $\Pi = (\Pi_1, \dots, \Pi_{b'})$.

Пусть $\check{\Pi}$ — система тождеств вида $\check{\Pi} = \Pi'(\Pi)$ для ЭП формул из $\mathcal{U}_B^\Phi$, которая получается в результате структурного моделирования правых частей тождеств из Π на основе системы тождеств Π' . Для произвольной формулы $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}' \in \mathcal{U}_B^\Phi$, положим

$$\check{\Pi}(\mathcal{F}') = \Pi'(\Pi(\mathcal{F}'))$$

и заметим, что

$$\mathcal{F}' \underset{\check{\Pi}}{\models} \check{\mathcal{F}}' = \check{\Pi}(\mathcal{F}'), \quad \check{\mathcal{F}}' \in \Pi'(\mathcal{U}_B^\Phi).$$

В силу сказанного выше, отсюда вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 5.2 (теорема перехода)

Пусть τ — КПСТ для ЭП формул из $\mathcal{U}_B^\Phi$, а Π' и Π — системы тождеств для перехода от базиса B к базису B' и от базиса B' к базису B соответственно. Тогда система тождеств $\Pi'(\tau) \cup \Pi'(\Pi)$ является КПСТ для ЭП формул из $\mathcal{U}_{B'}^\Phi$.

Следствие

Из системы тождеств $\tau^{\text{осн}}$ для ЭП формул из $\mathcal{U}^\Phi$ (см. § 3) указанным в теореме способом можно получить КПСТ для ЭП формул в любом базисе B .

Аналогичным образом на основе теоремы 5.1 решаются вопросы построения КПСТ для ЭП СФЭ в произвольном базисе.

§6. Контактные схемы и π -схемы, оценка их числа. Особенности функционирования многополюсных схем

Рассмотрим класс контактных схем, в которых реализация ФАЛ осуществляется не с помощью преобразования входных значений в выходные, как это происходит, например, в схемах из функциональных элементов, а в результате передачи значений по ребрам графа, проводимостью которого «управляют» входные БП. Ребро или дуга графа с пометкой x_i ($\bar{x}_i$) называется *замыкающим* (соответственно *размыкающим*) контактом БП x_i .

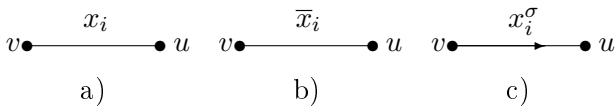


Рис. 6.1: типы контактов

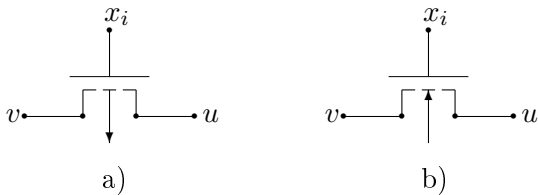


Рис. 6.2: физическая интерпретация контактов

Считается, что контакт вида x_i^σ , $\sigma \in \{0, 1\}$, проводит тогда и только тогда, когда $x_i = \sigma$, причем ориентированный контакт, то есть контакт, связанный с дугой, проводит только в соответствующем направлении.

С точки зрения управления проводимостью неориентированный размыкающий (замыкающий) контакт БП x_i функционирует как p -МОП (соответственно n -МОП) транзистор, на затвор которого поступает БП x_i (см. рис. 6.2а и 6.2b), а аналогичный ориентированный контакт — как МОП-транзистор соответствующего типа с диодом Шоттки. Кроме того, ориентированный контакт вида x_i^σ , идущий из вершины v в вершину u (см. рис. 6.1с), часто рассматривают как команду условного перехода из v в u , который выполняется, если $x_i = \sigma$.

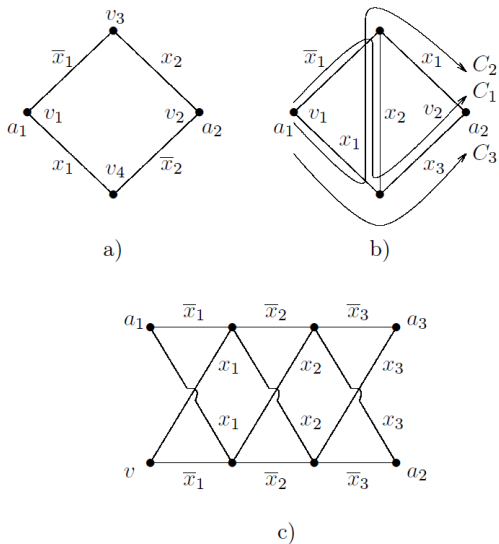


Рис. 6.3: некоторые КС от БП x_1, x_2, x_3

Пусть Σ — КС от БП $X(n)$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — набор из B^n . Определим сеть $\Sigma|_\alpha$ как сеть, получающуюся из Σ в результате удаления всех ребер (дуг) с пометками $x_1^{\bar{\alpha}_1}, \dots, x_n^{\bar{\alpha}_n}$, то есть ребер, которые не проводят на наборе α , и снятия пометок с остальных ребер Σ . Для вершин v и u КС Σ введем *функцию проводимости от вершины v к вершине u* как ФАЛ $g_{v,u}(x_1, \dots, x_n)$, которая равна 1 на наборе $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B^n$ тогда и только тогда, когда в сети $\Sigma|_\alpha$ существует $(v - u)$ -цепь, то есть тогда и только тогда, когда в Σ имеется цепь из проводящих на наборе α контактов вида $x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n}$, идущая из v в u . Будем говорить также, что ФАЛ $g_{v,u}$ является *функцией достижимости вершины u из вершины v* , или, иначе, *реализуется между вершинами v и u* .

Из определения следует, что для нахождения ФАЛ $g_{v,u}(x_1, \dots, x_n)$ достаточно просмотреть все наборы α , $\alpha \in B^n$, и для каждого из них выяснить наличие или отсутствие в Σ цепи, состоящей из проводящих на наборе α контактов, которая идет из v в u . Так, просматривая все наборы значений БП x_1, x_2 , можно убедиться в том, что ФАЛ проводимости $g_{v_1,v_2}(x_1, x_2)$ в КС Σ , показанной на рис. 6.3а, равна $x_1 \oplus x_2$, а ФАЛ проводимости g_{v_3,v_4} равна 0. Будем считать, что в каждой вершине $(1, m)$ -КС $\Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1; a_2, \dots, a_{m+1})$ реализуется ФАЛ проводимости от входа a_1 к этой вершине и что Σ реализует систему ФАЛ $F = (f_1, \dots, f_m)$, где f_j — ФАЛ проводимости от a_1 к выходу с пометкой a_{j+1} , $j \in [1, m]$. При этом, очевидно, в вершине a_1 реализуется ФАЛ 1, которую в дальнейшем по умолчанию будем использовать в качестве пометки единственного входа $(1, m)$ -КС.

Так, КС, изображенные на рис. 6.3а, 6.3b и 6.3с, реализуют ФАЛ $x_1 \oplus x_2$, $H(x_1, x_2, x_3)$ и набор ФАЛ $(x_1 \oplus x_2 \oplus x_3, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1)$ соответственно. На рис. 6.4а показана $(1, 2^n)$ -КС $\mathcal{D}(x_1, \dots, x_n; 1; a_0, \dots, a_{2^n-1})$, которая называется $(1, 2^n)$ -контактным деревом порядка n от БП $X(n)$. Легко видеть, что в выходной вершине a_i , $i = 0, \dots, 2^n - 1$, этого контактного дерева (КД) реализуется ЭК вида $x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}$, где $\nu(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = (i - 1)$, и что ФАЛ проводимости между любыми его выходами равна 0. Таким образом, $(1, 2^n)$ -КД порядка n является дешифратором порядка n , то есть схемой, реализующей систему Q_n из всех ЭК ранга n от БП $X(n)$.

Схемы Σ' и Σ'' считаются, как обычно, *изоморфными*, если изоморфны соответствующие им графы, и *эквивалентными*, если они реализуют равные системы ФАЛ. Изоморфные КС, очевидно, эквивалентны.

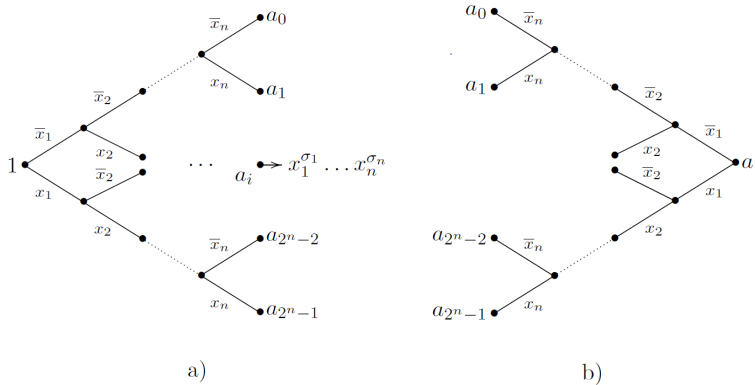


Рис. 6.4: $(1, 2^n)$ - и $(2^n, 1)$ -контактные деревья порядка n

Для множества C , состоящего из контактов вида $x_{i_1}^{\sigma_1}, \dots, x_{i_r}^{\sigma_r}$ в КС Σ , определим его *функцию проводимости* $K(C)$ и *функцию отделимости* $J(C)$ как ФАЛ вида $x_{i_1}^{\sigma_1} \cdots x_{i_r}^{\sigma_r}$ и $x_{i_1}^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_{i_r}^{\sigma_r}$ соответственно. При этом множество C называется *проводящим (отделимым)*, если $K(C) \neq 0$ ($J(C) \neq 1$), и *нулевым* (соответственно *единичным*) в противном случае. Заметим, что в результате приведения подобных отличная от 0 ФАЛ $K(C)$ и отличная от 1 ФАЛ $J(C)$ могут быть преобразованы в ЭК и ЭД соответственно. Очевидно, также, что

$$K(C') \geq K(C) \quad \text{и} \quad J(C') \leq J(C),$$

если $C' \subseteq C$.

Из введенных определений следует, что ФАЛ g , реализуемая КС $\Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1; a_2)$, обращается в 1 (обращается в 0) на наборе α , $\alpha \in B^n$, тогда и только тогда, когда в Σ существует множество контактов C , образующее простую проводящую $(a_1 - a_2)$ -цепь (соответственно тупиковое отделимое $(a_1|a_2)$ -сечение), для которого $K(C) = 1$ (соответственно $J(C) = 0$) на наборе α . Таким образом,

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_n) &= K(C_1) \vee \dots \vee K(C_t) = \\ &= J(S_1) \& \dots \& J(S_r), \quad (6.1) \end{aligned}$$

где $C_1, \dots, C_t$ и $S_1, \dots, S_r$ — все простые проводящие $(a_1 - a_2)$ -цепи и все тупиковые отделимые $(a_1|a_2)$ -сечения КС Σ .

Заметим, что первая из формул (6.1) может быть преобразована в ДНФ, а вторая — в КНФ, в результате приведения подобных (см. §3), если $g \neq 0$ и $g \neq 1$ соответственно. Так, в КС, показанной на рис. 6.3b, имеются три простые проводящие цепи C_1 , C_2 и C_3 , которые идут из a_1 в a_2 . При этом

$$K(C_1) = \bar{x}_1 x_2 x_3, \quad K(C_2) = x_1 x_2 x_1 = x_1 x_2, \quad K(C_3) = x_1 x_3$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2, x_3) &= \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \vee x_1 x_3 = \\ &= x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_3 x_1 = H(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

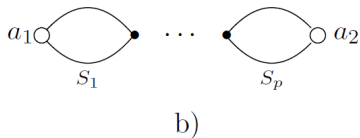
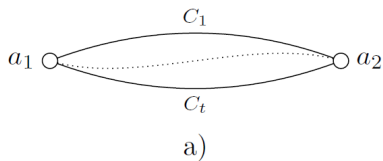


Рис. 6.5: КС, моделирующие ДНФ и КНФ

Простейшей π -схемой считается любая $(1, 1)$ -КС, которая состоит из одного контакта, соединяющего полюса (см. рис. 6.6a). Если π -схемы Σ_1 и Σ_2 уже определены, то $(1, 1)$ -КС Σ' (Σ''), которая получается в результате их параллельного (соответственно последовательного) соединения (см. рис. 6.6b и 6.6c) тоже является π -схемой. Заметим, что при этом вход (выход) Σ' является результатом отождествления входов (соответственно выходов) Σ_1 и Σ_2 , тогда как входом Σ'' является вход Σ_1 , выходом Σ'' — выход Σ_2 , а выход Σ_1 отождествляется с входом Σ_2 и становится внутренней вершиной Σ'' . Легко видеть, что π -схема, показанная на рис. 6.6a, реализует ФАЛ x_i^σ , а π -схемы Σ' и Σ'' (см. рис. 6.6b и 6.6c) — ФАЛ $f_1 \vee f_2$ и $f_1 \& f_2$ соответственно, где f_1 и f_2 — ФАЛ, реализуемые π -схемами Σ_1 и Σ_2 соответственно.

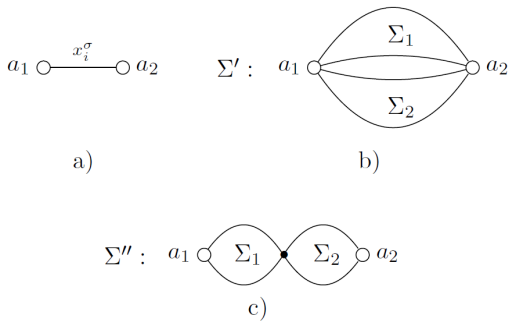


Рис. 6.6: к определению π -схемы

Лемма 6.1

Любой π -схеме Σ можно сопоставить эквивалентную ей формулу $\mathcal{F}$ из $\mathcal{U}^\Phi$ с поднятыми отрицаниями такую, что $R(\mathcal{F}) = L(\Sigma)$ и обратно.

Доказательство.

Построим формулу $\mathcal{F}$ индукцией по строению π -схемы Σ .
 Если Σ — простейшая π -схема вида x_i^σ , то положим $\mathcal{F} = x_i^\sigma$.
 Если π -схемам Σ_1 и Σ_2 уже сопоставлены формулы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ с поднятыми отрицаниями, то π -схеме Σ' (Σ''), получающейся в результате параллельного (соответственно последовательного) соединения Σ_1 и Σ_2 , сопоставим формулу $\mathcal{F}' = \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$ (соответственно $\mathcal{F}'' = \mathcal{F}_1 \& \mathcal{F}_2$). При этом

$$R(\mathcal{F}') = R(\mathcal{F}'') = R(\mathcal{F}_1) + R(\mathcal{F}_2)$$

и, следовательно, по индуктивному предположению,

$$R(\mathcal{F}') = R(\mathcal{F}'') = L(\Sigma_1) + L(\Sigma_2) = L(\Sigma).$$

Аналогичным образом, индукцией по строению формулы $\mathcal{F}$ с поднятыми отрицаниями можно найти эквивалентную ей π -схему Σ такую, что $L(\Sigma) = R(\mathcal{F})$.

Лемма доказана.



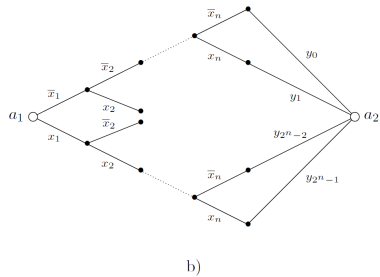
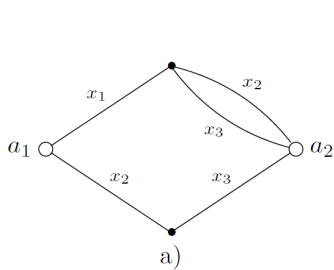


Рис. 6.7: примеры π -схем

На рис 6.7а показана π -схема, которая реализует ФАЛ $H(x_1, x_2, x_3)$ и соответствует формуле:

$$H(x_1, x_2, x_3) = x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2x_3,$$

а на рис. 6.7b — π -схема, которая построена на основе контактного дерева и реализует ФАЛ μ_n — мультиплексорную ФАЛ порядка n , — в соответствии с формулой

$$\begin{aligned} \mu_n(x_1, \dots, x_n, y_0, \dots, y_{2^n-1}) = \\ = \bigvee_{\sigma_1 \in B} x_1^{\sigma_1} \left(\bigvee_{\sigma_2 \in B} x_2^{\sigma_2} \left(\dots \left(\bigvee_{\sigma_n \in B} x_n^{\sigma_n} y_{\nu(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} \right) \dots \right) \right). \end{aligned}$$

Схема, моделирующая совершенную ДНФ ФАЛ f , называется *канонической КС* для этой ФАЛ.

Будем называть $(1, m)$ -КС *приведенной*, если все изолированные вершины Σ являются ее полюсами, а все контакты и остальные вершины Σ принадлежат простым проводящим цепям, соединяющим ее вход и выходы. При этом КС $\hat{\Sigma}$, которая получается из КС Σ удалением «лишних», то есть не принадлежащих цепям указанного вида, неполюсных вершин и контактов, является эквивалентной Σ приведенной КС такой, что $L(\hat{\Sigma}) \leq L(\Sigma)$. Заметим, что приведенная КС не содержит петель, а приведенная КС, не реализующая нулевых ФАЛ, является связным графом. Так, КС, показанная на рис. 6.3с, не является приведенной, а соответствующая ей приведенная КС получается из нее удалением вершины v .

Рассмотрим теперь некоторые оценки числа контактных схем различных типов. Пусть $\mathcal{U}^K$ и $\mathcal{U}^\pi$ — множество всех КС из неориентированных контактов и множество всех π -схем соответственно. Если $\mathcal{U}^A$ — один из указанных классов схем, то через $\mathcal{U}^A(L, n)$ будем обозначать множество приведенных $(1, 1)$ -схем Σ из $\mathcal{U}^A$ от БП $X(n)$, для которых $L(\Sigma) \leq L$. Для любого множества схем $\mathcal{U}$ через $|\mathcal{U}|$ и $\|\mathcal{U}\|$ будем по-прежнему обозначать число попарно не изоморфных и попарно не эквивалентных схем в $\mathcal{U}$ соответственно. При этом для любого из введенных выше множеств схем неравенство (1.7) будет выполняться.

Лемма 6.2

При любых натуральных L и n выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}^{\pi}(L, n)\| \leqslant (12n)^L. \quad (6.2)$$

Доказательство.

В силу леммы 6.1, достаточно доказать, что число попарно не эквивалентных формул $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$ с поднятыми отрицаниями над базисом B_0 , для которых $R(\mathcal{F}) \leq L$, не превосходит $(12n)^L$. Для этого сопоставим формуле $\mathcal{F}$ указанного вида формулу $\mathcal{F}'$ из $\mathcal{U}_{\{\&, \vee\}}^\Phi$ от БП $x_1, \dots, x_{2n}$, которая получается из $\mathcal{F}$ заменой каждой ее подформулы $\bar{x}_i$, $i \in [1, n]$, формулой x_{i+n} и для которой, в силу замечания к лемме 2.1,

$$L(\mathcal{F}') = R(\mathcal{F}) - 1 \leq L - 1.$$

При таком сопоставлении неэквивалентные формулы переходят в неэквивалентные, и поэтому число попарно не эквивалентных формул рассматриваемого вида не больше, чем $\left| \mathcal{U}_{\{\&, \vee\}}^\Phi(L - 1, 2n) \right|$, откуда, в силу замечания к лемме 4.2, следует (6.2).

Лемма доказана.



Лемма 6.3

При любых натуральных L и n выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}^K(L, n)\| \leq (8nL)^L.$$

Доказательство

Возьмем произвольную КС $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1; a_2)$, $\Sigma \in \mathcal{U}^K(L, n)$, и выделим в ней остовное дерево $\mathcal{D}$ с корнем a_2 так, чтобы вершина a_1 была листом $\mathcal{D}$. Пусть, далее, $\mathcal{D}'$ — связанное с $\mathcal{D}$ остовное наддерево КС Σ , которое получается путем присоединения каждого из не вошедших в $\mathcal{D}$ ребер Σ к одной из своих концевых вершин, отличной от a_1 , так, чтобы все ребра, инцидентные a_2 в Σ , были бы инцидентны a_2 в $\mathcal{D}'$. Рассмотрим ориентированное упорядоченное дерево $\mathcal{D}''$, получающееся из $\mathcal{D}'$ введением (условной) ориентации всех его ребер по направлению к корню и таким их упорядочением, при котором вершина a_1 становится первым листом $\mathcal{D}''$.

Продолжение доказательства

Заметим, что число ребер (вершин, листьев) дерева $\mathcal{D}''$ не больше, чем L (соответственно $L + 1$, L), и поэтому, в силу (1.4), число таких деревьев с учетом пометок их ребер символами $x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ не больше, чем $(8n)^L$.

Заметим также, что КС Σ может быть получена в результате присоединения каждого листа дерева $\mathcal{D}''$ к одной из его вершин, отличной от a_2 . Следовательно,

$\|\mathcal{U}^K(L, n)\| \leq |\mathcal{U}^K(L, n)| \leq (8nL)^L$. Лемма доказана. $\square$

Рассмотрим, в заключение, особенности функционирования КС с несколькими входами. Будем считать, что в каждой вершине (p, q) -КС Σ реализуется столбец, составленный из p ФАЛ проводимости от входов Σ к этой вершине, а сама КС Σ реализует матрицу, которая состоит из q столбцов, реализованных на ее выходах. Таким образом, функционирование КС $\Sigma =$
 $= \Sigma(x_1, \dots, x_n; a'_1, \dots, a'_p; a''_1, \dots, a''_q)$ представляет собой матрицу $F = F(x_1, \dots, x_n)$ с p строками, q столбцами и элементами из $P_2(n)$, для которой $F\langle i, j \rangle$ — ФАЛ, реализуемая между a'_i и a''_j , где $i \in [1, p]$ и $j \in [1, q]$, то есть при любом α , $\alpha \in B^n$, матрица $F(\alpha)$ является матрицей достижимости сети $\Sigma|_\alpha$. В частности, функционирование $(1, q)$ -КС представляет собой набор (строку) из q ФАЛ проводимости от ее входа к выходам, а функционирование $(p, 1)$ -КС — столбец из p ФАЛ проводимости от ее входов к выходу.

Так, КС $\Sigma(x_1, x_2, x_3; a_1, v; a_2, a_3)$, показанная на рисунке 6.3с реализует матрицу $\begin{bmatrix} l_3 & \bar{l}_3 \\ \bar{l}_3 & l_3 \end{bmatrix}$ от БП $X(3)$, а на рис. 6.4b приведено $(2^n, 1)$ -КД порядка n от БП $X(n)$, которое имеет вид $\mathcal{D}(x_1, \dots, x_n; a_0, \dots, a_{2^n-1}; a)$ и реализует столбец из всех ЭК множества Q_n , упорядоченных сверху вниз по возрастанию их номеров.

В соответствии с общими правилами функционирования КС $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$ с неразделенными полюсами определяется как функционирование КС с разделенными полюсами вида $\Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m; a_1, \dots, a_m)$.

В этом случае матрица F является рефлексивной и транзитивной матрицей, а если, кроме того, Σ — неориентированная сеть, то и — симметричной матрицей. Заметим также, что функционирование $(1,1)$ -КС из неориентированных контактов по существу не отличается от функционирования соответствующей двухполюсной КС с неразделенными полюсами.

В частности, показанная на рис. 6.3с КС с неразделенными полюсами a_1, a_2, a_3 реализует матрицу $\begin{bmatrix} 1 & l_3 & \bar{l}_3 \\ l_3 & 1 & 0 \\ \bar{l}_3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, КС из тождественных вершин реализует единичную матрицу, если каждая ее вершина является входом и выходом с одним и тем же номером и т. д.

С другой стороны, любая симметрическая, транзитивная и рефлексивная матрица F , $F \in (P_2(n))^{m,m}$, реализуется КС $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$, которая представляет собой объединение всех КС $\Sigma_{ij} = \Sigma_{ij}(x_1, \dots, x_n; a_i, a_j)$, где $1 \leq i < j \leq m$, а КС Σ_{ij} является π -схемой и построена по совершенной ДНФ ФАЛ $F \langle i, j \rangle$ и считается *канонической КС матрицы F* .

§ 7. Эквивалентные преобразования контактных схем.

Основные тождества, вывод вспомогательных и обобщенных тождеств

Рассмотрим вопросы ЭП для КС из $\mathcal{U}^K$ с неразделенными (бесповторными) полюсами. Напомним, что эквивалентность КС $\Sigma' = \Sigma'(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$ и $\Sigma'' = \Sigma''(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$, то есть справедливость тождества $t : \Sigma' \sim \Sigma''$ означает, что для любых i и j из отрезка $[1, m]$ ФАЛ проводимости от a_i к a_j в КС Σ' равна ФАЛ проводимости от a_i к a_j в КС Σ'' . На рис. 7.1a–7.1e и 7.1f приведены пары эквивалентных КС, образующие тождества t_1 – t_5 и $t_6^{(m)}$, $m = 1, 2, \dots$, соответственно, которые мы будем называть *основными тождествами* для ЭП КС.

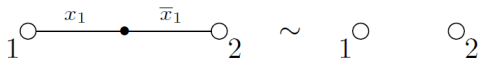
a) $t_1 :$

$$\bullet \sim \emptyset$$

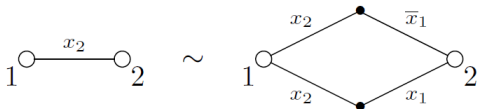
b) $t_2 :$



c) $t_3 :$



d) $t_4 :$



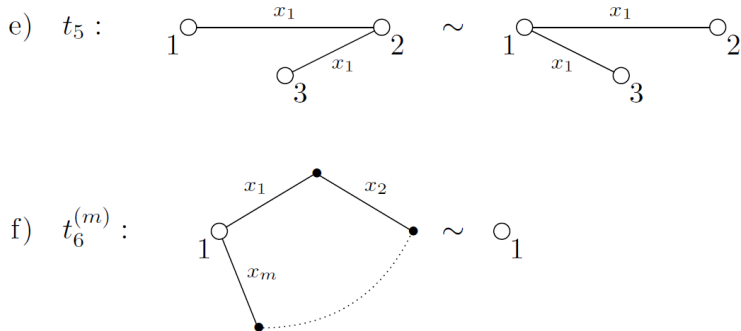


Рис. 7.1: основные тождества для КС

Определим подстановку для КС как переименование (с возможным отождествлением и инвертированием) БП, а также переименование (с возможным отождествлением и снятием) полюсов. Заметим, что применяя одну и ту же подстановку к двум эквивалентным КС, мы получим эквивалентные КС. Действительно, для переименования БП и переименования без отождествления полюсов это очевидно, а в случае отождествления полюсов эквивалентность получаемых КС вытекает из того, что матрица достижимости КС, являющейся результатом отождествления, однозначно определяется матрицей достижимости исходной КС. На рис. 7.2а (7.2b) показана подстановка $\hat{t}_4$ тождества t_4 (соответственно $\hat{t}_5$ тождества t_5), связанная с переименованием БП x_2 в x_1 (соответственно полюсов $1 = 3$ в 1).

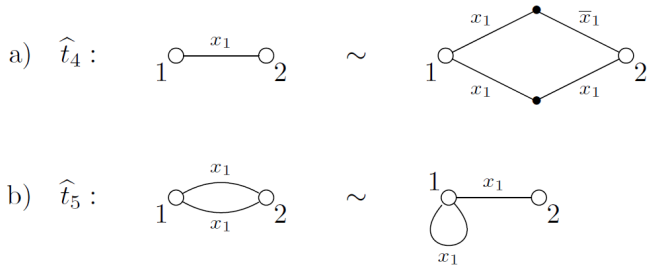


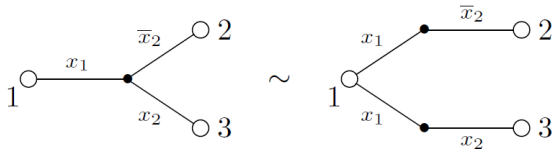
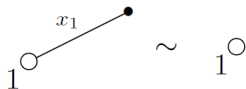
Рис. 7.2: подстановки для основных тождеств

Понятие подсхемы для КС из рассматриваемого класса определяется так. Для подсхемы Σ' КС Σ имеет место включение $V(\Sigma') \subseteq V(\Sigma)$ и $E(\Sigma') \subseteq E(\Sigma)$, а полюсами Σ' являются все принадлежащие ей полюса КС Σ и все те ее вершины, которые инцидентны в Σ ребрам из $E(\Sigma) \setminus E(\Sigma')$, и, возможно, некоторые другие вершины. При таком определении подсхемы для рассматриваемого класса КС будет выполняться принцип эквивалентной замены.

Рассмотрим примеры ЭП контактных схем с помощью системы основных тождеств. На рис. 7.3а–7.3е приведены тождества t_7 – t_{11} , которые мы будем называть *вспомогательными*. Тождество t_{10} называют иногда тождеством замыкания по транзитивности, а тождество t_{11} — «леммой» о звезде.

Лемма 7.1

Имеет место выводимость $\{t_1 - t_5, t_6^{(1)}, t_6^{(2)}\} \models \{t_7 - t_{11}\}$.

a) $t_7 :$ b) $t_8 :$ c) $t_9 :$ 

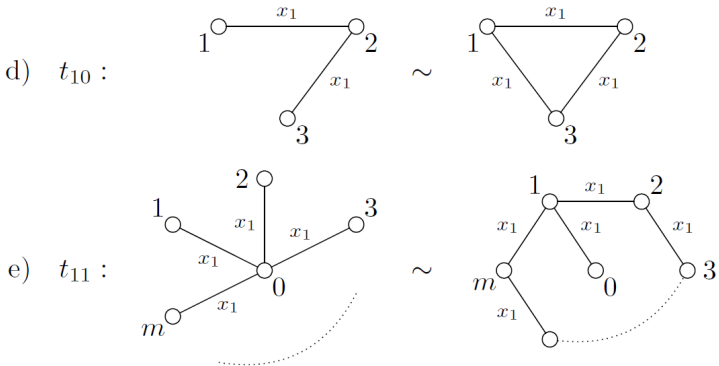


Рис. 7.3: вспомогательные тождества для КС

Доказательство.

Заметим, что выводимость $\{t_5, t_6^{(1)}\} \Rightarrow t_7$ доказывается применением тождества $t_6^{(1)}$ к правой части тождества $\hat{t}_5$ (см. рис. 7.2b) для удаления из нее «висячего» цикла длины 1. Выводимость тождеств $t_8 - t_{11}$ из основных тождеств $\{t_1 - t_5, t_6^{(1)}, t_6^{(2)}\}$ показана на рис. 7.4–7.7 соответственно, где Σ_i и $\tilde{\Sigma}_i$ — левая и правая части тождества t_i , $i \in [8, 11]$. $\square$

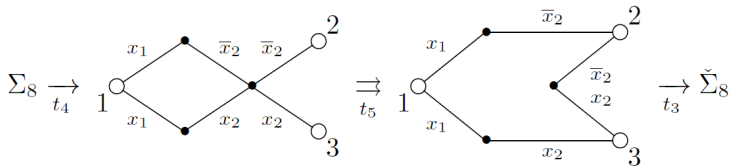


Рис. 7.4: ВЫВОД t_8

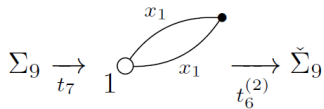
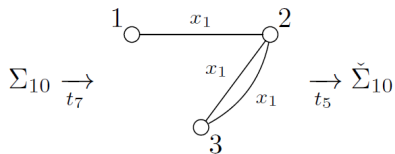


Рис. 7.5: ВЫВОД t_9

Рис. 7.6: вывод t_{10}

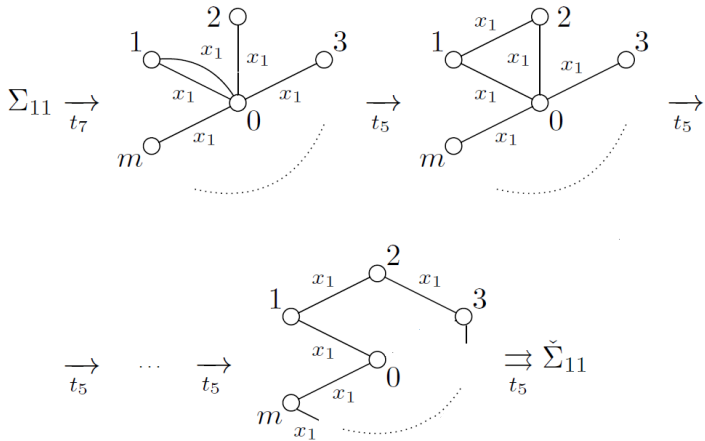


Рис. 7.7: вывод t_{11}

Обобщим тождества t_1-t_{11} на случай КС от БП $X(n)$, где $n \geq 2$. Для каждого i , $i \in [1, 2^n]$, сопоставим ЭК вида $x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}$, где $\nu(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = i - 1$, моделирующую ее цепочку $I_i^{(n)}$, и пусть

$$\begin{aligned} I_i^{(n)} &= I_i, & i \in [1, 2^n], & & I &= I_{2^n}; \\ I_i^{(n-1)} &= I'_i, & i \in [1, 2^{n-1}], & & I' &= I'_{2^{n-1}}; \\ I_i^{(n-2)} &= I''_i, & i \in [1, 2^{n-2}], & & I'' &= I''_{2^{n-2}}. \end{aligned}$$

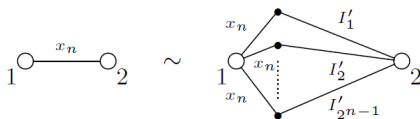
a) $t_2^{(n)}$:



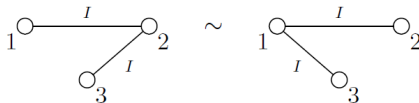
b) $t_3^{(n)}$:



c) $t_4^{(n)}$:

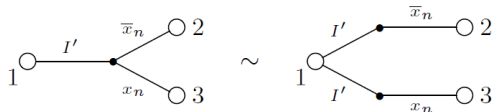
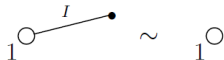
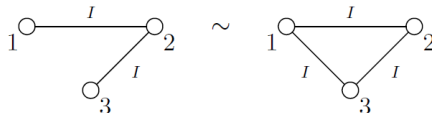
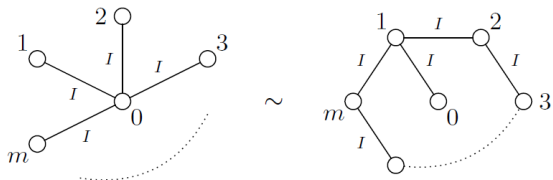


d) $t_5^{(n)}$:



e) $t_7^{(n)}$:



f) $t_8^{(n)}$:g) $t_9^{(n)}$:h) $t_{10}^{(n)}$:i) $t_{11}^{(n)}$:Рис. 7.8: обобщенные тождества порядка n для КС

Систему тождеств $\tau^{(n)} = \{t_1^{(n)}, \dots, t_{11}^{(n)}\}$, где $t_1^{(n)} = t_1$, $t_6^{(n)}$ — соответствующее основное тождество (см. рис. 7.1f), $t_2^{(n)}$ — система, состоящая из тождеств, показанных на рис. 7.8a, где $\tilde{I}$ — произвольная перестановка цепочки I , а остальные тождества приведены на рис. 7.8b–7.8i, будем называть системой *обобщенных тождеств порядка n* . При этом система $\tau_n = \{t_1, \dots, t_5, t_6^{(1)}, \dots, t_6^{(n)}\}$ считается системой основных тождеств порядка n , а система всех основных тождеств обозначается через τ_∞ .

Лемма 7.2

При $n \geq 2$ имеет место выводимость $\tau_n \Rightarrow \tau^{(n)}$.

Доказательство.

Отметим сначала следующие очевидные выводимости:

$$\{t_2\} \Rightarrow t_2^{(n)}, \quad \{t_9\} \Rightarrow t_9^{(n)}.$$

Выводимость $\tau_n \Rightarrow t_i^{(n)}$, $i = 8, 3, 4, 5$, докажем индукцией по n , $n \geq n_i$, где $n_3 = n_5 = 1$ и $n_8 = n_4 = 2$. Базис этой индукции составляет тождество $t_i = t_i^{(n_i)}$, $i = 8, 3, 4, 5$, а обоснование индуктивного перехода дает выводимость правой части $\check{\Sigma}_i^{(n)}$ тождества $t_i^{(n)}$, $n > n_i$, из его левой части $\Sigma_i^{(n)}$, показанная на рис. 7.9–7.12.

Легко видеть, что выводимости

$$\{t_2^{(n)}, t_5^{(n)}\} \Rightarrow t_7^{(n)}, \quad \{t_7^{(n)}, t_5^{(n)}\} \Rightarrow \{t_{10}^{(n)}, t_{11}^{(n)}\}$$

при $n \geq 2$ доказываются аналогично тому, как это делалось для случая $n = 1$ (см. рис. 7.6, 7.7). Лемма доказана. □

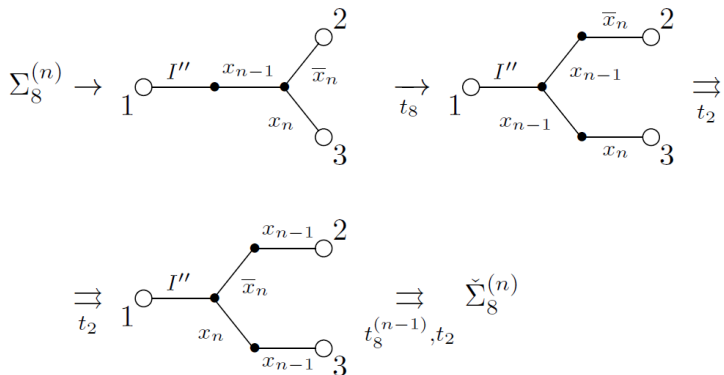


Рис. 7.9: вывод $t_8^{(n)}$

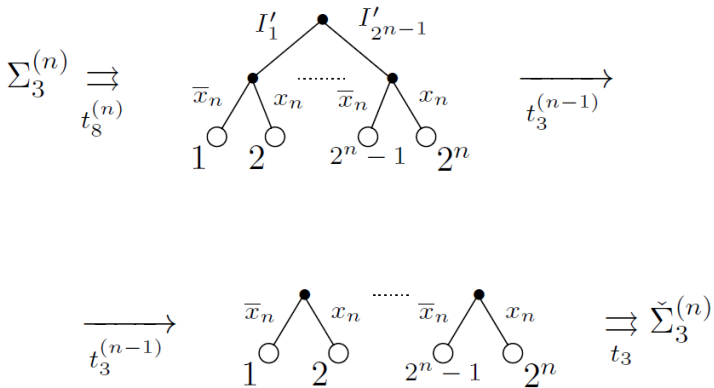


Рис. 7.10: вывод $t_3^{(n)}$

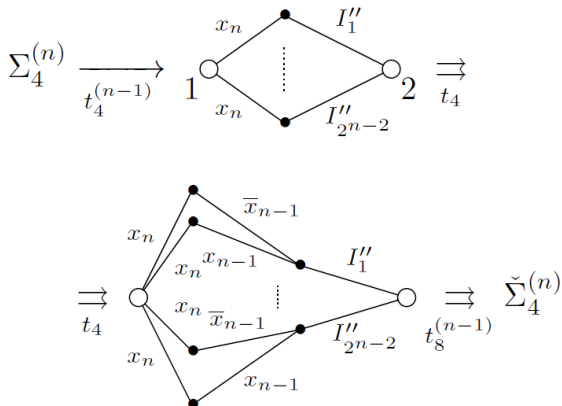


Рис. 7.11: вывод $t_4^{(n)}$

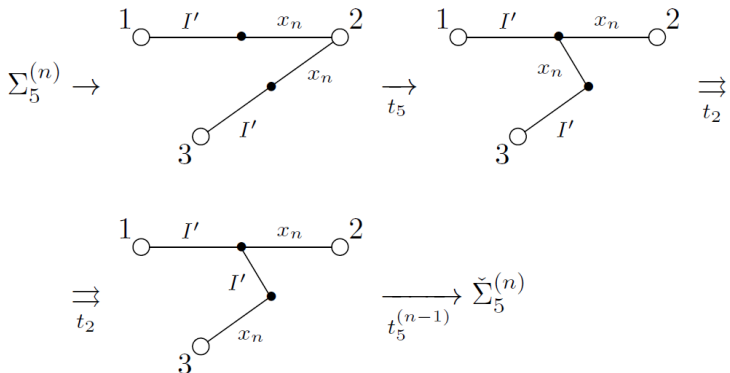


Рис. 7.12: ВЫВОД $t_5^{(n)}$

§8. Полнота системы основных тождеств и отсутствие конечной полной системы тождеств в классе контактных схем

Докажем сначала полноту системы основных тождеств τ_∞ для ЭП КС. Для этого, как обычно, достаточно доказать, что с помощью ЭП на основе системы τ_∞ произвольную КС из $\mathcal{U}^K$ можно привести к каноническому виду. Напомним, что каноническая КС $\hat{\Sigma}(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$, или, иначе, *каноническая КС порядка n* , представляет собой объединение канонических $(1, 1)$ -КС вида $\hat{\Sigma}_{ij}(x_1, \dots, x_n; a_i, a_j)$, построенных на основе совершенных ДНФ ФАЛ проводимости от a_i к a_j для всех i и j таких, что $1 \leq i < j \leq m$.

Любую цепь $I_i^{(n)}$, где $i \in [1, 2^n]$, а также любую цепь, которая получается из $I_i^{(n)}$ перестановкой контактов, будем называть *канонической цепью порядка n* .

Заметим, что КС $\hat{\Sigma}(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$ является канонической КС порядка n тогда и только тогда, когда она обладает следующими свойствами:

(1) любой контакт $\hat{\Sigma}$ принадлежит некоторой канонической цепи порядка n , являющейся подсхемой схемы $\hat{\Sigma}$, причем полюсами этой подсхемы служат только концевые вершины данной цепи;

(2) любая внутренняя вершина $\hat{\Sigma}$ является внутренней вершиной некоторой цепи из пункта (1);

(3) в КС $\hat{\Sigma}$ отсутствуют «висячие циклы» (см. тождество $t_6^{(n)}$) и «параллельные» цепи, то есть канонические цепи порядка n из пункта (1), которые соединяют одни и те же полюса и реализуют равные ЭК;

(4) в КС $\hat{\Sigma}$ нет существенных транзитных проводимостей, то есть наличие цепей вида $I_i^{(n)}$, соединяющих полюс a_j с полюсом a_k и полюс a_k с полюсом a_t (см. рис. 8.1a), влечет наличие цепи такого же вида, соединяющей полюс a_j с полюсом a_t (см. рис. 8.1b).



◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ≡ ≡ ↺ 🔍 ↻

Лемма 8.1

Для любой КС Σ , где $\Sigma \in \mathcal{U}^K$ и $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$, и любой эквивалентной Σ КС $\widehat{\Sigma}(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$ канонического вида существует ЭП $\Sigma \xRightarrow{\tau_n} \widehat{\Sigma}$.

Доказательство

Построим ЭП вида

$$\Sigma \xRightarrow{\tau_n} \Sigma_1 \xRightarrow{\tau_n} \Sigma_2 \xRightarrow{\tau_n} \Sigma_3 \xRightarrow{\tau_n} \Sigma_4 = \widehat{\Sigma},$$

где КС Σ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, обладает отмеченными выше свойствами (1), ..., (i), отличающими канонические КС.

Продолжение доказательства

Первое из этих ЭП имеет вид

$$\Sigma \xRightarrow{t_4^{(n)}} \Sigma_1$$

и связано с применением к каждому контакту тождества $t_4^{(n)}$.

Существование ЭП

$$\Sigma_1 \xRightarrow{\{t_6^{(n)}, t_{11}^{(n)}, t_9^{(n)}, t_3^{(n)}, t_1^{(n)}\}} \Sigma_2 \quad (8.1)$$

докажем индукцией по числу тех внутренних вершин КС Σ_1 , которые не являются внутренними вершинами ее канонических цепей. Базис индукции составляют схемы Σ_1 , которые не имеют указанных вершин и для которых, следовательно, $\Sigma_2 = \Sigma_1$.

Продолжение доказательства

Пусть теперь КС Σ_1 имеет хотя бы одну вершину указанного вида и пусть v — одна из таких вершин. Удалим с помощью тождества $t_6^{(n)}$ все присоединенные к v «висячие» циклы и рассмотрим все остальные цепи $C_1, \dots, C_q$, концевой вершиной которых она является (см. рис. 8.2a). Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что для некоторых натуральных чисел

$$a_1 = 1 < a_2 < \dots < a_p < a_{p+1} = q + 1$$

и любого j , $j \in [1, p]$, цепи $C_{a_j}, \dots, C_{a_{j+1}-1}$ являются цепями типа $I_{i_j}^{(n)} = I_{i_j}$, где $i_1, \dots, i_p$ — различные числа отрезка $[1, 2^n]$. Применяя к каждой из этих p групп цепей одного типа тождество $t_{11}^{(n)}$, получим КС Σ'_1 , в которой из вершины v выходит по одной цепи каждого типа I_{i_j} , $j \in [1, p]$ (см. рис. 8.2b).

Продолжение доказательства

Пусть, далее, КС Σ_1'' получается из КС Σ_1' присоединением к вершине v с помощью тождества $t_9^{(n)}$ «висячих» цепей $C_{p+1}, \dots, C_{2^n}$ всех отсутствующих среди $I_{i_1}, \dots, I_{i_p}$ типов (см. рис. 8.2с), а КС Σ_1''' получается из КС Σ_1'' в результате удаления с помощью тождества $t_3^{(n)}$ вершины v вместе со всеми «инцидентными» ей цепями и устранения с помощью тождества t_1 образовавшихся при этом изолированных вершин — концевых вершин цепей $C_{p+1}, \dots, C_{2^n}$ (см. рис. 8.2d). По индуктивному предположению для КС Σ''' существует ЭП вида

$$\Sigma''' \Rightarrow \Sigma_2$$

$$\{t_6^{(n)}, t_{11}^{(n)}, t_9^{(n)}, t_3^{(n)}, t_1^{(n)}\}$$

и, следовательно, для КС Σ_1 существует ЭП (8.1).

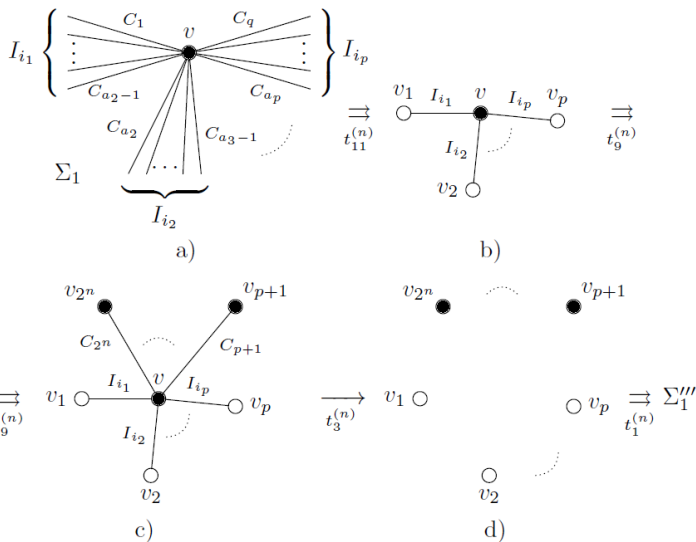


Рис. 8.2: к доказательству леммы 8.1

Продолжение доказательства

Переход от КС Σ_2 к КС Σ_3 осуществляется с помощью тождеств $t_6^{(n)}$ и $t_7^{(n)}$, а от КС Σ_2 к КС Σ_3 — с помощью тождеств $t_{10}^{(n)}$.

Лемма доказана.



Теорема 8.1

Для любых двух эквивалентных КС Σ' и Σ'' от БП $x_1, \dots, x_n$ существует ЭП вида $\Sigma' \xRightarrow{\tau_n} \Sigma''$.

Доказательство.

Пусть $\widehat{\Sigma}'$ и $\widehat{\Sigma}''$ — канонические КС от БП $x_1, \dots, x_n$, эквивалентные КС Σ' и Σ'' соответственно. Из определений следует, что $\widehat{\Sigma}' \xRightarrow{t_2^{(n)}} \widehat{\Sigma}''$, и поэтому, в силу леммы 8.1,

существует ЭП вида

$$\Sigma' \xRightarrow{\tau_n} \widehat{\Sigma}' \xRightarrow{t_2^{(n)}} \widehat{\Sigma}'' \xRightarrow{\tau_n} \Sigma''.$$

Теорема доказана.



Следствие 1

Система τ_n является КПСТ для ЭП КС из $\mathcal{U}^K$ от БП $x_1, \dots, x_n$.

Следствие 2

Система τ_∞ является ПСТ для ЭП КС из $\mathcal{U}^K$.

Докажем теперь отсутствие КПСТ в классе $\mathcal{U}^K$. Для КС Σ от БП $x_1, \dots, x_n$ и набора α , $\alpha \in B^n$, определим величину

$$\Theta(\Sigma, \alpha) = |E(\Sigma|_\alpha)| - |V(\Sigma|_\alpha)| + |c(\Sigma|_\alpha)|,$$

которая задает цикломатическое число графа $\Sigma|_\alpha$. Положим, далее,

$$\Theta(\Sigma) = \sum_{\alpha \in B^n} \Theta(\Sigma, \alpha).$$

Лемма 8.2

Если $\Sigma'(x_1, \dots, x_n) \xRightarrow{\{t_1-t_5\}} \Sigma''(x_1, \dots, x_n)$, то

$\Theta(\Sigma') = \Theta(\Sigma'')$, а если $\Sigma' \xRightarrow{\tau_k} \Sigma''$, где $k < n$, то

$\Theta(\Sigma') - \Theta(\Sigma'')$ делится на 2^{n-k} .

Докажем, что $\Theta(\Sigma') = \Theta(\Sigma'')$, если $\Sigma' \xrightarrow{t_i} \Sigma''$ для любого i из отрезка $[1, 5]$. Действительно, пусть КС Σ'' получается из КС Σ' заменой ее подсхемы $\hat{\Sigma}'_i$, которая имеет вид левой части тождества t_i , на соответствующую ей правую часть $\hat{\Sigma}''_i$ этого тождества. Нетрудно проверить, что для любого i , $i \in [1, 5]$, число линейно независимых циклов графов $\Sigma'|_\alpha$ и $\Sigma''|_\alpha$ одинаково при всех α , $\alpha \in B^n$, и, следовательно, $\Theta(\Sigma') = \Theta(\Sigma'')$.

Пусть теперь $\Sigma' \xRightarrow[\tau_k]{\tau_k} \Sigma''$, причем $k < n$. Если КС Σ' содержит в качестве подсхемы цикл из k контактов с одним полюсом, то КС Σ'' содержит вместо него один лишь полюс. Рассмотрим цикломатическое число сети $\Sigma'|_\alpha$ для различных $\alpha, \alpha \in B^n$.

Продолжение доказательства

Если цикл указанного вида в КС Σ' содержит контакты, помеченные различными буквами одной и той же БП, то, очевидно, для любого α , $\alpha \in B^n$, $\Theta(\Sigma') - \Theta(\Sigma'') = 0$. В противном случае, пусть $x_{j_1}, \dots, x_{j_m}$ — все различные БП, встречающиеся среди пометок указанного цикла, причем $m \leq k$. Заметим, что если цикл проводит на наборе α , $\alpha \in B^n$, то он проводит и на всех 2^{n-m} наборах, в которых значения переменных с индексами $j_1, \dots, j_m$ совпадают со значениями соответствующих переменных набора α . Таким образом, разность

$$\Theta(\Sigma') - \Theta(\Sigma'') = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} (\Theta(\Sigma'|_{\alpha}) - \Theta(\Sigma''|_{\alpha}))$$

делится на 2^{n-m} и, следовательно, делится на 2^{n-k}

Лемма доказана. □

Теорема 8.2

В классе $\mathcal{U}^K$ не существует конечной полной системы тождеств.

Доказательство

Проведем доказательство от противного: пусть τ — КПСТ для ЭП КС $\mathcal{U}^K$, и пусть n — максимальное число БП, встречающихся в тождествах системы τ . Тогда $\tau_n \Rightarrow \tau$ и τ_n — КПСТ для $\mathcal{U}^K$. Докажем, что $\tau_n \not\Rightarrow t_6^{(n+1)}$. Для этого рассмотрим КС Σ' , состоящую из простого цикла длины $(n+1)$, содержащего контакты с пометками x_i , $i \in [1, n+1]$, и имеющую единственный полюс с пометкой 1, которая является левой частью тождества $t_6^{(n+1)}$.

Продолжение доказательства

Очевидно, что ей эквивалентна КС Σ'' , содержащая изолированный полюс 1, которая является правой частью тождества $t_6^{(n+1)}$. Если $\tau_n \Rightarrow t_6^{(n+1)}$, то $\Sigma' \Rightarrow \Sigma''$. Согласно данным выше определениям, $\Theta(\Sigma') = 1$, $\Theta(\Sigma'') = 0$ и разность $\Theta(\Sigma') - \Theta(\Sigma'') = 1$ не делится на 2, что противоречит утверждению леммы 8.2. Таким образом, тождество $t_6^{(n+1)}$ не выводится из системы τ_n , а значит, и из системы τ . Отсюда следует, что τ не может являться КПСТ для ЭП КС из класса $\mathcal{U}^K$.

Теорема доказана. □

§ 9. Операция суперпозиции и ее корректность для некоторых типов схем. Разделительные контактные схемы и лемма Шеннона

В основе большинства структурных преобразований схем лежит ряд операций, которые обобщают операцию суперпозиции функций и используются для построения сложных схем из более простых. Базисом таких построений является обычно схема из одной изолированной вершины, являющейся ее входом. Указанная вершина называется *тождественной вершиной кратности k , $k \geq 0$* , если она одновременно является k -кратным выходом данной схемы. При этом кратность один, как правило, не указывается, а тождественная вершина кратности 0 считается *фиктивной*. Простейшими видами суперпозиции схем являются: 1) операция *переименования входов схемы* с возможным их отождествлением; 2) операция *переименования выходов схемы* с возможным их дублированием или снятием; 3) операция *объединения схем*, не имеющих общих вершин и общих вход-выходных пометок, понимаемая, как обычное объединение соответствующих графов.

Будем говорить, что схема Σ имеет вид $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, то есть является *суперпозицией схем* Σ'' и Σ' без общих вершин и вход-выходных пометок, если она получается в результате объединения этих схем и присоединения (части) входов схемы Σ'' к (некоторым) выходам схемы Σ' . Указанная суперпозиция считается *бесповторной*, если различные входы Σ'' присоединяются к различным выходным вершинам Σ' . Суперпозиция вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ называется *стыковкой*, если число входов схемы Σ'' равно числу выходов схемы Σ' и каждый вход Σ'' присоединяется к выходу Σ' с тем же номером.

Заметим, что операции объединения схем и переименования их входов (выходов) являются частными случаями введенной операции суперпозиции. Действительно, для объединения схем это очевидно, а любое переименование выходов (входов) схемы Σ можно задать суперпозицией вида $\Sigma_2''(\Sigma_1''(\Sigma))$ (соответственно $\Sigma(\Sigma_1'(\Sigma_2'))$), где схемы Σ_i' и Σ_i'' , $i = 1, 2$, состоят из тождественных вершин различной кратности.

Заметим также, что суперпозиция общего вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ всегда может быть сведена к стыковке вида $\Sigma = \hat{\Sigma}''(\hat{\Sigma}')$, где схемы $\hat{\Sigma}'$ и $\hat{\Sigma}''$ получаются из схем Σ' и Σ'' соответственно добавлением тождественных вершин и переименованием выходов. Стыковка вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, в свою очередь, может быть сведена к неповторной стыковке вида $\Sigma = \hat{\Sigma}''(\hat{\Sigma}')$, где схемы $\hat{\Sigma}'$ и $\hat{\Sigma}''$ получаются из схем Σ' и Σ'' снятием выходов и отождествлением входов соответственно.

Для суперпозиции схем вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ характерно, как правило, то, что схема Σ реализует функции, получающиеся в результате соответствующей подстановки (всех или части) функций, реализованных схемой Σ' вместо (всех или части) входных переменных схемы Σ'' . В случае стыковки, например, это означает, что схема Σ реализует набор функций вида $\mathcal{F}''(\mathcal{F}')$, где $\mathcal{F}''$ и $\mathcal{F}'$ — наборы функций, реализованные схемами Σ'' и Σ' соответственно.

Суперпозиция $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ считается *правильной*, если схема Σ обладает указанным свойством, и *корректной*, если, кроме того, в любой вершине Σ , которая соответствует выходной вершине Σ' , реализуется та же самая функция, что и в Σ' .

Заметим, что правильная суперпозиция вида $\Sigma''(\Sigma')$ автоматически является корректной, если кратность любой выходной вершины Σ' больше числа присоединяемых к ней входов Σ'' . Заметим также, что с содержательной точки зрения корректность суперпозиции вида $\Sigma''(\Sigma')$ позволяет одновременно использовать выходы Σ' в других суперпозициях.

Легко видеть, что любая СФЭ может быть получена в результате многократного применения операции суперпозиции, на каждом шаге которой происходит дублирование выхода или присоединение одного ФЭ к выходам СФЭ, первоначально состоящей из тождественных вершин.

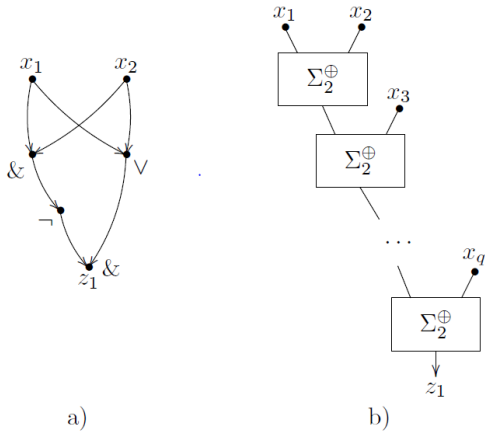


Рис. 9.1: пример суперпозиции СФЭ

На рис. 9.1a показана СФЭ $\Sigma_2^\oplus$, имеющая сложность 4 и реализующая ФАЛ $x_1 \oplus x_2$, а на рис. 9.1b — СФЭ $\Sigma_q^\oplus$, $q \geq 3$, которая является результатом «последовательной» суперпозиции $(q - 1)$ схем $\Sigma_2^\oplus$ и реализует ФАЛ $\ell_q(x_1, \dots, x_q)$ со сложностью $4q - 4$.

Рассмотрим теперь вопросы, связанные с нахождением функционирования для суперпозиций сетей или КС. Из соображений удобства будем допускать наличие в КС ориентированных (неориентированных) ребер без пометок, которые проводят при любых значениях управляющих входных БП в указанном (соответственно в любом) направлении и называются вентилями (соответственно *проводниками*). Это позволяет считать, что сети являются частным случаем КС и реализуют свои матрицы достижимости, состоящие из константных ФАЛ.

Операция суперпозиции КС и все ее частные случаи определяются обычным образом. При этом пометками входов и выходов КС, в отличие от СФЭ, не обязательно являются переменные, а БП, управляющие проводимостью контактов КС, никак не связаны с ее входами.

Легко видеть, что перестановка входов (выходов) КС порождает в реализуемой ею матрице такую же перестановку связанных с ними строк (соответственно столбцов), а снятие (дублирование) выходов этой КС — удаление (соответственно добавление) связанных с ними столбцов. Заметим также, что КС Σ , которая является объединением КС Σ' и Σ'' , реализующих матрицы F' и F'' соответственно, реализует матрицу F вида¹:

$$F = \begin{array}{|c|c|} \hline F' & 0 \\ \hline 0 & F'' \\ \hline \end{array}$$

¹Предполагается, что номер любого входа (выхода) КС Σ' меньше номера любого входа (соответственно выхода) КС Σ'' в КС Σ , а внутренняя упорядоченность полюсов КС Σ' и Σ'' в КС Σ сохраняется. В остальных случаях происходит необходимая перестановка входов и выходов КС Σ .

Обратимся, далее, к особенностям функционирования КС, получающихся в результате применения операций суперпозиции общего вида. Напомним, что суперпозиция общего вида сводится к последовательному выполнению операций переименования выходов, добавления тождественных вершин и стыковки. При этом стыковка, в свою очередь, сводится к снятию выходов, отождествлению входов и неповторной стыковке.

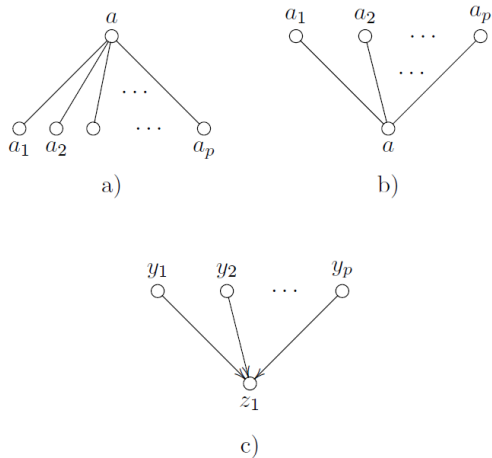


Рис. 9.2: проводящие и вентильная звезды порядка p

Заметим, что результат отождествления первых p входов КС Σ эквивалентен результату стыковки вида $\Sigma(\Sigma')$, а результат p -кратного дублирования первого выхода КС Σ — результату стыковки $\Sigma''(\Sigma)$, где КС Σ' , Σ'' состоят из $(1, p)$ -проводящей звезды (см. рис. 9.2а, a — вход) и тождественных вершин. Заметим также, что стыковка вида $\widehat{\Sigma}(\Sigma)$, где КС $\widehat{\Sigma}$ состоит из $(p, 1)$ -проводящей звезды (см. рис. 9.2б, a — выход) и тождественных вершин, соответствует отождествлению первых p выходов КС Σ .

В соответствии с общими правилами стыковка (суперпозиция) КС вида $\Sigma = \Sigma'' (\Sigma')$ называется² *правильной*, если для матриц F , F' и F'' , реализуемых КС Σ , Σ' и Σ'' соответственно, выполняется равенство

$$F = F' \cdot F''. \quad (9.1)$$

Указанная суперпозиция считается *корректной*, если, кроме того, в выходных вершинах подсхемы Σ' схемы Σ реализуются те же самые столбцы ФАЛ, что и в самой схеме Σ . Аналогичным образом определяется правильность и корректность суперпозиции КС на заданном наборе значений управляющих БП.

²Это определение соответствует «обычному» определению корректной суперпозиции в рамках модели так называемых преобразующих КС. 

Заметим, что при правильной стыковке $(1, p)$ -КС и $(p, 1)$ -КС, реализующих строку и столбец из ФАЛ $(f'_1, \dots, f'_p)$ и $(f''_1, \dots, f''_p)$ соответственно, получается $(1, 1)$ -КС, реализующая ФАЛ $f'_1 f''_1 \vee \dots \vee f'_p f''_p$, при правильном отождествлении входов (выходов) КС в реализуемой ею матрице происходит поразрядная дизъюнкция тех строк (соответственно столбцов), которые соответствуют отождествленным входам (соответственно выходам) и т. п.

Легко видеть, что операция переименования входов (выходов) КС без отождествления, операция объединения КС, а также операция последовательного соединения $(1, 1)$ -КС корректны в любом случае. В то же время параллельное соединение $(1, 1)$ -КС, при котором сначала отождествляются входы, а затем выходы соединяемых КС, не является, в общем случае, корректной операцией суперпозиции, хотя является при этом правильной суперпозицией, так как полученная КС реализует дизъюнкцию ФАЛ, реализуемых исходными КС. Заметим, что корректное дизъюнктивное соединение выходных ФАЛ можно осуществить с помощью стыковки исходной КС с вентильной звездой (см. рис. 9.2с).

Схема называется *разделительной по входам (выходам)*, если ФАЛ проводимости между любыми ее различными входами (соответственно выходами) равна 0. Так $(p, 1)$ -схема $\Sigma'' = \Sigma''(y_1, \dots, y_p; z_1)$, показанная на рисунке 9.2с, является разделительной по входам схемой, которая называется *вентильной звездой порядка p* . Примером разделительной по выходам (входам) КС может служить $(1, 2^n)$ (соответственно $(2^n, 1)$) контактное дерево порядка n (см. рис. 6.4). Будем говорить, что КС Σ от БП $x_1, \dots, x_n$ *разделительна на наборе $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ значений этих БП*, если соответствующей разделительностью обладает сеть $\Sigma|_\alpha$.

Следующее утверждение является обобщением известной леммы Шеннона.

Лемма 9.1

Пусть КС Σ является результатом стыковки вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, а F , F' и F'' — матрицы, реализуемые КС Σ , Σ' и Σ'' соответственно. Тогда

$$F \geq F' \cdot F'', \quad (9.2)$$

а если КС Σ'' разделительна по входам или КС Σ' разделительна по выходам, то

$$F = F' \cdot F''. \quad (9.3)$$

Доказательство

Пусть КС Σ является сначала результатом бесповторной стыковки (p, q) -КС Σ' и (q, s) -КС Σ'' от БП $x_1, \dots, x_n$.

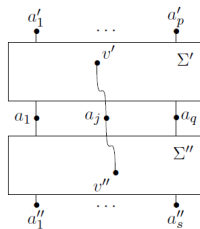
Пусть, кроме того, v' (v'') — произвольная вершина КС Σ' (соответственно Σ''), а ФАЛ f'_j (соответственно f''_j), $j \in [1, q]$, — ФАЛ проводимости от вершины v' к j -му выходу в КС Σ' (соответственно от j -го входа к вершине v'' в КС Σ''). Докажем, что для ФАЛ f — ФАЛ проводимости от вершины v' к вершине v'' в КС Σ , — справедливо неравенство

$$f(x_1, \dots, x_n) \geq f'_1 \cdot f''_1 \vee \dots \vee f'_q \cdot f''_q, \quad (9.4)$$

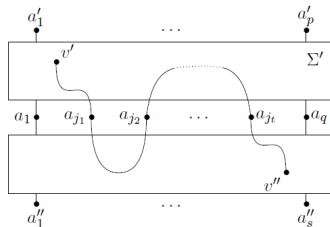
которое переходит в равенство

$$f(x_1, \dots, x_n) = f'_1 \cdot f''_1 \vee \dots \vee f'_q \cdot f''_q, \quad (9.5)$$

если КС Σ' разделительна по выходам или КС Σ'' разделительна по входам.



a)



b)

Рис. 9.3: к доказательству леммы 9.1

Продолжение доказательства

Действительно, пусть a_j , $j \in [1, q]$, — вершина КС Σ , которая получается в результате присоединения j -го входа КС Σ'' к j -му выходу КС Σ' (см. рис. 9.3а). Справедливость неравенства (9.4) следует из того, что его правая часть описывает «суммарную» проводимость тех $(v' - v'')$ -цепей КС Σ , которые проходят через вершины $a_1, \dots, a_q$ ровно один раз (см. рис. 9.3а). Любая другая $(v' - v'')$ -цепь КС Σ проходит через указанные вершины не меньше трех раз (см. рис. 9.3б) и в случае разделительности КС Σ' по выходам или разделительности КС Σ'' по входам имеет нулевую проводимость.

Продолжение доказательства

Из (9.4) и (9.5) непосредственно вытекают (9.2) и (9.3) с учетом того, что при $v' = a'_i$ и $v'' = a''_j$, где $i \in [1, p]$ и $j \in [1, s]$, левая (правая) часть этих соотношений равна элементу матрицы F (соответственно $F' \cdot F''$), расположенному в i -й строке и j -м столбце.

Продолжение доказательства

Пусть теперь КС Σ получается из КС Σ'' в результате применения операции отождествления входов, то есть Σ эквивалентна неповторной стыковке вида $\Sigma''(\Sigma')$, где КС Σ' состоит из проводящей звезды и тождественных вершин. В этом случае неравенство (9.2) имеет вид $F \geq \hat{F}''$, где матрица $\hat{F}''$ получается из матрицы F'' в результате поразрядной дизъюнкции строк, соответствующих отождествляемым входам КС Σ'' , и по-прежнему переходит в равенство, если КС Σ'' разделительна по входам. В последнем случае, кроме того, из аналогичного равенства, связанного с КС $\tilde{\Sigma}''$, которая получается из КС Σ'' в результате объявления ее входов входами и, одновременно, выходами $\tilde{\Sigma}''$, следует разделительность КС Σ по входам.

Продолжение доказательства

Заметим, наконец, что стыковка общего вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ сводится к последовательному выполнению отождествления входов вида $\hat{\Sigma}'' = \Sigma''(\check{\Sigma}'')$ и неповторной стыковки вида $\Sigma = \hat{\Sigma}''(\hat{\Sigma}')$, где КС $\check{\Sigma}''$ состоит из проводящей звезды и тождественных вершин, а КС $\hat{\Sigma}'$ получается из КС Σ' снятием некоторых выходов. При этом неравенство (9.2) (в случае разделительности КС Σ'' по входам равенство (9.3)) для КС $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$ вытекает из установленных выше аналогичных соотношений для КС $\hat{\Sigma}'', \check{\Sigma}'', \Sigma''$ и КС $\Sigma, \hat{\Sigma}', \hat{\Sigma}''$ в силу ассоциативности произведения матриц. Случай разделительности КС Σ' по выходам рассматривается аналогично.

Лемма доказана. □

В случае разделительности $KC \Sigma''$ по входам в каждой вершине $KC \Sigma$, $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, которая соответствует выходу $KC \Sigma'$, реализуется тот же самый столбец ФАЛ, что и в $KC \Sigma'$, то есть рассматриваемая суперпозиция является корректной.

Действительно, полагая $v' = a'_i$ и $v'' = a_j$, где $i \in [1, p]$, а $j \in [1, q]$, из (9.5) получим требуемое равенство $f = f'_j$.

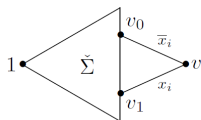
Случай стыковки общего вида рассматривается аналогично.

Равенство (9.3) выполняется на любом наборе значений БП, на котором КС Σ'' делительна по входам или КС Σ' делительна по выходам.

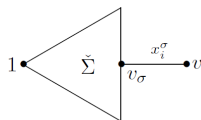
§ 10. Каскадные контактные схемы и СФЭ

Рассмотрим сначала специальный частный случай корректной суперпозиции КС (см. §9 части 2) — операцию присоединения одного или двух противоположных контактов, которая заключается в следующем. Пусть $(1, m)$ -КС Σ получается из $(1, \check{m})$ -КС $\check{\Sigma}$ в результате добавления новой выходной вершины v , которая соединяется с выходными вершинами v_0 и v_1 КС $\check{\Sigma}$ контактами $\bar{x}_i$ и x_i соответственно (см. рис. 10.1а). Тогда в вершинах v_0 и v_1 КС Σ в силу разделительности по входам присоединяемой $(2, 1)$ -КС реализуются те же самые ФАЛ g_0 и g_1 , что и в КС $\check{\Sigma}$, а в вершине v — ФАЛ g вида

$$g = \mu(x_i, g_0, g_1) = \bar{x}_i g_0 \vee x_i g_1. \quad (10.1)$$



a)



b)

Рис. 10.1: присоединение одного или двух противоположных контактов

Аналогичные соотношения будут справедливы и тогда, когда вершина v КС Σ связана с вершиной v только одним контактом вида x_i^σ , $\sigma \in \{0, 1\}$, соединяющим ее с вершиной v_σ (см. рис. 10.1b). В этом случае в вершине v КС Σ реализуется ФАЛ

$$g = x_i^\sigma g_\sigma. \quad (10.2)$$

Описанные выше операции присоединения одного или двух противоположенных контактов очевидным образом распространяются на случай КС с несколькими входами. Кроме того, они допускают моделирование в классе СФЭ в базисе B_0 . Так, переход от СФЭ $\check{U}$, $\check{U} \in \mathcal{U}^C$, которая реализует в выходных вершинах v_0 и v_1 ФАЛ g_0 и g_1 соответственно, к СФЭ U , $U \in \mathcal{U}^C$, которая реализует ФАЛ g , удовлетворяющую (10.1) ((10.2)), показан на рис. 10.2а (соответственно 10.2b). Заметим, что при этом разложение (10.1) в случае $g_{\bar{\sigma}} \equiv 1$ эквивалентно представлению

$$g = x_i^{\bar{\sigma}} \vee g_{\sigma},$$

схемная реализация которого показана на рис. 10.2с.

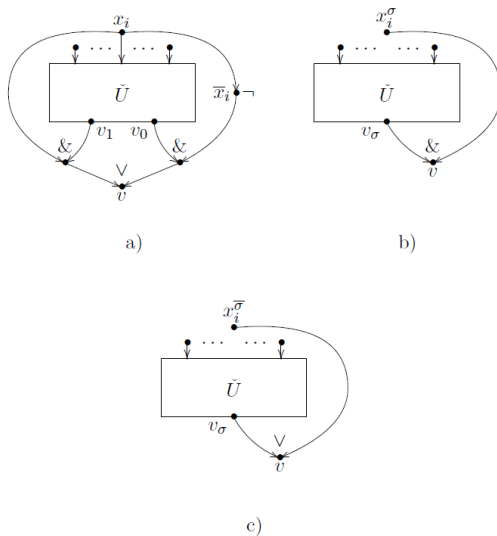


Рис. 10.2: к моделированию операций присоединения контактов в классе СФЭ

Определим, далее, *каскадную* КС как приведенную КС без изолированных полюсов, которая может быть получена из системы тождественных вершин в результате ряда операций присоединения одного или двух противоположных контактов и операций переименования выходов. Каскадная КС (ККС) считается *полной*, если она была построена без использования операции присоединения одного контакта. К числу ККС относятся также контактные деревья, причем $(2^n, 1)$ -КД является полной ККС.

Заметим, далее, что, в силу корректности рассматриваемых операций присоединения контактов, ККС является разделительной по входам КС. Отсюда следует, что в каждой вершине ККС реализуется столбец, в котором никакие две ФАЛ не обращаются в единицу одновременно, причем в случае полной ККС дизъюнкция всех ФАЛ этого столбца дает 1. Так, в частности, в каждой вершине полной ККС с двумя входами реализуется столбец из двух противоположных ФАЛ.

Вершина ККС, введенная в нее с помощью операции присоединения одного контакта, называется *неполной вершиной* этой ККС. Будем говорить, что ККС Σ'' является *дополнением* неполной ККС Σ' , если она получается в результате соединения всех неполных вершин Σ' отсутствующими в них контактами с новым входом, удаления всех «старых» входов и перехода к соответствующей приведенной КС. При этом, очевидно,

$$L(\Sigma'') \leq 2L(\Sigma'), \quad (10.3)$$

а объединение Σ' и Σ'' является полной ККС. Дополнение Σ'' к полной ККС Σ с 1 входом будем называть *инверсной* к Σ' ККС. Заметим, что ККС Σ'' , в силу отмеченных выше свойств полных ККС, реализует систему ФАЛ $\overline{F}'$, если ККС Σ' реализует систему ФАЛ F' .

Таким образом, в силу (10.3) справедливо следующее утверждение

Лемма 10.1

Если $(1, m)$ -ККС Σ' реализует систему ФАЛ $F' = (f'_1, \dots, f'_m)$, то существует $(1, m)$ -ККС Σ'' , которая реализует систему ФАЛ $\bar{F}' = (\bar{f}'_1, \dots, \bar{f}'_m)$ и для которой $L(\Sigma'') \leq 2L(\Sigma')$.