

# Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

## Блок 3

Логика предикатов:  
синтаксис, семантика

Лектор:  
**Подымов Владислав Васильевич**

E-mail:  
**valdus@yandex.ru**

# Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

**Если кто-то прогуливает лекции,  
то экзамен (зачёт) он не сдаст**

# Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

Если кто-то прогуливает лекции,  
то экзамен (зачёт) он не сдаст

*ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ:*

Shirk  $\rightarrow$   $\neg$ Pass

# Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

Если кто-то прогуливает лекции,  
то экзамен (зачёт) он не сдаст

$$\forall x (\text{Shirk}(x) \rightarrow \neg \text{Pass}(x))$$

# Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

Если кто-то прогуливает лекции,  
то экзамен (зачёт) не сдаст его сосед

*логика предикатов:*

$$\forall x (\text{Shirk}(x) \rightarrow \neg \text{Pass}(\text{neighbour}(x)))$$

**Логика предикатов** изучает законы причинно-следственной зависимости между утверждениями, основанными на **отношениях** между произвольными **предметами**

**Формальный язык** логики предикатов ориентирован на описание таких отношений

# Немного о названии “логика предикатов”

**Предикат** (лат. praedicatum — сказанное, сказуемое):

понятие, определяющее предмет суждения (субъект)<sup>1</sup>

Кто-то	прогуливает	лекцию
(субъект)	(предикат)	(объект)

В более общем смысле, предикат — это

- ▶ свойство, атрибут предмета, явления, события, ...
- ▶ отношение между явлениями, предметами, событиями, ...

---

<sup>1</sup> Ожегов, Шведова. Толковый словарь русского языка

# Немного о названии “логика предикатов”



классическая  
логика  
предикатов  
первого порядка

# Немного о названии “логика предикатов”



логика  
предикатов  
первого порядка



# Немного о названии “логика предикатов”



логика  
предикатов

# Немного о названии “логика предикатов”

IV

логика

первого порядка

# Немного о названии “логика предикатов”

Будем использовать такое название:

**логика  
предикатов**

# Логика предикатов: алфавит

## Базовые символы

Предметные **константы**

Ими обозначаются конкретные (именованные, фиксированные) предметы

*Например:* я, 2,  $\pi$ , Солнце,  $c_1$ , ...

**Const** — множество всех констант

Предметные **переменные**

Ими обозначаются безымянные (нефиксированные) предметы

Они будут записываться привычно:  $x$ ,  $y'$ ,  $z_4$ , ...

**Var** — множество всех переменных

Далее это множество полагается счётным и заданным однозначно

# Логика предикатов: алфавит

## Базовые символы

### Функциональные символы

Ими обозначаются операции над предметами

*Например:* +, сосед, lim, ...

Каждому функциональному символу сопоставляется особое натуральное число — **местность**

$f^{(k)}$  — запись функционального символа  $f$  с обозначением местности  $k$

**Func** — множество всех функциональных символов

с сопоставленными им местностями

### Предикатные символы

Ими обозначаются отношения между предметами и свойства предметов

*Например:* <, является\_соседом, красный, ...

При задании языка логики предикатов каждому предикатному символу сопоставляется особое натуральное число — **местность**

$P^{(k)}$  — запись предикатного символа  $P$  с обозначением местности  $k$

**Pred** — множество всех предикатных символов

с сопоставленными им местностями

# Логика предикатов: алфавит

## Логические операции

Логические СВЯЗКИ

$\&$   $\vee$   $\neg$   $\rightarrow$

Кванторы

Квантор всеобщности (“для любого предмета”):  $\forall$

Квантор существования (“существует предмет”):  $\exists$

Знаки препинания  $( ) ,$

Сигнатурой алфавита логики предикатов называется тройка  
 $\langle \text{Const}, \text{Func}, \text{Pred} \rangle$

Устройство языка логики предикатов  
однозначно определяется выбором сигнатуры:  
все символы, не обозначенные в сигнатуре, определены однозначно

# Логика предикатов: синтаксис

БНФ, определяющая синтаксис формул логики предикатов:

$$\begin{aligned} t ::= & x \mid c \mid f^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n) \\ \varphi ::= & P^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n) \mid \\ & (\varphi \& \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\neg \varphi) \mid \\ & (\forall x \varphi) \mid (\exists x \varphi), \end{aligned}$$

где:

- ▶  $\varphi$  — формула
- ▶  $t, t_1, t_2, \dots, t_n$  — термы
- ▶  $x \in \text{Var}$
- ▶  $c \in \text{Const}$
- ▶  $f^{(n)} \in \text{Func}$
- ▶  $P^{(k)} \in \text{Pred}$

# Логика предикатов: синтаксис / термы

$$t ::= x \mid c \mid f^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

При помощи термов описываются предметы, получающиеся в результате применения заданных функций (операций) к заданным предметам

**Например:**  $(z \in \text{Var}; \mathbf{1} \in \text{Const}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \in \text{Func})$

1. Предмет, обозначенный переменной  $z$ :

$z$

2. Предмет, обозначенный константой  $\mathbf{1}$ :

$\mathbf{1}$

3. Предмет, получающийся применением операции  $+$  к (1) и (2):

$+(\mathbf{1}, z)$

4. Предмет, получающийся применением операции  $\cdot$  к (1) и (3):

$\cdot(z, +(\mathbf{1}, z))$

5. Более наглядная **инфиксная форма записи** терма (4):

$z \cdot (\mathbf{1} + z)$



# Логика предикатов: синтаксис / термы

$$t ::= x \mid c \mid f^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

**Term** — множество всех термов

(над заданными множествами  $\text{Var}$ ,  $\text{Const}$ ,  $\text{Func}$ )

Если  $t$  — терм, то:

$\text{Var}_t$  — множество всех переменных, входящих в терм  $t$

$t(x_1, \dots, x_n)$  — синоним  $t$ , если  $\text{Var}_t \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$

Терм  $t$  — **основной**, если  $\text{Var}_t = \emptyset$

**Пример:** если  $x \in \text{Var}$ ,  $1, 3 \in \text{Const}$  и  $+^{(2)}, \cdot^{(2)} \in \text{Func}$ , то терм

$$3 \cdot (1 + 3)$$

является основным, а терм

$$3 \cdot (1 + x)$$

не является

# Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi ::= P^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n) \mid$$

$$(\varphi \& \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\neg \varphi) \mid (\forall x \varphi) \mid (\exists x \varphi)$$

При помощи формул описываются отношения между предметами, строящиеся из “базовых” отношений при помощи логических операций

В некоторых случаях (*отношение местности 0*) формулой может описываться и высказывание, оцениваемое как истина или ложь

**Например:**

$$(P^{(2)}, R^{(1)} \in \text{Pred}; f^{(2)} \in \text{Func}; x, y \in \text{Var})$$

1. Предмет  $y$  и предмет, получающийся из предметов  $x$  и  $y$  применением операции  $f$ , входят в отношение  $P$ :

$$P(y, f(x, y))$$

2. Для любого предмета  $x$  верно (1):

$$(\forall x P(y, f(x, y)))$$

3. Если верно (2), то предмет  $y$  обладает свойством  $R$ :

$$((\forall x P(y, f(x, y))) \rightarrow R(y))$$

4. Хотя бы для одного предмета  $y$  верно (3)

$$(\exists y ((\forall x P(y, f(x, y))) \rightarrow R(y)))$$

# Логика предикатов: синтаксис / формулы

$\varphi ::= P^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n) \mid$

$(\varphi \& \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\neg \varphi) \mid (\forall x \varphi) \mid (\exists x \varphi)$

Формула **атомарна** (является **атомом**), если имеет вид  $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ , где  $P^{(n)} \in \text{Pred}$  и  $t_1, t_2, \dots, t_n \in \text{Term}$

Остальные формулы называются **составными**

**Form** — множество всех формул

(в алфавите с заданной сигнатурой)

**Приоритет логических операций** (в порядке убывания):

$\forall, \exists, \neg$ ; затем  $\&$ ; затем  $\vee$ ; затем  $\rightarrow$

**Как работают приоритеты (пример)**

Следующие формулы считаются синтаксически одинаковыми:

$\forall x \neg P(x) \& \exists y R(x, y) \rightarrow \exists x (\neg P(x) \vee P(y))$

$\forall x (\neg P(x)) \& (\exists y R(x, y)) \rightarrow \exists x ((\neg P(x)) \vee P(y))$

$(\forall x (\neg P(x))) \& (\exists y R(x, y)) \rightarrow (\exists x ((\neg P(x)) \vee P(y)))$

$((\forall x (\neg P(x))) \& (\exists y R(x, y))) \rightarrow (\exists x ((\neg P(x)) \vee P(y)))$

$((\forall x (\neg P(x))) \& (\exists y R(x, y))) \rightarrow (\exists x ((\neg P(x)) \vee P(y)))$

# Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi ::= P^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n) \mid \\ (\varphi \& \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\neg \varphi) \mid (\forall x \varphi) \mid (\exists x \varphi)$$

Квантор **связывает** ту переменную, которая следует за ним

**Область действия** внешнего квантора  
в формуле  $\exists x \varphi$  — это подформула  $\varphi$

Вхождение переменной в область действия  
связывающего её квантора — **связанное вхождение**

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —  
**свободное вхождение**

Переменная, имеющая свободное вхождение, —  
**свободная переменная** формулы

$\text{Var}_\varphi$  — множество всех свободных переменных формулы  $\varphi$

**Пример:**

$$\exists y (\forall x \neg P(y, f(x, y))) \rightarrow R(x)$$

# Логика предикатов: синтаксис / формулы

$\varphi ::= P^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n) \mid$

$(\varphi \& \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\neg \varphi) \mid (\forall x \varphi) \mid (\exists x \varphi)$

Квантор **связывает** ту переменную, которая следует за ним

**Область действия** внешнего квантора  
в формуле  $\exists x \varphi$  — это подформула  $\varphi$

Вхождение переменной в область действия  
связывающего её квантора — **связанное вхождение**

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —  
**свободное вхождение**

Переменная, имеющая свободное вхождение, —  
**свободная переменная** формулы

$\text{Var}_\varphi$  — множество всех свободных переменных формулы  $\varphi$

**Пример:**

$\exists y (\forall x \neg P(y, f(x, y)) \rightarrow R(x))$

←  
Переменная **y** связана квантором  $\exists$

# Логика предикатов: синтаксис / формулы

$\varphi ::= P^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n) \mid$

$(\varphi \& \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\neg \varphi) \mid (\forall x \varphi) \mid (\exists x \varphi)$

Квантор **связывает** ту переменную, которая следует за ним

**Область действия** внешнего квантора  
в формуле  $\exists x \varphi$  — это подформула  $\varphi$

Вхождение переменной в область действия  
связывающего её квантора — **связанное вхождение**

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —  
**свободное вхождение**

Переменная, имеющая свободное вхождение, —  
**свободная переменная** формулы

$\text{Var}_\varphi$  — множество всех свободных переменных формулы  $\varphi$

**Пример:**

$\exists y (\forall x \neg P(y, f(x, y))) \rightarrow R(x)$

←  
Переменная **x** связана квантором  $\forall$

# Логика предикатов: синтаксис / формулы

$\varphi ::= P^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n) \mid$

$(\varphi \& \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\neg \varphi) \mid (\forall x \varphi) \mid (\exists x \varphi)$

Квантор **связывает** ту переменную, которая следует за ним

**Область действия** внешнего квантора  
в формуле  $\exists x \varphi$  — это подформула  $\varphi$

Вхождение переменной в область действия  
связывающего её квантора — **связанное вхождение**

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —  
**свободное вхождение**

Переменная, имеющая свободное вхождение, —  
**свободная переменная** формулы

$\text{Var}_\varphi$  — множество всех свободных переменных формулы  $\varphi$

**Пример:**

$\exists y (\forall x \neg P(y, f(x, y))) \rightarrow R(x)$

**Область действия** квантора  $\exists$

# Логика предикатов: синтаксис / формулы

$\varphi ::= P^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n) \mid$

$(\varphi \& \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\neg \varphi) \mid (\forall x \varphi) \mid (\exists x \varphi)$

Квантор **связывает** ту переменную, которая следует за ним

**Область действия** внешнего квантора  
в формуле  $\exists x \varphi$  — это подформула  $\varphi$

Вхождение переменной в область действия  
связывающего её квантора — **связанное вхождение**

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —  
**свободное вхождение**

Переменная, имеющая свободное вхождение, —  
**свободная переменная** формулы

$\text{Var}_\varphi$  — множество всех свободных переменных формулы  $\varphi$

**Пример:**

$\exists y (\forall x \neg P(y, f(x, y))) \rightarrow R(x)$

**Область действия** квантора  $\forall$



# Логика предикатов: синтаксис / формулы

$\varphi ::= P^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n) \mid$

$(\varphi \& \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\neg \varphi) \mid (\forall x \varphi) \mid (\exists x \varphi)$

Квантор **связывает** ту переменную, которая следует за ним

**Область действия** внешнего квантора  
в формуле  $\exists x \varphi$  — это подформула  $\varphi$

Вхождение переменной в область действия  
связывающего её квантора — **связанное вхождение**

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —  
**свободное вхождение**

Переменная, имеющая свободное вхождение, —  
**свободная переменная** формулы

$\text{Var}_\varphi$  — множество всех свободных переменных формулы  $\varphi$

**Пример:**

$\exists y (\forall x \neg P(y, f(x, y))) \rightarrow R(x)$



**Связанные вхождения** переменной  $y$

# Логика предикатов: синтаксис / формулы

$\varphi ::= P^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n) \mid$

$(\varphi \& \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\neg \varphi) \mid (\forall x \varphi) \mid (\exists x \varphi)$

Квантор **связывает** ту переменную, которая следует за ним

**Область действия** внешнего квантора  
в формуле  $\exists x \varphi$  — это подформула  $\varphi$

Вхождение переменной в область действия  
связывающего её квантора — **связанное вхождение**

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —  
**свободное вхождение**

Переменная, имеющая свободное вхождение, —  
**свободная переменная** формулы

$\text{Var}_\varphi$  — множество всех свободных переменных формулы  $\varphi$

**Пример:**

$\exists y (\forall x \neg P(y, f(x, y))) \rightarrow R(x)$

↑  
**Связанное вхождение** переменной  $x$

# Логика предикатов: синтаксис / формулы

$\varphi ::= P^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n) \mid$

$(\varphi \& \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\neg \varphi) \mid (\forall x \varphi) \mid (\exists x \varphi)$

Квантор **связывает** ту переменную, которая следует за ним

**Область действия** внешнего квантора  
в формуле  $\exists x \varphi$  — это подформула  $\varphi$

Вхождение переменной в область действия  
связывающего её квантора — **связанное вхождение**

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —  
**свободное вхождение**

Переменная, имеющая свободное вхождение, —  
**свободная переменная** формулы

$\text{Var}_\varphi$  — множество всех свободных переменных формулы  $\varphi$

**Пример:**

$$\exists y (\forall x \neg P(y, f(x, y))) \rightarrow R(x)$$

**Свободное вхождение** переменной  $x$

# Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi ::= P^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n) \mid \\ (\varphi \& \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\neg \varphi) \mid (\forall x \varphi) \mid (\exists x \varphi)$$

$\tilde{x}^n$  — сокращённая запись последовательности “ $x_1, \dots, x_n$ ”

Если  $\varphi$  — формула, то:

- ▶  $\varphi(\tilde{x}^n)$  — синоним  $\varphi$ , если  $\text{Var}_\varphi \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$
- ▶ если  $\text{Var}_\varphi = \emptyset$ , то  $\varphi$  — **замкнутая формула**, или **предложение**

**CForm**<sup>1</sup> — множество всех замкнутых формул  
(в алфавите с заданной сигнатурой)

---

<sup>1</sup> Closed Formulae

# Логика предикатов: семантика

Как и в *логике высказываний*, смысл формуле логики предикатов придаёт **интерпретация** — “мир, в котором живёт формула”

**Интерпретация** состоит из

- ▶ **предметов**, населяющих мир
- ▶ **операций**<sup>1</sup> над предметами
- ▶ **отношений**<sup>2</sup>, связывающих предметы

Таким образом, в основе **интерпретаций** логики предикатов лежат **алгебраические системы**<sup>3</sup>

---

<sup>1</sup> это смысл **функциональных символов**

<sup>2</sup> это смысл **предикатных символов**

<sup>3</sup> не следует пугаться этого термина;  
это и есть совокупность “предметы + операции + отношения”

# Логика предикатов: семантика

**Интерпретация** (сигнатуры  $\langle \text{Const}, \text{Func}, \text{Pred} \rangle$ ) — это система  $\langle D, \overline{\text{Const}}, \overline{\text{Func}}, \overline{\text{Pred}} \rangle$ , где:

- ▶  $D$  — непустое множество **предметов**  
(**область интерпретации; предметная область; универсум**)
- ▶  $\overline{\text{Const}} : \text{Const} \rightarrow D$  — **оценка констант**
- ▶  $\overline{\text{Func}} : \text{Func} \rightarrow \bigcup_{n \geq 1} (D^n \rightarrow D)$  — **оценка функциональных символов**
- ▶  $\overline{\text{Pred}} : \text{Pred} \rightarrow \bigcup_{n \geq 1} (D^n \rightarrow \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\})$  — **оценка предикатных символов**

$\overline{c} = \overline{\text{Const}}(c)$  — **предмет**, сопоставленный константе  $c$

$\overline{f} = \overline{\text{Func}}(f) : D^n \rightarrow D$  — **функция**, сопоставленная символу  $f^{(n)}$

$\overline{P} = \overline{\text{Pred}}(P) : D^n \rightarrow \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\}$  — **предикат**, сопоставленный символу  $P^{(n)}$

# Логика предикатов: семантика

## Пример

Сигнатура:  $\text{Const} = \{c_1, c_2\}$ ,  $\text{Func} = \{f^{(1)}\}$ ,  $\text{Pred} = \{P^{(1)}, R^{(2)}\}$

Интерпретация:

предметная область:  $D = \{0, 1, 2\}$

оценка констант:  $\overline{c_1} = 0$ ,  $\overline{c_2} = 1$

оценка функциональных и предикатных символов:

$\overline{f}(x)$

x	$\overline{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

$\overline{R}(x, y)$

x \ y	0	1	2
0	t	t	f
1	t	f	t
2	f	t	t

# Логика предикатов: семантика термов

Значение  $t(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$  терма  $t(\tilde{x}^n)$  в интерпретации  $\mathcal{I}$  на наборе предметов  $d_1, \dots, d_n$  из области интерпретации — это предмет, задаваемый так:

- ▶ термы-переменные:

$$x_i[\tilde{d}^n] = d_i$$

- ▶ термы-константы:

$$c[\tilde{d}^n] = \bar{c}$$

- ▶ остальные термы:

$$f(t_1, \dots, t_k)[\tilde{d}^n] = \bar{f}(t_1[\tilde{d}^n], \dots, t_k[\tilde{d}^n])$$



# Логика предикатов: семантика формул

Отношение выполнимости формулы  $\varphi(\tilde{x}^n)$  в интерпретации  $\mathcal{I}$  на наборе предметов  $d_1, \dots, d_n$  из области интерпретации  $(\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n])$  определяется так:

- ▶ атомарная формула:

$$\mathcal{I} \models P(t_1, \dots, t_k)[\tilde{d}^n]$$

$\Leftrightarrow$

$$\bar{P}(t_1[\tilde{d}^n], \dots, t_k[\tilde{d}^n]) = \text{т}$$

- ▶ отрицание:

$$\mathcal{I} \models (\neg\varphi)[\tilde{d}^n]$$

$\Leftrightarrow$

$$\mathcal{I} \not\models \varphi[\tilde{d}^n]$$

# Логика предикатов: семантика формул

Отношение выполнимости формулы  $\varphi(\tilde{x}^n)$  в интерпретации  $\mathcal{I}$  на наборе предметов  $d_1, \dots, d_n$  из области интерпретации  $(\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n])$  определяется так:

▶ конъюнкция:

$$\mathcal{I} \models (\varphi \& \psi)[\tilde{d}^n]$$

$\Leftrightarrow$

$$\mathcal{I} \models \varphi[\tilde{d}^n] \text{ и } \mathcal{I} \models \psi[\tilde{d}^n]$$

▶ дизъюнкция:

$$\mathcal{I} \models (\varphi \vee \psi)[\tilde{d}^n]$$

$\Leftrightarrow$

$$\mathcal{I} \models \varphi[\tilde{d}^n] \text{ или } \mathcal{I} \models \psi[\tilde{d}^n]$$

▶ импликация:

$$\mathcal{I} \models (\varphi \rightarrow \psi)[\tilde{d}^n]$$

$\Leftrightarrow$

$$\mathcal{I} \not\models \varphi[\tilde{d}^n] \text{ или } \mathcal{I} \models \psi[\tilde{d}^n]$$

# Логика предикатов: семантика формул

Отношение выполнимости формулы  $\varphi(\tilde{x}^n)$  в интерпретации  $\mathcal{I}$  на наборе предметов  $d_1, \dots, d_n$  из области интерпретации  $(\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n])$  определяется так:

- ▶ квантор всеобщности:

$$\mathcal{I} \models (\forall x_0 \varphi(x_0, \tilde{x}^n))[\tilde{d}^n]$$

$\Leftrightarrow$

для любого предмета  $d_0$  из области интерпретации верно  $\mathcal{I} \models \varphi(x_0, \tilde{x}^n)[d_0, \tilde{d}^n]$

- ▶ квантор существования:

$$\mathcal{I} \models (\exists x_0 \varphi(x_0, \tilde{x}^n))[\tilde{d}^n]$$

$\Leftrightarrow$

хотя бы для одного предмета  $d_0$  из области интерпретации верно  $\mathcal{I} \models \varphi(x_0, \tilde{x}^n)[d_0, \tilde{d}^n]$

$\varphi[x_1/d_1, \dots, x_n/d_n]$  — синоним записи  $\varphi(x_1, \dots, x_n)[d_1, \dots, d_n]$

# Семантика: примеры

Рассмотрим интерпретации такого вида:

**предметная область** — квадраты и круги белого и чёрного цвета, расположенные на плоскости

**сигнатура** состоит из пяти предикатных символов, отвечающих следующим свойствам:

$C(x)$ : “ $x$  — круг”

$S(x)$ : “ $x$  — квадрат”

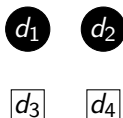
$B(x)$ : “ $x$  — чёрный предмет”

$W(x)$ : “ $x$  — белый предмет”

$U(x, y)$ : “предмет  $x$  лежит под предметом  $y$ ”

# Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию  $\mathcal{I}$ :



и такую формулу  $\varphi$ :

$$\forall x (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))$$

Формула содержательно прочитывается так:

Для каждого предмета  $x$ : если он является белым и является квадратом, то существует предмет  $y$ , такой что он является чёрным, и он является кругом, и предмет  $x$  лежит под предметом  $y$

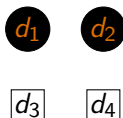
Проще говоря,

Каждый белый квадрат лежит под каким-то чёрным кругом

Чтобы строго убедиться, что это утверждение верно в  $\mathcal{I}$ , следует проверить соотношение  $\mathcal{I} \models \varphi$

# Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию  $\mathcal{I}$ :



и такую формулу  $\varphi$ :

$$\forall x (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))$$

Переберём все предметы, подставляя их на место  $x$

1.  $x \leftarrow d_1$ :

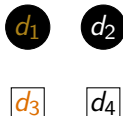
- ▶  $\mathcal{I} \not\models W(x)[d_1]$
- ▶  $\mathcal{I} \not\models (W(x) \& S(x))[d_1]$
- ▶  $\mathcal{I} \models (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))[d_1]$

2.  $x \leftarrow d_2$ :

- ▶  $\mathcal{I} \not\models W(x)[d_2]$
- ▶  $\mathcal{I} \not\models (W(x) \& S(x))[d_2]$
- ▶  $\mathcal{I} \models (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))[d_2]$

# Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию  $\mathcal{I}$ :



и такую формулу  $\varphi$ :

$$\forall \mathbf{x} (W(\mathbf{x}) \ \& \ S(\mathbf{x}) \rightarrow \exists \mathbf{y} (B(\mathbf{y}) \ \& \ C(\mathbf{y}) \ \& \ U(\mathbf{x}, \mathbf{y})))$$

Переберём все предметы, подставляя их на место  $\mathbf{x}$

3.  $\mathbf{x} \leftarrow d_3$ :

- ▶  $\mathcal{I} \models B(\mathbf{y})[d_1]$
- ▶  $\mathcal{I} \models C(\mathbf{y})[d_1]$
- ▶  $\mathcal{I} \models U(\mathbf{x}, \mathbf{y})[y/d_1, x/d_3]$
- ▶  $\mathcal{I} \models (B(\mathbf{y}) \ \& \ C(\mathbf{y}) \ \& \ U(\mathbf{x}, \mathbf{y}))[y/d_1, x/d_3]$
- ▶  $\mathcal{I} \models (\exists \mathbf{y} (B(\mathbf{y}) \ \& \ C(\mathbf{y}) \ \& \ U(\mathbf{x}, \mathbf{y}))) [d_3]$
- ▶  $\mathcal{I} \models (W(\mathbf{x}) \ \& \ S(\mathbf{x}) \rightarrow \exists \mathbf{y} (B(\mathbf{y}) \ \& \ C(\mathbf{y}) \ \& \ U(\mathbf{x}, \mathbf{y}))) [d_3]$

# Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию  $\mathcal{I}$ :



и такую формулу  $\varphi$ :

$$\forall x (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))$$

Переберём все предметы, подставляя их на место  $x$

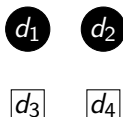
4.  $x \leftarrow d_4$ :

- ▶  $\mathcal{I} \models B(y)[d_2]$
- ▶  $\mathcal{I} \models C(y)[d_2]$
- ▶  $\mathcal{I} \models U(x, y)[y/d_2, x/d_4]$
- ▶  $\mathcal{I} \models (B(y) \& C(y) \& U(x, y))[y/d_2, x/d_4]$
- ▶  $\mathcal{I} \models (\exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))[d_4]$
- ▶  $\mathcal{I} \models (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))[d_4]$



# Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию  $\mathcal{I}$ :



и такую формулу  $\varphi$ :

$$\forall x (W(x) \ \& \ S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \ \& \ C(y) \ \& \ U(x, y)))$$

Итого:

$$\mathcal{I} \models (W(x) \ \& \ S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \ \& \ C(y) \ \& \ U(x, y)))[d_1]$$

$$\mathcal{I} \models (W(x) \ \& \ S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \ \& \ C(y) \ \& \ U(x, y)))[d_2]$$

$$\mathcal{I} \models (W(x) \ \& \ S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \ \& \ C(y) \ \& \ U(x, y)))[d_3]$$

$$\mathcal{I} \models (W(x) \ \& \ S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \ \& \ C(y) \ \& \ U(x, y)))[d_4]$$

А значит,

$$\mathcal{I} \models \forall x (W(x) \ \& \ S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \ \& \ C(y) \ \& \ U(x, y)))$$

# Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию  $\mathcal{I}$ :

сигнатура:  $\text{Const} = \emptyset$ ,  $\text{Func} = \{f^{(1)}\}$ ,  $\text{Pred} = \{P^{(1)}, R^{(2)}\}$

предметная область:  $D = \{0, 1, 2\}$

оценки функциональных и предикатных символов:

$\bar{f}(x)$

x	$\bar{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

$\bar{R}(x, y)$

x	y	0	1	2
0		t	t	f
1		t	f	t
2		f	t	t

и такую формулу  $\varphi$ :

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

Проверим соотношение  $\mathcal{I} \models \varphi$

# Семантика: примеры

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

$\bar{f}(x)$

x	$\bar{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

$\bar{R}(x, y)$

x \ y	0	1	2
0	t	t	f
1	t	f	t
2	f	t	t

# Семантика: примеры

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

 $\bar{f}(x)$ 

x	$\bar{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

 $\bar{P}(x)$ 

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

 $\bar{R}(x, y)$ 

x \ y	0	1	2
0	t	t	f
1	t	f	t
2	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

# Семантика: примеры

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

 $\bar{f}(x)$ 

x	$\bar{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

 $\bar{P}(x)$ 

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

 $\bar{R}(x, y)$ 

x	y	0	1	2
0		t	t	f
1		t	f	t
2		f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models R(x, y)[y/0, x/2]$$

# Семантика: примеры

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

 $\bar{f}(x)$ 

x	$\bar{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

 $\bar{P}(x)$ 

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

 $\bar{R}(x, y)$ 

x	y	0	1	2
0		t	t	f
1		t	f	t
2		f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models R(x, y)[y/0, x/2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/0, x/2]$$

# Семантика: примеры

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

 $\bar{f}(x)$ 

x	$\bar{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

 $\bar{P}(x)$ 

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

 $\bar{R}(x, y)$ 

x \ y	0	1	2
0	t	t	f
1	t	f	t
2	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/0, x/2]$$

# Семантика: примеры

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

 $\bar{f}(x)$ 

x	$\bar{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

 $\bar{P}(x)$ 

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

 $\bar{R}(x, y)$ 

x \ y	0	1	2
0	t	t	f
1	t	f	t
2	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/0, x/2]$$

$$\mathcal{I} \models P(f(y))[1]$$



# Семантика: примеры

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

 $\bar{f}(x)$ 

x	$\bar{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

 $\bar{P}(x)$ 

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

 $\bar{R}(x, y)$ 

x	y	0	1	2
0		t	t	f
1		t	f	t
2		f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/0, x/2]$$

$$\mathcal{I} \models P(f(y))[1]$$

$$\mathcal{I} \not\models (\neg P(f(y)))[1]$$

# Семантика: примеры

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

 $\bar{f}(x)$ 

x	$\bar{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

 $\bar{P}(x)$ 

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

 $\bar{R}(x, y)$ 

x	y	0	1	2
0		t	t	f
1		t	f	t
2		f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/0, x/2]$$

$$\mathcal{I} \models P(f(y))[1]$$

$$\mathcal{I} \not\models (\neg P(f(y)))[1]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/1, x/2]$$

# Семантика: примеры

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

 $\bar{f}(x)$ 

x	$\bar{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

 $\bar{P}(x)$ 

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

 $\bar{R}(x, y)$ 

x \ y	0	1	2
0	t	t	f
1	t	f	t
2	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/0, x/2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/1, x/2]$$

# Семантика: примеры

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

 $\bar{f}(x)$ 

x	$\bar{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

 $\bar{P}(x)$ 

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

 $\bar{R}(x, y)$ 

x \ y	0	1	2
0	t	t	f
1	t	f	t
2	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/0, x/2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/1, x/2]$$

$$\mathcal{I} \models P(f(y))[2]$$

# Семантика: примеры

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

 $\bar{f}(x)$ 

x	$\bar{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

 $\bar{P}(x)$ 

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

 $\bar{R}(x, y)$ 

x	y	0	1	2
0		t	t	f
1		t	f	t
2		f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/0, x/2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/1, x/2]$$

$$\mathcal{I} \models P(f(y))[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (\neg P(f(y)))[2]$$

# Семантика: примеры

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

 $\bar{f}(x)$ 

x	$\bar{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

 $\bar{P}(x)$ 

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

 $\bar{R}(x, y)$ 

x	y	0	1	2
0		t	t	f
1		t	f	t
2		f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/0, x/2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/1, x/2]$$

$$\mathcal{I} \models P(f(y))[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (\neg P(f(y)))[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/2, x/2]$$

# Семантика: примеры

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

 $\bar{f}(x)$ 

x	$\bar{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

 $\bar{P}(x)$ 

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

 $\bar{R}(x, y)$ 

x \ y	0	1	2
0	t	t	f
1	t	f	t
2	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/0, x/2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/1, x/2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/2, x/2]$$

# Семантика: примеры

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

 $\bar{f}(x)$ 

x	$\bar{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

 $\bar{P}(x)$ 

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

 $\bar{R}(x, y)$ 

x	y	0	1	2
0		t	t	f
1		t	f	t
2		f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/0, x/2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/1, x/2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/2, x/2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (\exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))[2]$$



## Семантика: примеры

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

 $\bar{f}(x)$ 

x	$\bar{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

 $\bar{P}(x)$ 

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

 $\bar{R}(x, y)$ 

x	y	0	1	2
0		t	t	f
1		t	f	t
2		f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (\exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))[2]$$

## Семантика: примеры

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

 $\bar{f}(x)$ 

x	$\bar{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

 $\bar{P}(x)$ 

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

 $\bar{R}(x, y)$ 

x	y	0	1	2
0		t	t	f
1		t	f	t
2		f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (\exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))[2]$$

## Семантика: примеры

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

 $\bar{f}(x)$ 

x	$\bar{f}(x)$
0	1
1	2
2	0

 $\bar{P}(x)$ 

x	$\bar{P}(x)$
0	t
1	f
2	t

 $\bar{R}(x, y)$ 

x \ y	0	1	2
0	t	t	f
1	t	f	t
2	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (\exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))[2]$$

Значит,

$\mathcal{I} \not\models \forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$
--