

Лекция 8. Деревья. Теорема о равносильных определениях дерева. Корневые деревья. Упорядоченные корневые деревья. Оценка числа деревьев с  $q$  ребрами.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна  
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте <https://mk.cs.msu.ru>

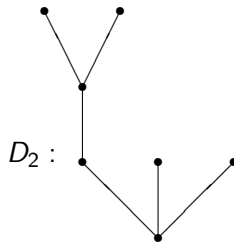
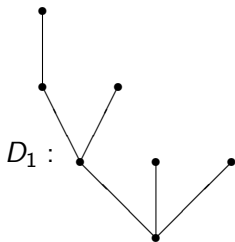
# Дерево

**Деревом** называется связный граф без циклов.

Граф без циклов (без условия связности) называется **лесом**.

Отметим, что любая компонента связности леса является деревом.

# Деревья



# Деревья

**Теорема 8.1 (о равносильных определениях дерева).**

*Пусть  $G = (V, E)$  — граф с  $p$  вершинами и  $q$  ребрами. Тогда следующие утверждения равносильны:*

- 1)  $G$  — дерево, т. е. связный граф без циклов;
- 2)  $G$  — связный граф и  $q = p - 1$ ;
- 3)  $G$  — граф без циклов и  $q = p - 1$ ;
- 4)  $G$  — граф без циклов, но при соединении любой пары несмежных вершин ребром появляется цикл;
- 5)  $G$  — связный граф, но при удалении любого ребра остается несвязный граф.

# Деревья

**Доказательство.**  $1 \Rightarrow 2$ .

*Дано:*  $G$  — связный граф без циклов.

*Доказать:*  $G$  — связный граф и  $q = p - 1$ .

*Обоснование.* По условию  $G$  связный.

По условию  $G$  без циклов, поэтому по соотношению для  $G$  между числом вершин  $p$ , числом ребер  $q$  и числом компонент связности  $s = 1$  получаем:  $1 = s = p - q$ .

Значит,  $q = p - 1$ .

## Деревья

**Доказательство.**  $2 \Rightarrow 3$ .

*Дано:*  $G$  — связный граф и  $q = p - 1$ .

*Доказать:*  $G$  — граф без циклов и  $q = p - 1$ .

*Обоснование.* По условию  $q = p - 1$ .

Если в связном графе  $G$  найдется цикл, то удалим из  $G$  некоторое ребро  $e$  из цикла. Останется связный граф  $G'$ . По соотношению для  $G'$  между числом вершин  $p$ , числом ребер  $q - 1$  и числом компонент связности  $s' = 1$  получаем:  
 $s' \geq p - (q - 1) = (p - q) + 1 = 2$  — противоречие.

Значит,  $G$  без циклов.

# Деревья

**Доказательство.**  $3 \Rightarrow 4$ .

*Дано:*  $G$  — граф без циклов и  $q = p - 1$ .

*Доказать:*  $G$  — граф без циклов, но при соединении любой пары несмежных вершин ребром появляется цикл.

*Обоснование.* По условию  $G$  без циклов.

По соотношению для  $G$  между числом вершин  $p$ , числом ребер  $q$  и числом компонент связности  $s$  получаем:

$s = p - q = 1$ , т. е.  $G$  связный.

Значит, при соединении в  $G$  любой пары несмежных вершин ребром появится цикл.

# Деревья

**Доказательство.**  $4 \Rightarrow 5$ .

*Дано:*  $G$  — граф без циклов, но при соединении любой пары несмежных вершин ребром появляется цикл.

*Доказать:*  $G$  — связный граф, но при удалении любого ребра остается несвязный граф.

*Обоснование.* Если  $G$  не связный, то при соединении двух вершин из разных компонент связности цикл не появится. Значит,  $G$  связный.

Пусть при удалении из  $G$  некоторого ребра  $e$  остался связный граф  $G'$ . Тогда  $G$  получается из связного графа  $G'$  добавлением нового ребра  $e$ . Поэтому в  $G$  найдется цикл — противоречие.

Значит, при удалении из  $G$  любого ребра останется несвязный граф.



# Деревья

**Доказательство.**  $5 \Rightarrow 1$ .

*Дано:*  $G$  — связный граф, но при удалении любого ребра остается несвязный граф.

*Доказать:*  $G$  — связный граф без циклов.

*Обоснование.* По условию  $G$  связный.

Если в  $G$  найдется цикл, то удалим из  $G$  любое ребро из цикла. Останется связный граф —противоречие.

Значит,  $G$  без циклов.



# Свойства деревьев

## Предложение 8.1.

- 1. В любом дереве любые две различные вершины соединены ровно одной простой цепью.*
- 2. Если к дереву добавить ребро, соединяющее его несмежные вершины, то получится граф с одним простым циклом.*
- 3. Если из дерева удалить любое ребро, то останется граф с двумя компонентами связности.*

**Доказательство** проведите самостоятельно.

# Висячие вершины в деревьях

**Предложение 8.2.** *В любом дереве хотя бы с двумя вершинами найдется не менее двух висячих вершин.*

**Доказательство.** Пусть граф  $G = (V, E)$  — дерево, причем  $|V| \geq 2$ .

## Висячие вершины в деревьях

**Доказательство.** 1. Сначала обоснуем от обратного, что в  $G$  найдется **хотя бы одна висячая вершина**. Предположим, что для любой вершины  $v \in V$  верно  $d_G(v) \geq 2$ , т. е.  $\delta(G) \geq 2$ .

Но тогда в  $G$  существует цикл длины, не менее  $\delta(G) + 1 \geq 3$  — противоречие.

Значит, хотя бы одна висячая вершина  $v_0 \in V$  в  $G$  найдется.

## Висячие вершины в деревьях

**Доказательство. 2.** Теперь обоснуем от обратного, что в  $G$  найдется **не менее двух висячих вершин**. Предположим, что для любой вершины  $v \in V$ ,  $v \neq v_0$ , верно  $d_G(v) \geq 2$ .



## Висячие вершины в деревьях

**Доказательство.** Но в  $G$  только конечное число вершин.  
Поэтому  $G$  не может содержать бесконечную простую цепь —  
противоречие.

Значит, в  $G$  найдется не менее двух висячих вершин.



# Экстремальные связные графы

Граф  $G$  назовем **экстремальным** для свойства связности, если  $G$  является связным, но **при удалении из  $G$  любого ребра остается несвязный граф**.

**Предложение 8.3.** *Экстремальными графами для свойства связности являются деревья и только они.*

**Доказательство** проведите самостоятельно.

**Следствие.** *Любой связный граф с  $p$  вершинами содержит не менее  $p - 1$  ребер.*



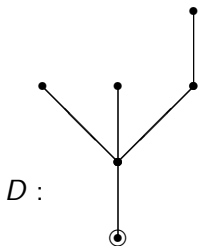
# Корневое дерево

**Корневым деревом** называется пара  $(D; v_0)$ , где  $D = (V, E)$  — дерево,  $v_0 \in V$  — выделенная вершина, называемая **корнем**.

При изоморфизме корневых деревьев корень обязан переходить в корень.

Висячая вершина корневого дерева, не являющаяся корнем, называется **листом**.

# Корневые деревья



## Поддеревья в корневом дереве

Пусть  $(D; v_0)$  — корневое дерево, и  $(v_0, v_1), \dots, (v_0, v_m)$  — все ребра, исходящие из вершины  $v_0$  в дереве  $D$ .

Тогда каждая компонента связности графа  $G - v_0$  является деревом, и пусть  $D_1, \dots, D_m$  — все эти деревья.

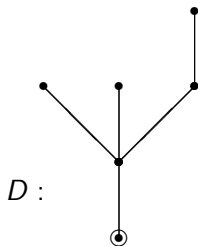
Каждое из корневых деревьев  $(D_i; v_i)$  называется **поддеревом** корневого дерева  $D$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

## Обход в глубину в корневом дереве

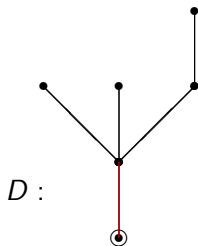
Пусть  $(D; v_0)$  — корневое дерево. **Обходом в глубину** из вершины  $v_0$  назовем следующий обход дерева  $D$ :

- 1) перейти в непройденное поддереву  $D_i$ , обойти его в глубину из вершины  $v_i$  и вернуться в вершину  $v_0$ ;
- 2) если пройдены все поддеревья, то закончить обход.

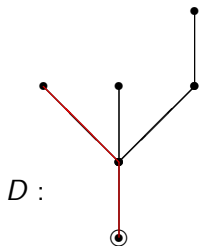
# Обход в глубину корневого дерева



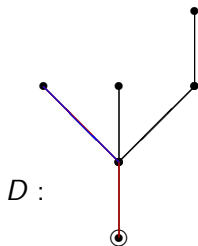
# Обход в глубину корневого дерева



# Обход в глубину корневого дерева

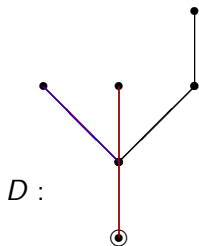


# Обход в глубину корневого дерева

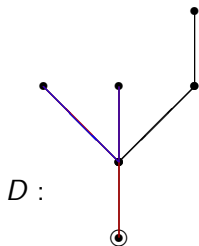




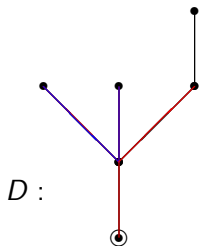
# Обход в глубину корневого дерева



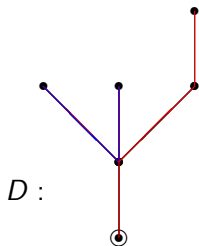
# Обход в глубину корневого дерева



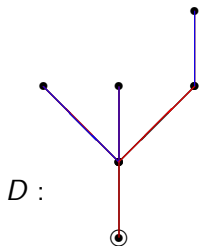
# Обход в глубину корневого дерева



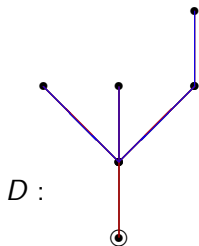
# Обход в глубину корневого дерева



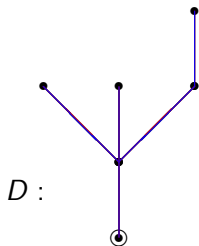
# Обход в глубину корневого дерева



# Обход в глубину корневого дерева



# Обход в глубину корневого дерева



# Упорядоченные корневые деревья

Пусть  $(D; v_0)$  — корневое дерево и  $D_1, \dots, D_m$  — все его поддеревья.

Корневое дерево  $D$  называется **упорядоченным**, если задан порядок его поддеревьев, а каждое его поддерево  $D_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , также является упорядоченным корневым деревом.

При изоморфизме упорядоченных корневых деревьев корень обязан переходить в корень, и порядок поддеревьев обязан сохраняться.



# Число упорядоченных корневых деревьев

**Теорема 8.2.** *Для числа  $\delta''(q)$  неизоморфных упорядоченных корневых деревьев с  $q$  ребрами справедлива оценка:*

$$\delta''(q) \leq 4^q.$$

**Доказательство.** Пусть  $(D; v_0)$  — упорядоченное корневое дерево с  $q$  ребрами. Обойдем дерево  $D$  в глубину из вершины  $v_0 \in V$  по порядку его поддеревьев. При таком обходе по каждому ребру пройдем два раза: первый раз при переходе в соответствующее поддерево, второй раз при возвращении из него.

## Число упорядоченных корневых деревьев

**Доказательство.** По этому обходу построим код дерева  $D$  — набор  $k(D)$  из нулей и единиц длины  $2q$ . Сначала этот код не заполнен. При проходе по очередному ребру заполняем в коде  $k(D)$  первый незаполненный разряд по следующим правилам:

- 1) если по ребру переходим в поддереву, то в код  $k(D)$  пишем ноль;
- 2) если по ребру возвращаемся из поддерева, то в код  $k(D)$  пишем единицу.

Тогда различным упорядоченным корневым деревьям соответствуют разные коды.

Поэтому  $\delta''(q)$  не превосходит числа наборов из нулей и единиц длины  $2q$ , т. е.

$$\delta''(q) \leq 2^{2q} = 4^q.$$

# Оценка числа деревьев

*Следствие. Для числа  $\delta'(q)$  неизоморфных корневых деревьев с  $q$  ребрами справедлива оценка:*

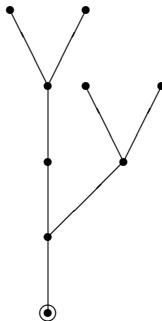
$$\delta'(q) \leq 4^q.$$

*Следствие. Для числа  $\delta(q)$  неизоморфных деревьев с  $q$  ребрами справедлива оценка:*

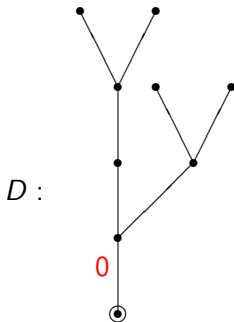
$$\delta(q) \leq 4^q.$$

# Код корневого дерева

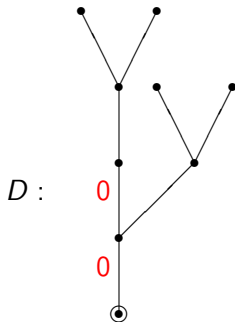
$D$  :



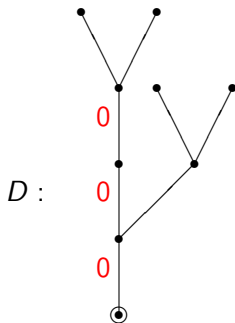
# Код корневого дерева



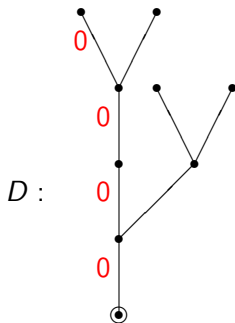
# Код корневого дерева



# Код корневого дерева

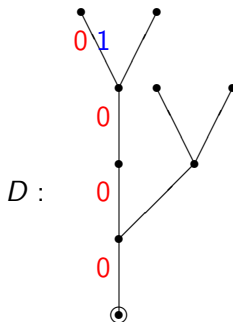


# Код корневого дерева

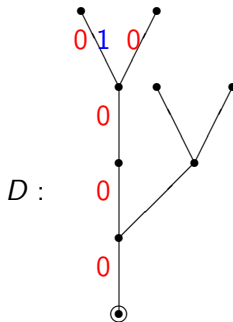




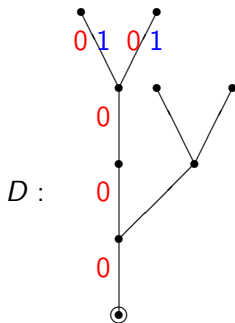
# Код корневого дерева



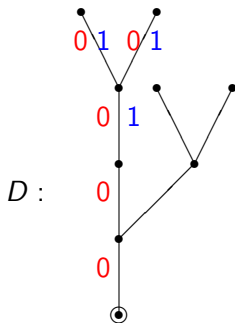
# Код корневого дерева



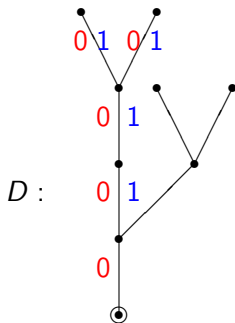
# Код корневого дерева



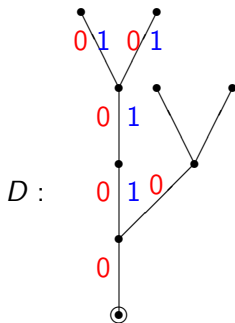
# Код корневого дерева



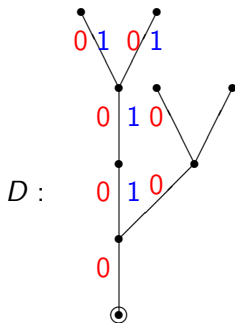
# Код корневого дерева



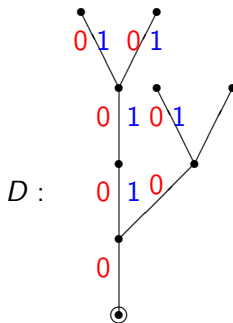
# Код корневого дерева



# Код корневого дерева

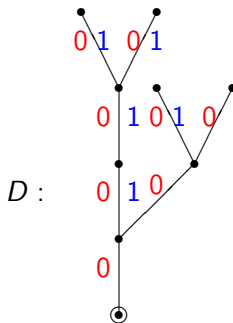


# Код корневого дерева

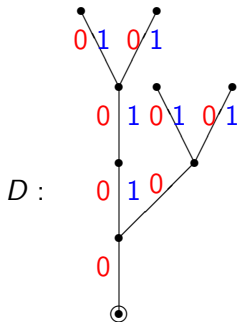




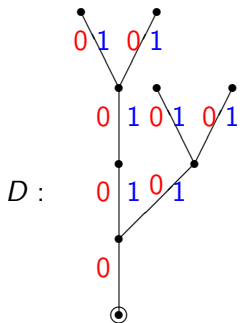
# Код корневого дерева



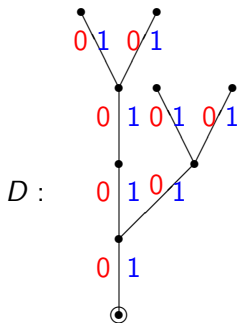
# Код корневого дерева



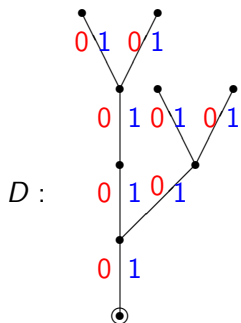
# Код корневого дерева



# Код корневого дерева



# Код корневого дерева



$$k(D) = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1).$$

## Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите предложения 8.1 и 8.2.
2. Найдите верхние оценки числа неизоморфных псевдографов и числа неизоморфных простых графов (без изолированных вершин) с  $q$  ребрами.

## Литература к лекции

1. Алексеев В. Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра М, 2012.