Лекция 6. Вероятностный метод. Малые вариации. Часть 2

Лектор — Нагорный Александр Степанович

anagorny@list.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

Малые вариации. Комбинаторная геометрия

Рассмотрим множество S из n точек в единичном квадрате U. Обозначим через $\boldsymbol{T(S)}$ минимальную из площадей треугольников с вершинами в трёх различных точках из S.

Положим $\boldsymbol{T(n)} = \max T(S)$, где максимум берётся по семейству всех n – точечных подмножеств S множества U. Хейлбронн предположил, что $T(n) = O(1/n^2)$.

Эта гипотеза опровергнута в работе **[2] (Komlós J., Pintz J., Szemerédi E.)**, где с помощью довольно сложной конструкции показано, что существует множество S из n точек множества U, такое, что $T(S) = \Omega(\log n/n^2)$.

Малые вариации. Комбинаторная геометрия

Поскольку это доказательство довольно громоздкое, мы приведём здесь более простое доказательство, показывающее, что $T(S) = \Omega(1/n^2)$.

Малые вариации. Комбинаторная геометрия

Теорема 1. Существует множество S из n точек в единичном квадрате U, такое, что $T(S) \geq 1/(100n^2)$.

Доказательство. Сначала приведём некоторые вычисления.

Пусть точки P, Q, R выбираются независимо и равновероятно из U. Обозначим через $\mu = \mu(PQR)$ площадь треугольника PQR. Мы оценим величину $\Pr[\mu \leq \varepsilon]$ следующим образом. Пусть x — расстояние между P и Q. Тогда

$$\Pr[b \leq x \leq b + \Delta b] \leq \pi(b + \Delta b)^2 - \pi b^2,$$

и в пределе имеем $\Pr[b \leq x \leq b + db] \leq 2\pi b \cdot db$.

Малые вариации. Комбинаторная геометрия

Доказательство (продолжение). Если расстояние между точками P и Q равно b, то высота, опущенная из точки R на прямую PQ, должна иметь длину $h \leq 2\varepsilon/b$, и, таким образом, точка R должна лежать в полосе ширины $4\varepsilon/b$ и длины не больше, чем $\sqrt{2}$. Это происходит с вероятностью, не превышающей $4\sqrt{2}\varepsilon/b$.

Так как $0 \leq b \leq \sqrt{2}$, искомая вероятность ограничивается сверху величиной

$$\int_0^{\sqrt{2}} (2\pi b)(4\sqrt{2}\varepsilon/b)db = 16\pi\varepsilon.$$

Малые вариации. Комбинаторная геометрия

Доказательство (продолжение). Пусть теперь точки $P_1, \ldots, P_{2n}$ выбираются независимо и равновероятно из U, и пусть X обозначает число треугольников $P_iP_jP_k$ площади, меньшей, чем $1/(100n^2)$. Вероятность появления произвольной такой тройки i, j, k меньше, чем $0.6n^{-2}$, и поэтому

$$\mathbf{E}[X] \leq \binom{2n}{3}(0.6n^{-2}) < n.$$

Таким образом, существует множество из $2n$ вершин, в котором менее n треугольников имеют площадь меньше, чем $1/(100n^2)$. Удалим по вершине из каждого такого треугольника.

Малые вариации. Комбинаторная геометрия

Доказательство (окончание). При этом останется не менее n вершин, но теперь уже нет треугольников, имеющих площадь, меньшую, чем $1/(100n^2)$. ■

Теорема 2 (Эрдёш). Если n простое, то $T(n) \geq \frac{1}{2(n-1)^2}$.

Доказательство. На квадрате $[0, n-1] \times [0, n-1]$ рассмотрим n точек (x, x^2), где x^2 берётся по $\operatorname{mod} n$. Если через некоторые три точки этого множества можно провести прямую, то она будет задаваться уравнением $y = kx + b$, где k— рациональное число со знаменателем, не превосходящим n.

Малые вариации. Комбинаторная геометрия

Доказательство (окончание). Но тогда в $\mathbb{Z}_n^2$ парабола $y = x^2$ должна пересекать прямую $y = kx + b$ в трёх точках, и, тем самым, квадратный трёхчлен $x^2 - kx - b$ имеет три различных корня (по простому модулю), что невозможно. Легко проверить, что площадь каждого треугольника с вершинами в целых точках плоскости является либо целым числом, либо полуцелым. Следовательно, эти площади должны быть не меньше $1/2$. Сжимая плоскость путём деления обеих координат на $n - 1$, получим требуемое множество. ■

Замечание. Хотя этот изящный результат лучше теоремы 1, он всё ещё слабее результата, полученного в **[2]**.

Малые вариации. Упаковка

Определения. Пусть C — ограниченное измеримое подмножество пространства $\mathbb{R}^d$, а через $B_d(x)$ обозначим куб $[0,x]^d$ со стороной x. **Упаковкой множества** C в $B_d(x)$ называется семейство взаимно непересекающихся копий множества C, каждая из которых лежит в $B_d(x)$.

Обозначим через $f(x)$ наибольшую меру такого семейства. **Константа упаковки** определяется равенством

$$\boldsymbol{\delta_d(C)} = \mu(C) \lim_{x\to\infty} f(x)x^{-d},$$

где $\mu(C)$ — мера множества C в пространстве $\mathbb{R}^d$.

Малые вариации. Упаковка

Таким образом, $\delta_d(C)$ — это максимальная доля пространства, которая может быть заполнена непересекающимися копиями множества C.

Замечание. Можно доказать, что предел в определении $\delta_d(C)$ всегда существует. Но даже без этого следующий результат имеет место с заменой $\lim$ на $\liminf$.

Малые вариации. Упаковка

Теорема 3. Пусть множество C ($C \subset \mathbb{R}^d$) ограничено, выпукло и центрально симметрично относительно начала координат. Тогда $\delta_d(C) \geq 2^{-d-1}$.

Доказательство. Пусть точки P и Q выбираются независимо и равномерно из $B_d(x)$.

Рассмотрим событие «$(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{P}) \cap (\boldsymbol{C} + \boldsymbol{Q}) \neq \emptyset$». Для того, чтобы оно произошло, мы должны иметь для некоторых $c_1, c_2 \in C$

$$P - Q = c_1 - c_2 = 2 \cdot \frac{c_1 - c_2}{2} \in 2C$$

в силу центральной симметрии и выпуклости.

Малые вариации. Упаковка

Доказательство (продолжение). Событие $P \in Q + 2C$ имеет вероятность, не превышающую $\mu(2C)\, x^{-d}$ для любого заданного Q, следовательно,

$$\Pr[(C + P) \cap (C + Q) \neq \emptyset] \le \mu(2C)\ x^{-d} = 2^d\, x^{-d} \mu(C).$$

Пусть теперь $P_1, \dots, P_n$ выбираются независимо и равномерно из $B_d(x)$. Обозначим через X число таких пар (i, j), для которых выполнено $i < j$ и $(C + P_i) \cap (C + P_j) \neq \emptyset$. В силу линейности математического ожидания имеем

$$\mathbf{E}[X] \le \frac{n^2}{2} 2^d\, x^{-d} \mu(C).$$

Малые вариации. Упаковка

Доказательство (продолжение). Следовательно, существует выборка из n точек с меньшим, чем указанное, числом пересекающихся пар копий множества C.

Для каждой пары P_i, P_j с $\left(C + P_i\right) \cap \left(C + P_j\right) \neq \emptyset$ удалим или P_i, или P_j из множества. Остаются по меньшей мере $n - \frac{n^2}{2} 2^d\, x^{-d} \mu(C)$ непересекающихся копий множества C.

Малые вариации. Упаковка

Доказательство (окончание). Положим $n = x^d 2^{-d}/\mu(C)$, чтобы максимизировать это количество. Отсюда вытекает существование по меньшей мере $n = x^d 2^{-d-1}/\mu(C)$ попарно непересекающихся копий множества C. Не все они лежат внутри $B_d(x)$, но, обозначив через w верхнюю оценку абсолютных величин координат точек множества C, мы обнаружим, что они все лежат внутри куба со стороной $x + 2w$.

Следовательно, $f(x + 2w) \geq x^d 2^{-d-1}/\mu(C)$,

а значит, $\delta_d(C) \geq \lim\limits_{x\to\infty} \mu(C) f(x + 2w)(x + 2w)^{-d} \geq 2^{-d-1}$. ■

Упаковка. Жадный алгоритм

Обычный жадный алгоритм даёт несколько лучший результат.

Теорема 4. Пусть множество C $(C \subset \mathbb{R}^d)$ ограничено, выпукло и центрально симметрично относительно начала координат. Тогда $\delta_d(C) \geq 2^{-d}$.

Доказательство. Пусть $P_1, \dots, P_m$ — какое-нибудь максимальное подмножество множества $[0, x]^d$, обладающее тем свойством, что множества $C + P_i$ не пересекаются. Мы заметили, что $C + P_i$ перекрывает $C + P$ тогда и только тогда, когда $P \in 2C + P_i$. Следовательно, множества $2C + P_i$ должны покрывать $[0, x]^d$.

Упаковка. Жадный алгоритм

Доказательство (окончание).

Поскольку каждое такое множество имеет меру $\mu(2C)=2^d\mu(C)$, необходимо, чтобы $m \geq x^d 2^{-d}/\mu(C)$.

Как и прежде, все множества $C + P_i$ лежат в кубе со стороной $x + 2w$, где w — константа. Поэтому

$$f(x + 2w) \geq m \geq x^d 2^{-d}/\mu(C),$$

и, значит,

$$\delta_d(C) \geq \lim_{x\to\infty} \mu(C) f(x + 2w)(x + 2w)^{-d} \geq 2^{-d}. \quad \blacksquare$$

Эффективная упаковка

Определения. Пусть множество $C \subset \mathbb{R}^n$ имеет ограниченную риманову меру $\mu = \mu(C) > 0$. Обозначим через $N(C,x)$ максимальное число непересекающихся копий множества C, которые можно разместить в кубе со стороной x. Определим **константу упаковки** следующим образом:

$$\boldsymbol{\delta_n}(\boldsymbol{C}) = \mu(C) \lim_{x\to\infty} N(C,x)x^{-n},$$

т. е. как максимальную долю пространства, которая может быть заполнена непересекающимися копиями множества C.

Следующая теорема улучшает результаты, которые формулируются в теоремах 3 и 4.

Эффективная упаковка

Теорема 5. Пусть множество $C \subset \mathbb{R}^n$ ограничено, выпукло и центрально симметрично относительно начала координат. Тогда $\delta_n(C) \geq 2^{-(n-1)}$.

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Нормализуем C так, чтобы выполнялось $\mu = \mu(C) = 2 - \varepsilon$. Для каждого действительного z обозначим через C_z множество точек $(z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ таких, что $(z_1, \ldots, z_{n-1}, z) \in C$, и пусть $\mu(C_z)$ – обычная мера $(n-1)$ – мерного множества C_z. Из измеримости по Риману следует, что

$$\lim_{\gamma \to 0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \mu(C_{m\gamma})\,\gamma = \mu(C).$$

Эффективная упаковка

Доказательство (продолжение).

Обозначим через K целое число, для которого выполняется неравенство

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \mu\left(C_{mK^{-(n-1)}}\right) K^{-(n-1)} < 2$$

и, более того, все точки множества C имеют координаты, меньшие $K/2$.

Для $1 \le i \le n-1$ обозначим через $v_i \in \mathbb{R}^n$ вектор, все координаты которого равны нулю, а i-я координата равна K.

Эффективная упаковка

Доказательство (продолжение). Пусть $v = \left(z_1, \dots, z_{n-1}, K^{-(n-1)}\right)$, где действительные числа $z_1, \dots, z_{n-1}$ выбраны независимо в соответствии с равномерным распределением на интервале $[0, K)$.

Обозначим через Λ_v решётку, образованную векторами v:

$$\Lambda_v = \{m_1 v_1 + \dots + m_{n-1} v_{n-1} + mv : m_1, \dots, m_{n-1}, m \in \mathbb{Z}\} =$$
$$= \left\{\left(mz_1 + m_1 K, \dots, mz_{n-1} + m_{n-1} K, mK^{-(n-1)}\right) : m_1, \dots, m_{n-1}, m \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Обозначим через $\theta(x)$ число $x' \in (-\frac{K}{2}, \frac{K}{2}]$, для которого при некотором $m \in \mathbb{Z}$ выполнено $x - mK = x'$. Существует только одно такое число.

Эффективная упаковка

Доказательство (продолжение). Для $m \in \mathbb{Z}$ обозначим через A_m событие **«некоторая сумма** $m_1 v_1 + \cdots + m_{n-1} v_{n-1} + mv \in C$**»**.

Так как все координаты точек множества C меньше $K/2$, событие A_m происходит тогда и только тогда, когда

$$\left(\theta(mz_1), \ldots, \theta(mz_{n-1}), mK^{-(n-1)}\right) \in C,$$

что верно лишь в случае $\left(\theta(mz_1), \ldots, \theta(mz_{n-1})\right) \in C_{mK^{-(n-1)}}$. Из независимости и равномерности выбора чисел z_i на интервале $[0, K)$ вытекает независимость и равномерность распределения величин $\theta(z_i)$ на интервале $\left(-\frac{K}{2}, \frac{K}{2}\right]$.

Эффективная упаковка

Доказательство (продолжение). Следовательно,

$$\Pr[A_m] = K^{-(n-1)}\mu\left(C_{mK^{-(n-1)}}\right).$$

Суммируя по всем положительным m и используя центральную симметрию, получаем, что

$$\sum_{m>0} \Pr[A_m] < \frac{1}{2}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \mu(C_{mK^{-(n-1)}})\, K^{-(n-1)} < \frac{1}{2}\cdot 2 = 1.$$

Следовательно, *существует* вектор v, для которого ни одно из событий A_m, $m > 0$ не произошло.

Эффективная упаковка

Доказательство (продолжение). Из центральной симметрии следует, что события A_m и A_{-m} происходят или не происходят одновременно. Следовательно, не произошло ни одно из событий A_m при $m \neq 0$. Теперь рассмотрим случай $m = 0$.

Все точки $m_1 v_1 + \cdots + m_{n-1} v_{n-1} = K \cdot (m_1, \ldots, m_{n-1}, 0)$, за исключением начала координат, лежат вне множества C. Для этого v имеем

$$\Lambda_v \cap C = \{0\}.$$

Рассмотрим множество копий $C + 2w, w \in \Lambda_v$. Пусть

$$z = c_1 + 2w_1 = c_2 + 2w_2 \quad \text{при} \quad c_1, c_2 \in C, \quad w_1, w_2 \in \Lambda_v.$$

Эффективная упаковка

Доказательство (окончание). Тогда $(c_1 - c_2)/2 = w_2 - w_1$. Из выпуклости и центральной симметрии следует, что $(c_1 - c_2)/2 \in C$. Так как разность $w_2 - w_1 \in \Lambda_v$, а значит, равна нулевому вектору, то $c_1 = c_2$ и $w_1 = w_2$. Следовательно, данное множество копий образует упаковку пространства $\mathbb{R}^n$. Из того, что $\det(2\Lambda_v) = 2^n \det(\Lambda_v) = 2^n$, следует, что эта упаковка имеет плотность, равную $2^{-n}\mu = 2^{-n}(2 - \varepsilon)$.

Поскольку $\varepsilon > 0$ выбирался произвольно, то $\delta_n(C) \geq 2^{-(n-1)}$. ■

Литература к лекции

1. Алон Н., Спенсер Дж. Вероятностный метод. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007, с. 47-49, 254-255.
2. Komlós J., Pintz J. and Szemerédi E. (1982) A lower bound for Heilbronn's problem // *J. London Math. Soc.* **25**(2): pp. 13-24.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!