Занятие 11. Конечные автоматы и автоматные функции. Способы их представления: канонические уравнения и диаграммы Мура.

Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Страница курса на сайте http://mk.cs.msu.ru

Для разбора домашнего задания

Конечный автомат

Конечным автоматом называется набор

$$\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_*),$$

в котором:

1) A — **входной алфавит** (являющийся конечным непустым множеством),

2) B — **выходной алфавит** (являющийся конечным непустым множеством),

3) Q — **множество состояний** (являющееся конечным непустым множеством),

4) $\varphi : A \times Q \to B$ — **функция выходов**,

5) $\psi : A \times Q \to Q$ — **функция переходов**,

6) $q_* \in Q$ — **начальное состояние**.

Бесконечные слова

Пусть A — конечный алфавит.

Бесконечным словом (или **сверхсловом**) в алфавите A назовем бесконечную последовательность букв этого алфавита.

Множество всех сверхслов в алфавите A обозначим A^∞.

Если $\alpha \in A^\infty$, то $\alpha(t)$ обозначает t-ю букву сверхслова α, $t = 1, 2, \ldots$.

Т. е. $\alpha = \alpha(1)\alpha(2)\ldots\alpha(t)\ldots \in A^\infty$.

Функционирование конечного автомата

Функционирование конечного автомата

$$\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_*)$$

на *входном сверхслове* $x = x(1)x(2)\ldots x(t)\ldots \in A^\infty$ описывается системой **канонических уравнений**:

$$\begin{cases} y(t) = \varphi(x(t), q(t-1)), & t \geqslant 1, \\ q(t) = \psi(x(t), q(t-1)), & t \geqslant 1, \\ q(0) = q_*. \end{cases}$$

При этом говорят, что конечный автомат $\mathcal{A}$ входное сверхслово $x \in A^\infty$ преобразует в *выходное сверхслово* $y \in B^\infty$.

Отображение, которое осуществляет автомат

Конечный автомат $\mathcal{A}$ каждое сверхслово $x \in A^\infty$ преобразует в однозначно определенное сверхслово $y \in B^\infty$.

Значит, конечный автомат $\mathcal{A}$ определяет некоторую функцию

$$f_\mathcal{A} : A^\infty \to B^\infty,$$

которую назовем **отображением, которое осуществляет автомат** $\mathcal{A}$.

Устройства с конечной памятью

Конечный автомат $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_*)$ можно рассматривать как дискретный преобразователь с конечной памятью:

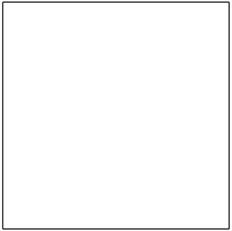
Устройства с конечной памятью

Конечный автомат $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_*)$ можно рассматривать как дискретный преобразователь с конечной памятью:

$\mathcal{A}:$

Устройства с конечной памятью

Конечный автомат $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_*)$ можно рассматривать как дискретный преобразователь с конечной памятью:

$\mathcal{A}$: 

Дискретное время:
$t = 1, 2, \ldots$

Устройства с конечной памятью

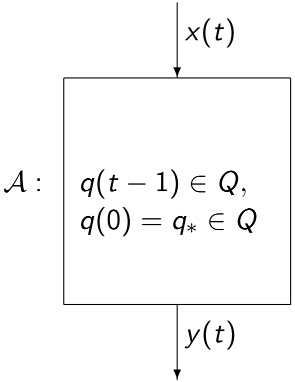
Конечный автомат $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_*)$ можно рассматривать как дискретный преобразователь с конечной памятью:

$$\mathcal{A}: \boxed{\begin{array}{l} q(t-1) \in Q, \\ q(0) = q_* \in Q \end{array}}$$

Дискретное время:
$t = 1, 2, \ldots$

Устройства с конечной памятью

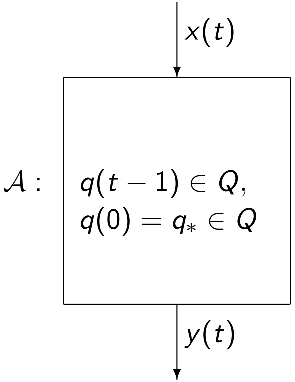
Конечный автомат $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_*)$ можно рассматривать как дискретный преобразователь с конечной памятью:



Дискретное время:
$t = 1, 2, \ldots$

Устройства с конечной памятью

Конечный автомат $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_*)$ можно рассматривать как дискретный преобразователь с конечной памятью:



Дискретное время:
$t = 1, 2, \ldots$

При этом

$$y(1)y(2)\ldots y(t)\ldots = f_{\mathcal{A}}(x(1)x(2)\ldots x(t)\ldots).$$

Автоматная функция

Пусть A и B — конечные алфавиты и

$$f : A^{\infty} \to B^{\infty}.$$

Функция f называется **автоматной**, если найдется такой конечный автомат

$$\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_*),$$

что $f_{\mathcal{A}} = f$.

Канонические уравнения

1. *Канонические уравнения*.
Конечный автомат $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_*)$ (и автоматную функцию $f_\mathcal{A}$) можно задавать **каноническими уравнениями**:

$$\begin{cases} y(t) = \varphi(x(t), q(t-1)), \\ q(t) = \psi(x(t), q(t-1)), \\ q(0) = q_*. \end{cases}$$

При этом часто удобно, чтобы в правых частях находились функции алгебры логики.

Для этого элементы множеств A, B, Q кодируют однозначным алфавитным равномерным кодом в алфавите $\{0, 1\}$.

А затем переписывают функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ в соответствии с этим кодированием.

Канонические уравнения

Пример. Найдем канонические уравнения конечного автомата $\mathcal{A}$, в котором $A = B = \{0, 1\}$, $Q = \{0, 1, 2\}$, $q_* = 0$ и φ и ψ задаются таблицей:

$q \in Q$	$a \in A$	$\varphi(q, a) \in B$	$\psi(q, a) \in Q$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	2
2	0	1	2
2	1	1	2

Закодируем состояния $q \in Q$, например, так:

$$0 - 00, \quad 1 - 01, \quad 2 - 10.$$

Канонические уравнения

Пример (продолжение). Получаем:

$q_1(t-1)$	$q_2(t-1)$	$x(t)$	$y(t)$	$q_1(t)$	$q_2(t)$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	–	–	–
1	1	1	–	–	–

Теперь:

$$\begin{cases} y(t) = x(t)q_2(t-1) \vee q_1(t-1), \\ q_1(t) = x(t)q_2(t-1) \vee q_1(t-1), \\ q_2(t) = (\bar{x}(t) \vee \bar{q}_2(t-1)) \cdot \bar{q}_1(t-1), \\ q_1(0) = q_2(0) = 0. \end{cases}$$

Диаграмма Мура

2. *Диаграмма Мура.*

Диаграммой Мура (или **диаграммой переходов**) конечного автомата $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_*)$ (и автоматной функции $f_{\mathcal{A}}$) называется ориентированный граф с пометками

$$D_{\mathcal{A}} = (V_{\mathcal{A}}, E_{\mathcal{A}}),$$

в котором:

$V_{\mathcal{A}} = Q$,

$E_{\mathcal{A}} = \{(q, \psi(a, q)) \mid a \in A, q \in Q\}$,

причем

дуге $(q, \psi(a, q)) \in E_{\mathcal{A}}$ приписана пометка $a(\varphi(a, q))$,

вершина $q_* \in V_{\mathcal{A}}$ помечена звездочкой $*$.

Диаграмма Мура

Пример. Найдем диаграмму Мура конечного автомата $\mathcal{A}$, в котором $A = B = \{0, 1\}$, $Q = \{0, 1, 2\}$, $q_* = 0$ и φ и ψ задаются таблицей:

$q \in Q$	$a \in A$	$\varphi(q, a) \in B$	$\psi(q, a) \in Q$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	2
2	0	1	2
2	1	1	2

Диаграмма Мура

Пример (продолжение). Итак, $q_* = 0$ и

q	a	φ	ψ		q	a	φ	ψ
0	0	0	1		0	1	0	1
1	0	0	1		1	1	1	2
2	0	1	2		2	1	1	2

Диаграмма Мура

Пример (продолжение). Итак, $q_* = 0$ и

q	a	φ	ψ		q	a	φ	ψ
0	0	0	1		0	1	0	1
1	0	0	1		1	1	1	2
2	0	1	2		2	1	1	2

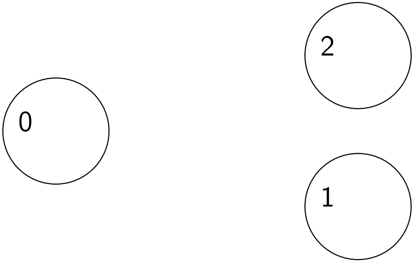


Диаграмма Мура

Пример (продолжение). Итак, $q_* = 0$ и

q	a	φ	ψ		q	a	φ	ψ
0	0	0	1		0	1	0	1
1	0	0	1		1	1	1	2
2	0	1	2		2	1	1	2

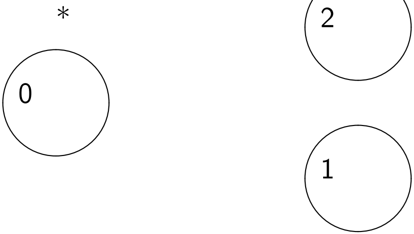


Диаграмма Мура

Пример (продолжение). Итак, $q_* = 0$ и

q	a	φ	ψ		q	a	φ	ψ
0	0	0	1		0	1	0	1
1	0	0	1		1	1	1	2
2	0	1	2		2	1	1	2

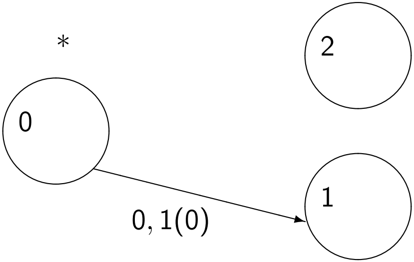


Диаграмма Мура

Пример (продолжение). Итак, $q_* = 0$ и

q	a	φ	ψ		q	a	φ	ψ
0	0	0	1		0	1	0	1
1	0	0	1		1	1	1	2
2	0	1	2		2	1	1	2

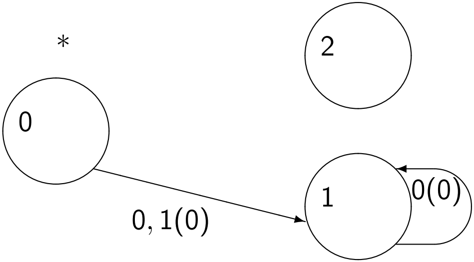


Диаграмма Мура

Пример (продолжение). Итак, $q_* = 0$ и

q	a	φ	ψ		q	a	φ	ψ
0	0	0	1		0	1	0	1
1	0	0	1		1	1	1	2
2	0	1	2		2	1	1	2

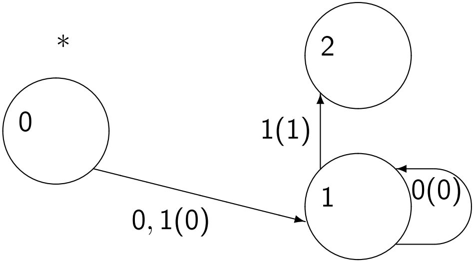


Диаграмма Мура

Пример (продолжение). Итак, $q_* = 0$ и

q	a	φ	ψ		q	a	φ	ψ
0	0	0	1		0	1	0	1
1	0	0	1		1	1	1	2
2	0	1	2		2	1	1	2

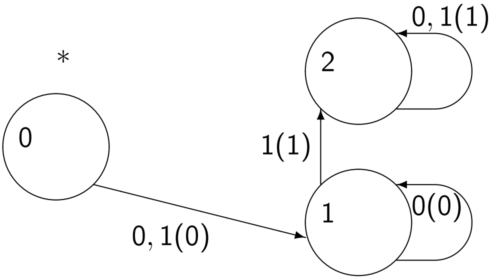
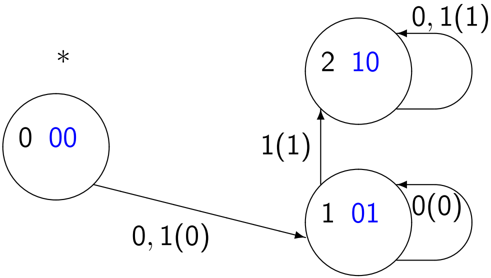


Диаграмма Мура

Пример (продолжение). Итак, $q_* = 0$ и

q	a	φ	ψ		q	a	φ	ψ
0	0	0	1		0	1	0	1
1	0	0	1		1	1	1	2
2	0	1	2		2	1	1	2



Гл. 4, 2.1

Гл. 4, 2.1. Пусть $f : \{0,1\}^\infty \to \{0,1\}^\infty$,

$$f(x(1)x(2)x(3)\ldots x(t)\ldots) = y(1)y(2)\ldots y(t)\ldots,$$

где

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1, \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geqslant 2. \end{cases}$$

Найти диаграмму Мура и канонические уравнения автоматной функции f.

Гл. 4, 2.1

Решение. Предложим диаграмму Мура функции f, где

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1, \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geqslant 2. \end{cases}$$

Гл. 4, 2.1

Решение. Предложим диаграмму Мура функции f, где

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1, \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geqslant 2. \end{cases}$$

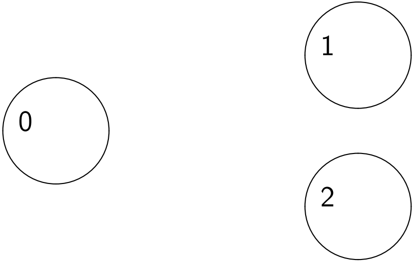
Введем 3 состояния: $q = 0$ — момент времени $t = 1$, $q = 1$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 0$ и $q = 2$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 1$:

Гл. 4, 2.1

Решение. Предложим диаграмму Мура функции f, где

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1, \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geqslant 2. \end{cases}$$

Введем 3 состояния: $q = 0$ — момент времени $t = 1$, $q = 1$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 0$ и $q = 2$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 1$:

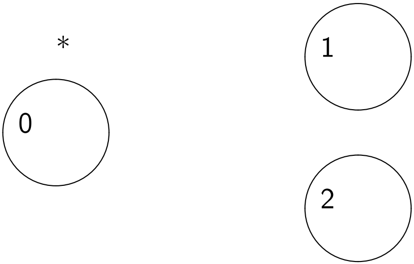


Гл. 4, 2.1

Решение. Предложим диаграмму Мура функции f, где

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1, \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geqslant 2. \end{cases}$$

Введем 3 состояния: $q = 0$ — момент времени $t = 1$, $q = 1$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 0$ и $q = 2$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 1$:

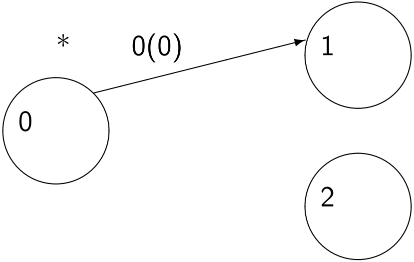


Гл. 4, 2.1

Решение. Предложим диаграмму Мура функции f, где

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1, \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geqslant 2. \end{cases}$$

Введем 3 состояния: $q = 0$ — момент времени $t = 1$, $q = 1$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 0$ и $q = 2$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 1$:

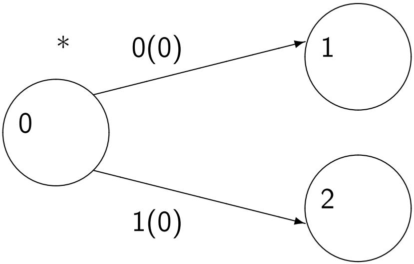


Гл. 4, 2.1

Решение. Предложим диаграмму Мура функции f, где

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1, \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geqslant 2. \end{cases}$$

Введем 3 состояния: $q = 0$ — момент времени $t = 1$, $q = 1$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 0$ и $q = 2$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 1$:

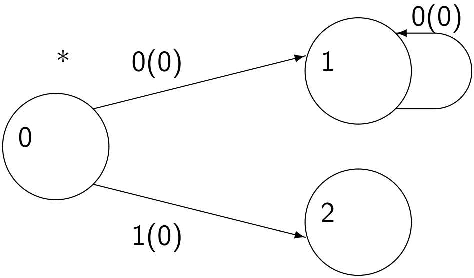


Гл. 4, 2.1

Решение. Предложим диаграмму Мура функции f, где

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1, \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geqslant 2. \end{cases}$$

Введем 3 состояния: $q = 0$ — момент времени $t = 1$, $q = 1$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 0$ и $q = 2$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 1$:

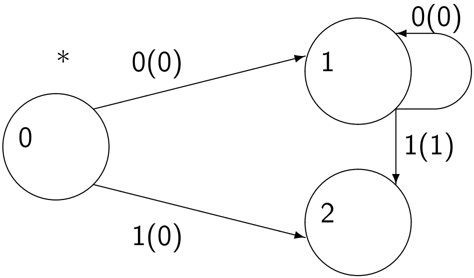


Гл. 4, 2.1

Решение. Предложим диаграмму Мура функции f, где

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1, \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geqslant 2. \end{cases}$$

Введем 3 состояния: $q = 0$ — момент времени $t = 1$, $q = 1$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 0$ и $q = 2$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 1$:

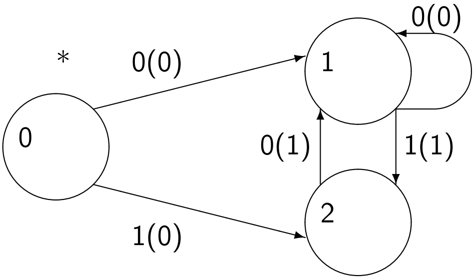


Гл. 4, 2.1

Решение. Предложим диаграмму Мура функции f, где

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1, \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geqslant 2. \end{cases}$$

Введем 3 состояния: $q = 0$ — момент времени $t = 1$, $q = 1$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 0$ и $q = 2$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 1$:

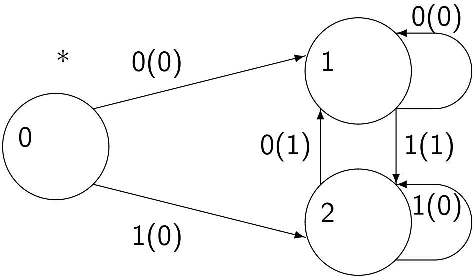


Гл. 4, 2.1

Решение. Предложим диаграмму Мура функции f, где

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1, \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geqslant 2. \end{cases}$$

Введем 3 состояния: $q = 0$ — момент времени $t = 1$, $q = 1$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 0$ и $q = 2$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 1$:

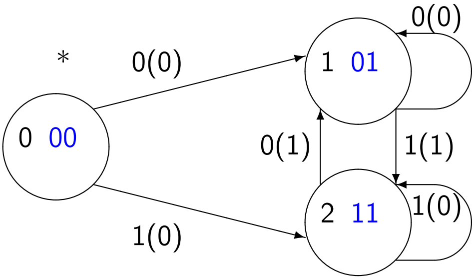


Гл. 4, 2.1

Решение. Предложим диаграмму Мура функции f, где

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1, \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geqslant 2. \end{cases}$$

Введем 3 состояния: $q = 0$ — момент времени $t = 1$, $q = 1$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 0$ и $q = 2$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 1$:



Гл. 4, 2.1

Решение (продолжение). Найдем канонические уравнения функции f:

$q_1(t-1)$	$q_2(t-1)$	$x(t)$	$y(t)$	$q_1(t)$	$q_2(t)$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	–	–	–
1	0	1	–	–	–
1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	1	1

$$\begin{cases} y(t) = (x(t) \oplus q_1(t-1)) \cdot q_2(t-1), \\ q_1(t) = x(t), \\ q_2(t) = 1, \\ q_1(0) = q_2(0) = 0. \end{cases}$$

Для самостоятельного разбора: гл. 4, 2.1

Гл. 4, 2.1(1, 4, 9, 16, 24, 27). Пусть $f : \{0,1\}^\infty \to \{0,1\}^\infty$, где

$$f(x(1)x(2)x(3)\ldots x(t)\ldots) = y(1)y(2)\ldots y(t)\ldots.$$

Найти диаграмму Мура и канонические уравнения автоматной функции f:

1)

$$y(t) = \begin{cases} 1, & t = 1, \\ x(t-1) \to x(t), & t \geqslant 2; \end{cases}$$

4)

$$y(t) = \begin{cases} 1, & t = 1, 2, \\ x(t) \to x(2), & t \geqslant 3; \end{cases}$$

Для самостоятельного разбора: гл. 4, 2.1

9)

$$y(t) = \begin{cases} \bar{x}(1), & t = 1, \\ y(t-1) \vee x(t), & t \geqslant 2; \end{cases}$$

16)

$$y(t) = \begin{cases} \bar{x}(t), & t - \text{ нечетное}, \\ y(t-1) \oplus x(t), & t - \text{ четное}; \end{cases}$$

24) $y(t)$ равно t-й цифре после запятой в двоичном представлении числа $\frac{5}{7}$;

27) $y(t)$ равно $(t+1)$-й цифре после запятой в двоичном представлении числа $\frac{x(t)}{5}$.

Для решения задач

Домашнее задание

По задачнику: Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004.

Гл. 4: 2.1(3, 7, 12, 15, 25, 28).