

Элементы теории дискретных управляющих систем

Лекторы: профессор С. А. Ложкин, доцент Д. С. Романов

Теория контроля схем. Лекции 1–2

Пусть на схему Σ (без памяти) воздействовал источник неисправностей U , способный преобразовать Σ к одной из схем конечного списка H , содержащего Σ .

Пусть $f = f_1(\tilde{x}^n)$ — функция, реализуемая схемой Σ , f_2, f_3, \dots, f_s — функции тех же переменных $\tilde{x}^n = (x_1, \dots, x_n)$, реализуемые остальными схемами из списка H . Разобьем f_1, f_2, \dots, f_s на классы эквивалентности (по равенству) и составим таблицу $\hat{M} = \hat{M}(\Sigma, U)$ из столбцов значений функций, в которой из каждого класса эквивалентности имеется свой столбец.

Пусть $\hat{M} = [a_{ij}]_{p \times s}$. Различным наборам значений переменных (x_1, \dots, x_n) в таблице \hat{M} соответствуют различные строки. Таблица (матрица) \hat{M} называется *таблицей неисправностей* для схемы Σ и источника неисправностей U .

Матрица называется *отделимой* по строкам (столбцам) тогда и только тогда, когда все ее строки (столбцы) различны. Пусть столбцы матрицы \hat{M} суть M_1, \dots, M_s . Цель контроля Z — это некоторое множество пар различных столбцов матрицы \hat{M} .

Две важные цели контроля: 1) проверка исправности:

$Z^{\Pi} = \{(M_1, M_2), \dots, (M_1, M_s)\}$, 2) диагностика неисправностей:

$Z^{\Delta} = \{(M_i, M_j) \mid 1 \leq i < j \leq s\}$.

Множество T строк таблицы \hat{M} (входных наборов схемы Σ) образует *тест* относительно цели контроля Z для таблицы \hat{M} (соответственно для схемы Σ под действием источника неисправностей U) тогда и только тогда, когда имеет место импликация: для любой пары столбцов (M_i, M_j) , входящей в цель контроля Z , если M_i и M_j — неравные столбцы, то в T имеется строка k такая, что $a_{ki} \neq a_{kj}$, т. е. $(\hat{M})_{(k,i)} \neq (\hat{M})_{(k,j)}$ (соответственно для любой пары функций $(f_i, f_j) \in Z$, если $f_i \neq f_j$, то найдется набор $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\alpha} \in T$, такой, что $f_i(\tilde{\alpha}) \neq f_j(\tilde{\alpha})$).

Замечание. В рамках этого определения требовать, чтобы матрица была отделимой по столбцам, не обязательно.

Мощность теста T называется *длиной* теста. Тест, всякое собственное подмножество которого не является тестом того же типа — *тупиковый*. Тест минимальной длины называется *минимальным*. Тест относительно цели контроля $Z^П$ — *проверяющий*, относительно $Z^Д$ — *диагностический*. Если источник неисправностей U в схеме может вызвать произвольное число поломок, то тесты относительно такого источника — *полные*, а если не более одной поломки, то — *единичные*.

Теорема 1. Пусть $\hat{M} = [a_{ij}]_{p \times s}$ — отделимая по столбцам $(0, 1)$ -матрица. Тогда длина l ее минимального диагностического теста заключена в пределах:

$$\lceil \log_2 s \rceil \leq l \leq s - 1.$$

Теорема 2. Пусть $s \rightarrow \infty$, $\varphi = \varphi(s) \rightarrow \infty$,
 $p = p(s) \geq \lceil 2 \log_2 s + \varphi(s) \rceil$. Тогда для почти всех отделимых
по столбцам $(0, 1)$ -матриц $\hat{M} = [a_{ij}]_{p \times s}$ их первые
 $l(s) = \lceil 2 \log_2 s + \varphi(s) \rceil$ строк образуют диагностический тест.

Алгоритм построения всех тупиковых тестов для $(0, 1)$ -матрицы. Пусть $A = [a_{ij}]_{p \times q}$ — $(0, 1)$ -матрица без нулевых столбцов. Множество строк i_1, \dots, i_l этой матрицы образует покрытие матрицы A тогда и только тогда, когда подматрица A_{i_1, \dots, i_l} , составленная из строк i_1, \dots, i_l матрицы A , не имеет нулевых столбцов. Покрытие называется тупиковым тогда и только тогда, когда при выбрасывании из него любой строки оставшиеся строки не образуют покрытия. Покрытие с минимальным числом строк называется минимальным. Число строк в минимальном покрытии матрицы A называется *глубиной* матрицы A .

Алгоритм построения всех тупиковых покрытий матрицы.

1. Сопоставим строке i матрицы A переменную y_i , $i = \overline{1, p}$.
2. Выпишем КНФ функции покрытия матрицы A :

$$F_A(y_1, \dots, y_p) = \bigwedge_{j=1}^q \left(\bigvee_{i: a_{ij}=1} y_i \right).$$

3. Раскроем скобки, приведем подобные (в т. ч. выполнив поглощения) — по методу Нельсона получим сокращенную ДНФ функции покрытия.
4. Так как F_A — монотонная функция, а ее простые импликанты соответствуют всем нижним единицам, то все простые импликанты естественным образом кодируют все тупиковые покрытия матрицы A .

Построим по отдельной по столбцам $(0, 1)$ -матрице $\hat{M} = [a_{ij}]_{p \times s}$ и цели контроля Z матрицу сравнений $\hat{M}^{(2)}(Z) = [c_{ij}]_{p \times |Z|}$ следующим образом. Пусть $(M_{j_1}, M_{j_2}) \in Z$ и при этом (M_{j_1}, M_{j_2}) — это μ -я (в соответствии с некоторым линейным порядком) пара в Z . Тогда для любого i , $i = \overline{1, p}$, положим $c_{i, \mu}$ равным $a_{ij_1} \oplus a_{ij_2}$.

Утверждение. T — тупиковый тест для матрицы \hat{M} относительно цели контроля Z тогда и только тогда, когда T — тупиковое покрытие матрицы сравнений $\hat{M}^{(2)}(Z)$.

Градиентный алгоритм построения покрытия. Пусть

$A = [a_{ij}]_{p \times q}$ — $(0, 1)$ -матрица без нулевых столбцов.

Градиентный алгоритм на каждом шаге выбирает строку с наименьшим номером среди всех строк, покрывающих максимальное число непокрытых ранее столбцов матрицы A , и включает эту строку в покрытие; алгоритм работает до тех пор, пока в матрице есть непокрытые столбцы.

Теорема 3. Пусть $A = [a_{ij}]_{p \times q}$ — $(0, 1)$ — матрица без нулевых столбцов такая, что для некоторого γ , $0 < \gamma < 1$, в каждом столбце A имеется не менее γp единиц. Тогда мощность L покрытия матрицы A , построенного по градиентному алгоритму, удовлетворяет неравенству

$$L \leq \left\lceil \frac{1}{\gamma} \ln^+(\gamma \cdot q) \right\rceil + \frac{1}{\gamma},$$

где $\ln^+ a = \max(\ln a, 0)$.

Определение функции Шеннона длины теста.

Обозначения для источников неисправностей будут иметь вид X_y^z , где

- 1) X — одна или несколько латинских заглавных букв: P — неисправности на входах схем, I — неисправности на входах элементов, O — неисправности на выходах элементов (в том числе замыкания и размыкания контактов).
- 2) z — тип неисправности: *const* — константные; *inv* — инверсные; *br* — слипания.
- 3) y — указание на верхнюю границу числа возможных поломок (если индекс отсутствует, то возможно любое число поломок).

Схема называется тестопригодной (относительно источника неисправностей U) тогда и только тогда, когда при любой неисправности в схеме, вызванной действием U , схема меняет свое функционирование по сравнению с функционированием в отсутствие неисправностей. Схема *неизбыточна* (относительно U) тогда и только тогда, когда при любой одиночной поломке (элемента, входа и т. д.) схема меняет функционирование.

В приводимых далее обозначениях буква J будет определять класс управляющих систем следующим образом: если $J = B$, то это — схемы из функциональных элементов (СФЭ) над базисом B , если $J = K$, то это — контактные схемы (КС), если $J = \Lambda$ (пустое слово), то речь идет о неисправностях на входах схем, и класс схем не имеет значения. Буква v будет указывать на тип теста: $v = Д$ для диагностического теста и $v = П$ — для проверяющего.

$D_J^v(U, \Sigma)$ — минимальная длина теста, тип которого указывается буквой v , для схемы Σ , относительно источника неисправностей U .

$D_J^v(U, f(\tilde{x}^n))$ — минимальная длина теста, тип которого указывается буквой v , для булевой функции f , где минимум берется по всем реализующим f тестопригодным схемам Σ из класса управляющих систем, определяемого индексом J , и по всем тестам данного типа для схемы Σ относительно источника неисправностей U .

При этом под *функцией Шеннона длины теста* понимается величина

$$D_J^v(U, n) = \max_{f(\tilde{x}^n) \in P_2(n)} D_J^v(U, f(\tilde{x}^n)).$$

Счетчиком четности порядка n называется линейная функция

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n.$$

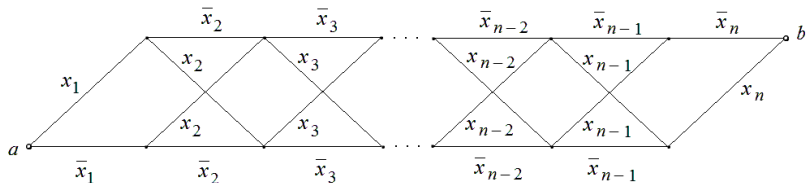


Рис. 1. Схема Кардо $\Sigma_n = \Sigma_n(x_1, \dots, x_n)$.

Представленная на рисунке 1 схема Кардо Σ_n является минимальной КС, реализующей счетчик четности порядка n (сложность схемы Σ_n равна $4n - 4$). Каждая переменная такой схемы Кардо управляет несколькими контактами (двумя или четырьмя), объединенными в блок. При этом блоки, управляемые переменными x_1 и x_n , называются *оконечными*, а остальные (четырёхконтактные) блоки называются *основными*.

Через O^{const} , O^0 , O^1 будем обозначать источники неисправностей в контактных схемах, вызывающие размыкания и замыкания, только размыкания, только замыкания контактов соответственно. Нижний индекс “1” в названии источника указывает на то, что число неисправных контактов в схеме не может превосходить 1.

В следующей теореме с учетом особенностей структуры схемы строится единичный диагностический тест логарифмической длины относительно размыканий в схеме Кардо.

Теорема 4 (Р. Н. Тоноян). *Для длины минимального единичного диагностического теста относительно размыканий контактов в схеме Кардо для счетчика четности порядка n при всех натуральных n , $n \geq 3$, имеет место оценка:*

$$D_K^D(O_1^0, \Sigma_n) \leq 2 \lceil \log_2 n \rceil + 5.$$

Доказательство. Заметим: любой единичный набор функции f_n (т. е. набор, на котором функция f_n обращается в единицу) порождает в схеме Кардо Σ_n ровно одну простую проводящую на этом наборе цепь, соединяющую полюсы схемы и проходящую в каждом блоке схемы Кардо ровно через один контакт. Более того, всякая такая цепь в схеме Кардо соответствует в указанном смысле некоторому единичному набору функции f_n . В силу сказанного размыкание контакта обнаруживается в схеме Кардо на всяком единичном наборе, порождающем проводящую между полюсами цепь, проходящую через данный контакт.

В дальнейшем будем для записи булевых наборов использовать символику записи слов в алфавите $\{0, 1\}$, считая, что набор $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ может быть записан как слово $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$. При этом через $[s]^p$ будет записываться слово $\underbrace{ss \dots s}_{p \text{ раз}}$ (если слово s

состоит из одного символа, квадратные скобки могут опускаться).

Легко видеть, что четыре набора $\tilde{\alpha}_1 = 0^{n-1}1$, $\tilde{\alpha}_2 = 10^{n-1}$, $\tilde{\alpha}_3 = 01^{n-2}\bar{\eta}$, $\tilde{\alpha}_4 = 1^{n-1}\eta$ ($\eta \in \{0, 1\}$, $\eta \equiv n \pmod{2}$) образуют единичный проверяющий тест для схемы Σ_n и порождают четыре проводящие цепи в схеме (цепи Z_1 , Z_2 , Z_3 , Z_4 соответственно), покрывающие контакты из конечных блоков по 2 раза, а контакты из основных блоков — по одному разу. Поэтому на этих четырех наборах размыкания контактов из конечных блоков отличаются от размыканий контактов из основных блоков. Более того, контакты из основных блоков разбиваются этими наборами на четыре класса эквивалентности по принадлежности контакта одной и той же цепи (из числа цепей Z_1 , Z_2 , Z_3 , Z_4 , соответствующих этим наборам), так что размыкания контактов из разных классов эквивалентности также отличаются на этих наборах. Отметим, что из размыканий контактов конечных блоков на этих четырех наборах могут оказаться неотличимыми лишь размыкания контактов \bar{x}_1 и x_n , а также x_1 и \bar{x}_n .

Включим эти четыре набора в единичный диагностический тест при всяком n , $n \geq 3$.

Рассмотрим сначала случай $n = 2^k$ ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$).

Определим k наборов: $\tilde{\beta}_1 = [0]^{2^{k-1}}[1]^{2^{k-1}}$,

$\tilde{\beta}_2 = \left[[0]^{2^{k-2}}[1]^{2^{k-2}} \right]^2, \dots, \tilde{\beta}_i = \left[[0]^{2^{k-i}}[1]^{2^{k-i}} \right]^{2^{i-1}}, \dots,$

$\tilde{\beta}_k = [01]^{2^{k-1}}$.

Добавим в тест еще $2k$ наборов $\tilde{\beta}'_1, \tilde{\beta}''_1, \tilde{\beta}'_2, \tilde{\beta}''_2, \dots, \tilde{\beta}'_k, \tilde{\beta}''_k$, где набор $\tilde{\beta}'_i$ отличается от набора $\tilde{\beta}_i$ лишь в первом разряде, а набор $\tilde{\beta}''_i$ отличается от набора $\tilde{\beta}_i$ лишь в последнем разряде ($i = \overline{1, k}$).

Пусть $D_0 = \{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3, \tilde{\alpha}_4\}$, $D_i = D_0 \cup \bigcup_{j=1}^i \{\tilde{\beta}'_j, \tilde{\beta}''_j\}$ ($i = \overline{1, k}$).

Представим себе, что схема Σ_{2^k} разделена на 2^i частей по 2^{k-i} блоков в каждой.

Индукцией по i легко установить, что множество наборов D_i позволяет распознать наличие размыкания в схеме и определить, на какой из цепей Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 и в какой именно из 2^i частей схемы произошло размыкание контакта, лежащего в основном блоке ($i = \overline{0, k}$). Действительно, справедливость базиса индукции следует непосредственно из приведенных выше рассуждений о наборах множества D_0 . Из этих же соображений вытекает утверждение о том, что D_i позволяет распознать наличие размыкания в схеме и определить, на какой из цепей Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 произошло размыкание контакта.

Остается пояснить, что если множество наборов D_i позволяет распознать наличие размыкания в схеме и определить, на какой из цепей Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 и в какой именно из 2^i частей схемы произошло размыкание контакта, лежащего в основном блоке, то при добавлении наборов $\tilde{\beta}'_{i+1}, \tilde{\beta}''_{i+1}$ можно, очевидно, локализовать место размыкания основном блоке с точностью до половины одной из 2^i частей схемы (поскольку цепи, соответствующие наборам $\tilde{\beta}'_{i+1}, \tilde{\beta}''_{i+1}$, проходят в каждой из 2^i частей схемы через все цепи Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 , но через каждую — лишь в одной из половин каждой части).

Значит, множество наборов D_k позволяет указать место размыкания, за исключением, возможно, двух упоминавшихся ранее ситуаций: могут оказаться неотличимыми лишь размыкания контактов \bar{x}_1 и x_n , а также x_1 и \bar{x}_n . Чтобы ликвидировать этот недостаток, можно добавить в тест набор $\tilde{\gamma} = 01[0]^{2^k-2}$.

Единичный диагностический тест длины $2k + 5$ при $n = 2^k$ построен.

Рассмотрим теперь случай $n \in (2^{k-1}; 2^k)$ ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$).

Тогда единичный диагностический тест длины $2k + 5$ строится по тесту такой же длины для случая $n = 2^k$ отсечением от всех наборов последних $2^k - n$ разрядов и превращением всех неединичных наборов для функции f_n в единичные инвертированием последнего разряда. Теорема доказана.

В следующей теореме доказывается, что минимальный полный диагностический тест для самой труднотестируемой булевой функции n переменных состоит из всех 2^n наборов.

Теорема 5 (Х. А. Мадатян). *Для функции Шеннона длины минимального полного диагностического теста относительно размыканий и замыканий контактов в двухполюсных контактных схемах при всех натуральных n , $n \geq 2$, имеет место оценка:*

$$D_K^D(O^{\text{const}}, n) = 2^n.$$

Доказательство. Рассмотрим счетчик четности $f_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$. Пусть Σ — произвольная двухполюсная КС, реализующая f_n . Если разомкнуть все контакты КС Σ , получим функцию неисправности $h_0 \equiv 0$. Если замкнуть все контакты КС Σ , получим функцию неисправности $h_1 \equiv 1$.

Выберем произвольный набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ такой, что $f_n(\tilde{\alpha}) = 1$. В Σ имеется простая цепь, проводящая на $\tilde{\alpha}$ и соединяющая полюса схемы. В этой цепи, очевидно, не могут встречаться контакты $x_1^{\tilde{\alpha}_1}, \dots, x_n^{\tilde{\alpha}_n}$. Оказывается, каждый контакт вида $x_i^{\alpha_i}$ ($i = \overline{1, n}$) обязан присутствовать в данной цепи. Допустим, некоторый контакт $x_i^{\alpha_i}$ отсутствует в цепи. Тогда на наборе $(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \tilde{\alpha}_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) = \tilde{\alpha}^{(i)}$ схема Σ проводит, но $f_n(\tilde{\alpha}^{(i)}) = 0$ — противоречие. Разомкнем в Σ все контакты, кроме контактов данной цепи. Полученная схема реализует функцию $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$, отличающуюся от h_0 только на наборе $\tilde{\alpha}$. Следовательно, всякий набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $f_n(\tilde{\alpha}) = 1$, обязан входить в полный диагностический тест для КС Σ .

Сечением двухполюсной контактной схемы Σ называется такое не содержащее противоположных контактов одной переменной множество контактов схемы Σ , которое имеет общий контакт с каждой простой проводящей цепью, соединяющей полюса Σ . Сечение, всякое собственное подмножество которого не является сечением, — *тупиковое*.

Выберем произвольный набор $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ такой, что $f_n(\tilde{\beta}) = 0$. Рассмотрим множество $Q_{\tilde{\beta}}$ всех контактов, разомкнутых в Σ на наборе $\tilde{\beta}$. Очевидно, $Q_{\tilde{\beta}}$ — сечение КС Σ . Удаляя из $Q_{\tilde{\beta}}$ некоторые контакты, можно получить тупиковое сечение $\hat{Q}_{\tilde{\beta}}$. Ясно, что в $\hat{Q}_{\tilde{\beta}}$ не может быть контактов $x_1^{\beta_1}, \dots, x_n^{\beta_n}$. Покажем, что для всякого $i, i = \overline{1, n}$, контакт $x_i^{\bar{\beta}_i}$ обязан входить в $\hat{Q}_{\tilde{\beta}}$. Если контакт $x_i^{\bar{\beta}_i}$ не входит в $\hat{Q}_{\tilde{\beta}}$, то КС Σ не проводит на наборе $(\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \bar{\beta}_i, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n)$, но $f_n(\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \bar{\beta}_i, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n) = 1$ — противоречие. Замкнем в Σ все контакты, кроме контактов из $\hat{Q}_{\tilde{\beta}}$. Получим схему, реализующую функцию $x_1^{\bar{\beta}_1} \vee x_2^{\bar{\beta}_2} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\beta}_n}$. Следовательно, эта функция отличается от h_1 только на наборе $\tilde{\beta}$, следовательно, набор $\tilde{\beta}$ обязан входить в полный диагностический тест для КС Σ . Теорема доказана.

Пусть БФ $f(\check{x}^n)$ является подфункцией БФ g , т.е. f можно получить из g подстановкой констант вместо некоторых переменных. Пусть, далее, r — это минимально возможное количество переменных функции g такое, что при подстановке некоторых констант вместо этих переменных функции g получается функция, равная f . Тогда о всякой схеме, реализующей булеву функцию g , будем говорить, что она *моделирует функцию f с входной избыточностью r* .

Приступим к построению двухполюсных КС, с небольшой входной избыточностью моделирующих булевы функции и допускающих единичные проверяющие тесты константной длины.

Обозначим через $\Sigma_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($n \geq 2$) минимальную построенную по методу каскадов двухполюсную контактную схему счетчика четности $x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$ (схему Кардо, см. рис. 1). Блоком в этой схеме считается нерасширяемая связная подсхема из контактов, управляемых одной переменной; число блоков указывается нижним индексом в названии схемы, названия блоков суть $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n$. Блоки не объединяются и не меняют названий при отождествлениях или переименованиях переменных (и даже контактов) в схеме $\Sigma_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Размыкающие контакты в этой схеме будут считаться изображаемыми горизонтально, а замыкающие — наклонно.

Порядок переменных в названии схемы (здесь и далее) определяет, какая переменная участвует в управлении очередного блока в схеме (в дальнейшем будут рассматриваться и схемы, у которых в управлении одним блоком участвуют две переменные, но одна из них будет общей для всех таких блоков, — она будет в названии схемы указываться в конце списка переменных после точки с запятой). Опишем более подробно, как устроен блок \mathbf{B}_i для переменной x_i в схеме $\Sigma_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($i = \overline{1; n}$). У блока \mathbf{B}_i при $i = \overline{2; n-1}$ два входных («левый верхний» и «левый нижний») и два выходных («правый верхний» и «правый нижний») полюса. Два замыкающих (наклонных) контакта x_i соединяют левый верхний полюс блока \mathbf{B}_i с правым нижним (первый контакт), а левый нижний — с правым верхним (второй контакт).

Два размыкающих контакта \bar{x}_i соединяют левый верхний полюс блока с правым верхним (первый контакт — верхний горизонтальный), а левый нижний полюс — с правым нижним (второй контакт — нижний горизонтальный). Блок \mathbf{B}_1 таков: его левый (и единственный входной) полюс a' соединяется контактом \bar{x}_1 с правым нижним (одним из выходных) полюсом блока \mathbf{B}_1 , а контактом x_1 — с правым верхним (вторым из выходных) полюсом блока \mathbf{B}_1 . Блок \mathbf{B}_n таков: его правый нижний (один из входных) полюс соединяется контактом x_n с левым (и единственным выходным) полюсом b' , а его правый верхний (один из входных) полюс соединяется контактом \bar{x}_n с полюсом b' . Блоки соединяются так: правый верхний (соответственно правый нижний) полюс блока \mathbf{B}_i отождествляется с левым верхним (соответственно левым нижним) полюсом блока \mathbf{B}_{i+1} ($i = \overline{1, n-1}$). Вершина a' объявляется входным полюсом построенной схемы $\Sigma_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$, а вершина b' — ее выходным полюсом.

На рисунке 2 изображена схема $\Sigma_{s+3}(y_1, b_1, b_2, \dots, b_s, y_1, y_2)$ с полюсами a, b' .

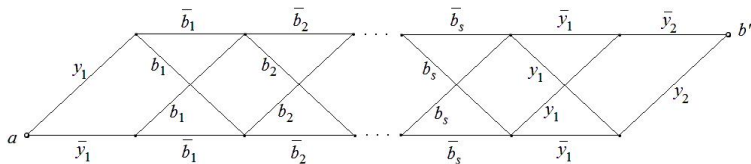


Рис. 2. Схема $\Sigma_{s+3}(y_1, b_1, b_2, \dots, b_s, y_1, y_2)$.

Схема $\Sigma'_{m+2}(z_1, x_1, x_2, \dots, x_m, z_3; z_2)$ ($m \geq 1$) получается из схемы $\Sigma_{m+2}(z_1, x_1, x_2, \dots, x_m, z_3)$ так: все верхние горизонтальные контакты блоков $\mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{m+1}$ переименовываются в контакты \bar{z}_2 , все нижние горизонтальные контакты этих блоков инвертируются (и оказываются контактами x_1, \dots, x_m), все наклонные контакты этих блоков переименовываются в контакты z_2 , оба контакта блока \mathbf{B}_{m+2} инвертируются (и верхний становится контактом z_3 , а нижний — контактом \bar{z}_3). Легко видеть, что при $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ схема $\Sigma'_{m+2}(z_1, x_1, x_2, \dots, x_m, z_3; z_2)$ моделирует функцию, задаваемую монотонной конъюнкцией $x_1 \& x_2 \& \dots \& x_m$.

На рисунке 3 изображена схема

$\Sigma'_{q(i)+2}(y_3, x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_{q(i)}}, y_5; y_4)$ с полюсами a_i и b_i .

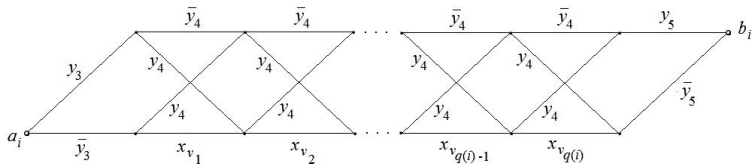


Рис. 3. Схема $\Sigma'_{q(i)+2}(y_3, x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_{q(i)}}, y_5; y_4)$.

Схема $\Sigma''_{m+2}(z_1, x_1, x_2, \dots, x_m, z_3; z_2)$ ($m \geq 1$) получается из схемы $\Sigma_{m+2}(z_1, x_1, x_2, \dots, x_m, z_3)$ следующим образом: все горизонтальные контакты блоков $\mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{m+1}$ переименовываются в контакты \bar{z}_2 , все наклонные контакты этих блоков, соединяющие левый нижний полюс блока с правым верхним, инвертируются (и оказываются контактами $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$), остальные наклонные контакты этих блоков переименовываются в контакты z_2 . Легко видеть, что при $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ схема $\Sigma''_{m+2}(z_1, x_1, x_2, \dots, x_m, z_3; z_2)$ моделирует функцию, задаваемую отрицанием монотонной конъюнкции: $x_1 \& x_2 \& \dots \& x_m = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \dots \vee \bar{x}_m$.

На рисунке 4 изображена схема

$\Sigma''_{q(i)+2}(y_3, x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_{q(i)}}, y_5; y_4)$ с полюсами a_i и b_i .

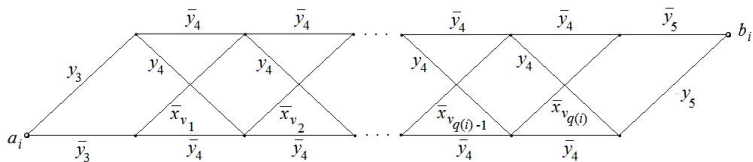


Рис. 4. Схема $\Sigma''_{q(i)+2}(y_3, x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_{q(i)}}, y_5; y_4)$.

Лемма 1. Пусть $1 \leq v_1 < v_2 < \dots < v_q \leq n$. При нечетном q рассмотрим в качестве схем Σ' , Σ'' двухполюсные КС $\Sigma'_{q+2}(y_3, x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_q}, y_5; y_4)$ и $\Sigma''_{q+2}(y_3, x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_q}, y_5; y_4)$ соответственно, при четном q рассмотрим в качестве схем Σ' , Σ'' двухполюсные КС $\Sigma'_{q+2}(y_3, x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_q}, y_6; y_4)$ и $\Sigma''_{q+2}(y_3, x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_q}, y_6; y_4)$ соответственно. Тогда найдутся 8 таких наборов значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n, y_3, y_4, y_5, y_6$ (переменные в наборах следуют в этом порядке, а значения всех переменных x_1, x_2, \dots, x_n на каждом из наборов совпадают), что

- 1) эти наборы образуют единичный проверяющий тест для каждой из схем Σ' , Σ'' ,
- 2) на каждом из этих наборов проводимости схем Σ' , Σ'' различны, и при этом на четырех из этих наборов проводит схема Σ' и на других четырех из этих наборов проводит схема Σ'' .

Доказательство. Ввиду простоты рассматриваемых подсхем ограничимся перечислением самих восьми наборов и описанием обнаруживаемых ими одиночных неисправностей в схемах. В каждой из схем Σ' , Σ'' : а) под цепью Z_1 будем понимать простую проводящую цепь, начинающуюся с контакта \bar{u}_3 , содержащую все нижние горизонтальные контакты блоков $\mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{q+1}$ и нижний контакт блока \mathbf{B}_{q+2} , б) под цепью Z_2 будем понимать простую проводящую цепь, начинающуюся с контакта u_3 , содержащую все верхние горизонтальные контакты блоков $\mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{q+1}$ и верхний контакт блока \mathbf{B}_{q+2} ,

в) под цепью Z_3 будем понимать простую проводящую цепь, начинающуюся с контакта \bar{y}_3 , состоящую в блоках $\mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{q+1}$ только из наклонных контактов, а в блоке \mathbf{B}_{q+2} содержащую тот контакт, который соединяет лежащий на этой цепи выходной полюс блока \mathbf{B}_{q+1} с выходным полюсом схемы,

г) под цепью Z_4 будем понимать простую проводящую цепь, начинающуюся с контакта y_3 , состоящую в блоках $\mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{q+1}$ только из наклонных контактов, а в блоке \mathbf{B}_{q+2} содержащую тот контакт, который соединяет лежащий на этой цепи выходной полюс блока \mathbf{B}_{q+1} с выходным полюсом схемы.

В таблице 1 в первом столбце приводятся сами эти наборы, во втором — значения функции проводимости схемы Σ' на этих наборах, в третьем перечисляются виды обнаруживаемых на этих наборах неисправностей схемы Σ' . Таблица 2 устроена аналогично таблице 1, но описывает обнаружение неисправностей схемы Σ'' . Первое утверждение леммы следует теперь из того, что в каждой таблице (1 и 2) упомянуты как обнаруживаемые все возможные одиночные неисправности схем Σ' , Σ'' , а второе — из построчного сравнения таблиц. Лемма доказана.

Таблица 1

$x_1 \dots x_n u_3 u_4 u_5 u_6$	h'	Обнаруживаемые неисправности
1 ... 1 0 0 0 0	1	размыкания всех контактов цепи Z_1
1 ... 1 1 0 1 1	1	размыкания всех контактов цепи Z_2
0 ... 0 0 1 1 0	1	размыкания всех контактов цепи Z_3
0 ... 0 1 1 0 1	1	размыкания всех контактов цепи Z_4
1 ... 1 1 0 0 0	0	замыкания контактов \bar{y}_3, u_5, u_6 и всех наклонных контактов в $\mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{q+1}$
1 ... 1 0 0 1 1	0	замыкания контактов $u_3, \bar{y}_5, \bar{y}_6$ и всех наклонных контактов в $\mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{q+1}$
0 ... 0 1 1 1 0	0	замыкания контактов $\bar{y}_3, \bar{y}_5, u_6$ и всех горизонтальных контактов в $\mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{q+1}$
0 ... 0 0 1 0 1	0	замыкания контактов u_3, u_5, \bar{y}_6 и всех горизонтальных контактов в $\mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{q+1}$

Таблица 2

$x_1 \dots x_n u_3 u_4 u_5 u_6$	h''	Обнаруживаемые неисправности
1 ... 1 0 0 0 0	0	замыкания контактов u_3, u_5, u_6 и всех наклонных контактов в $\mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{q+1}$
1 ... 1 1 0 1 1	0	замыкания контактов $\bar{u}_3, \bar{u}_5, \bar{u}_6$ и всех наклонных контактов в $\mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{q+1}$
0 ... 0 0 1 1 0	0	замыкания контактов u_3, \bar{u}_5, u_6 и всех горизонтальных контактов в $\mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{q+1}$
0 ... 0 1 1 0 1	0	замыкания контактов $\bar{u}_3, u_5, \bar{u}_6$ и всех горизонтальных контактов в $\mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{q+1}$
1 ... 1 1 0 0 0	1	размыкания всех контактов цепи Z_2
1 ... 1 0 0 1 1	1	размыкания всех контактов цепи Z_1
0 ... 0 1 1 1 0	1	размыкания всех контактов цепи Z_4
0 ... 0 0 1 0 1	1	размыкания всех контактов цепи Z_3

Теорема 6. Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная булева функция. Тогда функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно смоделировать тестопригодной двухполюсной КС $\hat{\Sigma}_f^*$, допускающей единичный проверяющий тест, имеющий длину, не превосходящую 3δ , при этом входная избыточность моделирования функции f этой схемой не превосходит δ и в схеме может встречаться еще одна фиктивная дополнительная переменная.

Доказательство. Если функция f — константа, то искомая КС $\hat{\Sigma}_f^*$ имеет вид контакта переменной y_1 . Построим для отличной от константы булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ моделирующую ее КС $\hat{\Sigma}_f^*$ с одним входным и одним выходным полюсом следующим образом. Пусть в полиноме Жегалкина для функции f имеется s отличных от констант слагаемых K_1, K_2, \dots, K_s , являющихся монотонными конъюнкциями, а сам полином Жегалкина можно привести к виду $K_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_s \oplus \beta_0$, где $\beta_0 \in \{0, 1\}$. Для каждого слагаемого $K_i = x_{v_1} x_{v_2} \dots x_{v_{q(i)}}$ ($i = \overline{1, s}, 1 \leq v_1 < v_2 < \dots < v_{q(i)} \leq n$) полинома Жегалкина функции f строятся в соответствии с леммой 1:

- а) схема $\hat{S}'(K_i)$, имеющая при нечетном $q(i)$ вид $\Sigma'_{q(i)+2}(y_3, x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_{q(i)}}, y_5; y_4)$ и при четном $q(i)$ вид $\Sigma'_{q(i)+2}(y_3, x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_{q(i)}}, y_6; y_4)$,
- б) схема $\hat{S}''(K_i)$, имеющая при нечетном $q(i)$ вид $\Sigma''_{q(i)+2}(y_3, x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_{q(i)}}, y_5; y_4)$ и при четном $q(i)$ вид $\Sigma''_{q(i)+2}(y_3, x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_{q(i)}}, y_6; y_4)$.

В двухполюсной схеме $\Sigma_{s+3}(y_1, b_1, b_2, \dots, b_s, y_1, y_2)$ с входным полюсом a и выходным полюсом b каждый контакт b_i заменяется на двухполюсную подсхему $\hat{S}'(K_i)$, а каждый контакт \bar{b}_i заменяется на двухполюсную подсхему $\hat{S}''(K_i)$ ($i = \overline{1, s}$). При такой замене блок \mathbf{B}_i схемы $\Sigma_{s+3}(y_1, b_1, b_2, \dots, b_s, y_1, y_2)$ превращается в блок \mathbf{B}_i новой схемы. Искомая КС $\hat{\Sigma}_f^*$ получена. Она моделирует функцию f (достаточно положить $y_2 = \beta_0$, $y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = 0$). Единичный проверяющий тест для нее строится на основании, фактически, леммы 1. Возьмем восемь наборов из доказательства леммы 1 и заменим каждый из них на 4 набора, добавив произвольные значения переменных y_1, y_2 (обозначим составленное множество из 32 наборов через \check{T}). На всяком наборе из \check{T} у всех подсхем $\hat{S}'(K_i)$ проводимости одинаковы и отличны от проводимостей всех подсхем $\hat{S}''(K_i)$.

Для каждого набора $\tilde{\alpha}'$ из 32 наборов множества \check{T} найдется такой набор $\tilde{\beta}'$ значений переменных $(b_1, b_2, \dots, b_s, y_1, y_2)$, у которого те же, что и у $\tilde{\alpha}'$, значения переменных y_1, y_2 , значения переменных b_1, \dots, b_s одинаковы, что при этом выполнено свойство: какой бы блок \mathbf{B}_i ни взять в схемах $\hat{\Sigma}_f^*$ и $\Sigma_{s+3}(y_1, b_1, b_2, \dots, b_s, y_1, y_2)$, проводимости на наборе $\tilde{\alpha}'$ между входными и выходными полюсами в блоке \mathbf{B}_i схемы $\hat{\Sigma}_f^*$ будут такими же, как проводимости на наборе $\tilde{\beta}'$ между соответствующими входными и выходными полюсами в блоке \mathbf{B}_i схемы $\Sigma_{s+3}(y_1, b_1, b_2, \dots, b_s, y_1, y_2)$.

Отметим: на всех восьми возможных наборах вида $\tilde{\beta}'$ в схеме $\Sigma_{s+3}(y_1, b_1, b_2, \dots, b_s, y_1, y_2)$ обнаруживаются все одиночные размыкания и замыкания контактов, кроме размыканий трех контактов, инцидентных верхнему входному полюсу блока \mathbf{B}_{s+3} , при четном s и кроме замыкания верхнего контакта блока \mathbf{B}_{s+3} при четном s . Поэтому в схеме $\hat{\Sigma}_f^*$ в блоках \mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_{s+2} , \mathbf{B}_{s+3} на указанных 32 наборах множества \check{T} обнаруживаются все одиночные неисправности контактов, кроме размыканий трех контактов, инцидентных верхнему входному полюсу блока \mathbf{B}_{s+3} , при четном s и кроме замыкания верхнего контакта блока \mathbf{B}_{s+3} при четном s . Добавим к \check{T} наборы $(\tilde{\alpha}, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(\tilde{\alpha}, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(\tilde{\alpha}, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$, где $f(\tilde{\alpha}) = \bar{\beta}_0$, чтобы ликвидировать этот недостаток. Полученное множество T из 35 наборов образует единственный проверяющий тест для схемы $\hat{\Sigma}_f^*$.

Действительно, рассмотрим сначала ситуацию, когда разомкнут вследствие неисправности некоторый контакт (назовем его z) в одной из подсхем S''' (вида $\hat{S}'(K_i)$ или $\hat{S}''(K_i)$). В T существуют наборы, на которых подсхема S''' проводит и в ней имеется простая проводящая между ее полюсами цепь, проходящая через контакт z . Среди этих наборов есть такой, на котором вся схема $\hat{\Sigma}_f^*$ при отсутствии неисправностей проводит и при этом имеется простая проводящая цепь между полюсами схемы, проходящая через полюсы подсхемы S''' . На этом наборе обнаруживается размыкание контакта z . Пусть теперь этот же контакт z в подсхеме S''' замкнут вследствие неисправности. В T существуют наборы, на которых подсхема S''' не проводит между своими полюсами, но при замыкании контакта z в ней возникает проводящая между ее полюсами цепь.

Среди этих наборов есть такой, на котором вся схема $\hat{\Sigma}_f^*$ не проводит. Это, однако, предполагает, что в блоках $\mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{s+1}$ в силу свойств схемы $\Sigma_{s+3}(y_1, b_1, b_2, \dots, b_s, y_1, y_2)$ и подсхем $\hat{S}'(K_i), \hat{S}''(K_i)$ от двух входных полюсов блока \mathbf{B}_2 к двум выходным полюсам блока \mathbf{B}_{s+1} ведут две не имеющие общих контактов проводящие цепи, причем одна из этих цепей проводит от входного полюса схемы до одного из выходных полюсов блока \mathbf{B}_{s+1} , а другая проводит от входного полюса блока \mathbf{B}_2 до выходного полюса схемы, так что при возникновении проводимости (вследствие замыкания контакта z) между полюсами S''' во всей схеме $\hat{\Sigma}_f^*$ возникает проводимость. На этом-то наборе и обнаруживается замыкание контакта z . Теорема доказана.

Оказывается, в случае реализации (а не моделирования с небольшой входной избыточностью, как в теореме 6) двухполюсными контактными схемами произвольных булевых функций добиться константных верхних оценок длины единичного проверяющего теста оказывается невозможно. Именно, справедлива

Теорема 7. Пусть O_1^{const} — источник одиночных замыканий или размыканий контактов. Тогда при любом натуральном n , $n \geq 2$, справедлива оценка: $L_K^{\Pi}(O_1^{const}, n) \geq n + 2$.

Доказательство. Рассмотрим булеву функцию $h(\tilde{x}^n)$ — характеристическую функцию единичной сферы с центром в нулевом наборе: $h(\tilde{\alpha}^n) = 1$ тогда и только тогда, когда в наборе $\tilde{\alpha}^n$ ровно одна единица. Так как функция h существенно зависит от всех своих переменных и не является монотонной и антимонотонной по каждой из них, то в любой контактной схеме, реализующей функцию h , обязан присутствовать хотя бы один размыкающий и хотя бы один замыкающий контакт каждой переменной (см.: С. А. Ложкин, Лекции по основам кибернетики, М.: МАКС Пресс, 2004, с. 194–195, лемма 2.2). В тестопригодной двухполюсной контактной схеме, реализующей h , размыкание каждого контакта x_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, должно быть обнаруживаемо.

Но это размыкание может быть обнаружено лишь на таком наборе $\tilde{\alpha}^n$, в котором переменная x_i принимает значение 1 и при этом $h(\tilde{\alpha}^n) = 1$. Но такой набор ровно один (с точностью до введения фиктивных переменных) — это набор с единственной единицей в позиции переменной x_i . Такой набор для каждой x_i обязан войти в единичный проверяющий тест размыкания, и минимальная длина такого теста не меньше n . Еще по крайней мере два набора нужно добавить в единичный проверяющий тест, чтобы обнаружить замыкания всех контактов (одного набора не хватит, так как на этом наборе не будут обнаружены замыкания замкнутых на данном наборе контактов). Теорема доказана.

6.4. Построить все тупиковые а) проверяющие, б) диагностические тесты для контактной схемы на рис. 5 и источника неисправностей, допускающего одну из следующих неисправностей: обрыв контакта \bar{z} , обрыв выделенного контакта z и замыкание выделенного контакта y .

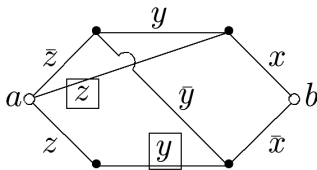


Рис. 5.

Решение. Вычислим таблицу контроля для заданных схемы и источника неисправностей (здесь $f_1 = f$ — функция, реализуемая исходной схемой в отсутствие неисправностей, $f_2 = f_{\bar{z}}^p$ — функция, реализуемая схемой при размыкании контакта \bar{z} , $f_3 = f_z^p$ — функция, реализуемая схемой при размыкании выделенного контакта z , $f_4 = f_y^3$ — функция, реализуемая схемой при замыкании выделенного контакта y):

x	y	z	$f_1 = f$	$f_2 = f_{\bar{z}}^p$	$f_3 = f_z^p$	$f_4 = f_y^3$	
0	0	0	1	0	1	1	y_1
0	0	1	0	0	0	1	y_2
0	1	0	0	0	0	0	y_3
0	1	1	1	1	1	1	y_3'
1	0	0	0	0	0	0	y_3''
1	0	1	1	1	0	1	y_4
1	1	0	1	0	1	1	y_1'
1	1	1	1	1	0	1	y_4'

Функциональную часть этой таблицы будем считать матрицей M . Каждой строке матрицы M сопоставлена своя переменная; предварительно все строки M (и соответствующие им входные наборы) были разбиты на классы эквивалентности так, что в один класс входили попарно равные или попарно противоположные строки, названия переменных для строк из одного класса отличаются лишь числом штрихов.

а) Цель контроля \mathcal{N} для задачи проверки матрицы M имеет вид

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}^{\Pi} = \{(1, j) \mid 2 \leq j \leq 4\}.$$

Построим матрицу $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'(M, \mathcal{N}^{\Pi})$ для пары (M, \mathcal{N}^{Π}) , состоящую из покоординатных сумм (по модулю 2) пар столбцов, входящих в \mathcal{N}^{Π} , при этом из каждого класса эквивалентности строк беря по одной строке (заметим: строки матрицы M , не содержащие неодинаковых элементов, можно было бы не включать в \mathcal{M}'):

$$\mathcal{M}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix}$$

Построим КНФ функции покрытия матрицы M' :

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1 y_2 y_4.$$

Ясно, что в правой части этого равенства находится сокращенная ДНФ функции F . Каждое слагаемое построенной сокращенной ДНФ функции F задает свой тупиковый проверяющий тест для таблицы M . Чтобы охватить все тупиковые проверяющие тесты для таблицы M , следует в каждом построенном тесте осуществить всевозможные замены входных наборов на входные наборы из того же класса эквивалентности. Все тупиковые проверяющие тесты: $\{(000), (001), (101)\}$, $\{(000), (001), (111)\}$, $\{(110), (001), (101)\}$, $\{(110), (001), (111)\}$.

б) Цель контроля \mathcal{N} для задачи диагностики матрицы M имеет вид

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}^D = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq 4\}.$$

Построим матрицу $M'' = M''(M, \mathcal{N}^D)$ для пары (M, \mathcal{N}^D) , состоящую из покоординатных сумм (по модулю 2) пар столбцов, входящих в \mathcal{N}^D , при этом из каждого класса эквивалентности строк беря по одной строке (заметим: строки матрицы M , не содержащие неодинаковых элементов, можно было бы не включать в M''):

$$M'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix}$$

Построим КНФ функции покрытия матрицы M'' :

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1 y_4 y_2 (y_1 \vee y_4)(y_1 \vee y_2)(y_2 \vee y_4) = y_1 y_2 y_4.$$

Ясно, что в правой части этого равенства находится сокращенная ДНФ функции F . Каждое слагаемое построенной сокращенной ДНФ функции F задает свой тупиковый диагностический тест для таблицы M . Чтобы охватить все тупиковые диагностические тесты для таблицы M , следует в каждом построенном тесте осуществить всевозможные замены входных наборов на входные наборы из того же класса эквивалентности. Все тупиковые диагностические тесты:

$$\{(000), (001), (101)\}, \{(000), (001), (111)\}, \\ \{(110), (001), (101)\}, \{(110), (001), (111)\}.$$

Ответ. Все тупиковые (как проверяющие, так и диагностические) тесты: $\{(000), (001), (101)\},$
 $\{(000), (001), (111)\}, \{(110), (001), (101)\},$
 $\{(110), (001), (111)\}.$

6.11. Найти длину минимального единичного проверяющего теста относительно размыканий контактов в контактной схеме на рис. 6.

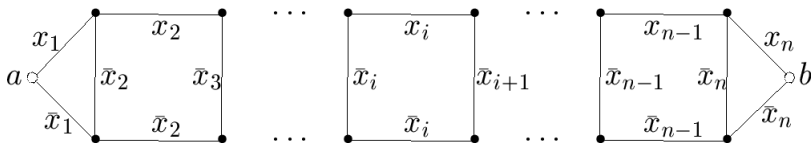


Рис. 6.

Решение. Заметим: через контакты \bar{x}_1 , x_n и «вертикальные» контакты \bar{x}_2 , \bar{x}_3 , ..., \bar{x}_n проходит по одной простой проводящей цепи, соединяющей полюсы схемы, и при этом эти цепи проводят на попарно различных наборах. Значит, чтобы обнаружить одиночные размыкания указанных контактов, в единичный проверяющий тест необходимо включить упомянутые $n + 1$ наборов. Остается заметить, что на этих же наборах обнаруживаются одиночные размыкания всех контактов схемы.

Ответ. $n + 1$.

6.12. Рассматривается КС на рис. 7.

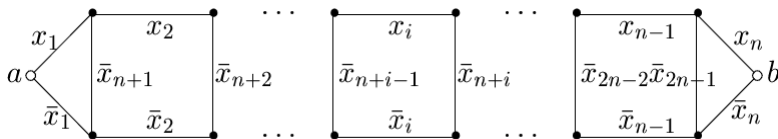


Рис. 7.

- 1) Найти длину минимального единичного проверяющего теста для размыкания.
- 2) Построить такой единичный тест размыкания для контактов вида $x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$, длина которого не превосходит величины $\lceil \log_2 n \rceil + 2$.

5.11. Пусть отделимая по столбцам матрица M из $V^{m,n}$ имеет в каждой своей строке не более p , $p > 0$, единиц. Доказать, что длина минимального диагностического теста для матрицы M не менее $\lceil \frac{n}{2p} \rceil$.

5.12. Две матрицы M и L с одинаковым числом строк называются T -эквивалентными, если множество номеров строк матрицы M является тестом тогда и только тогда, когда оно является тестом матрицы L . Пусть первый столбец отделимой по столбцам матрицы M , $M \in B^{m,n+1}$, состоит из одних нулей (любая матрица T -эквивалентна матрице с таким же числом столбцов, у которой первый столбец состоит только из нулей), а ее остальные столбцы можно разбить на s групп так, что подматрица матрицы M , порождаемая любой из этих групп, имеет в каждой своей строке не более одной единицы. Показать, что длина диагностического теста матрицы M не меньше, чем $2n/(s+1)$.

Решение. Пусть $T, T' \subseteq [1, m]$ — тест матрицы M , а $J_i, J'_i \subseteq [2, n+1]$ — множество номеров тех столбцов матрицы M , которые образуют группу с номером $i, i = 1, \dots, s$, из условия задачи. Пусть, далее, $J'_i, i = 1, \dots, s$, — множество тех чисел $j, j \in J_i$, для которых столбец $M\langle T, j \rangle$ содержит ровно одну единицу. Так как в каждой строке подматрицы $M\langle T, J_i \rangle$ имеется не более одной единицы, то $|J'_i| + 2(|J_i| - |J'_i|) \leq |T|$, и, следовательно, $|J'_i| \geq 2|J_i| - |T|$. Суммируя последние неравенства по всем $i, i = 1, \dots, s$, и учитывая, что в подматрице $M\langle T \rangle$ число столбцов, содержащих одну единицу, не больше, чем $|T|$, получим: $|T| \geq 2n - s \cdot |T|$.

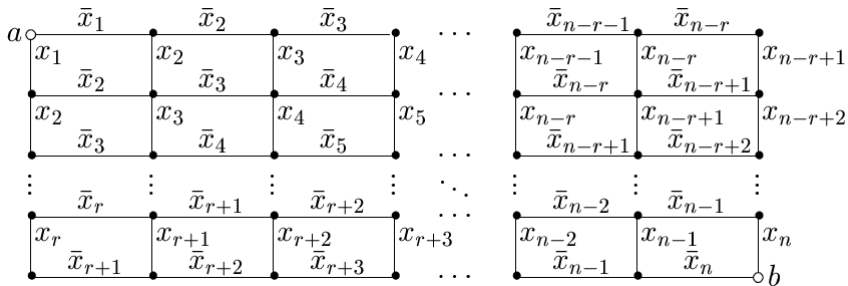


Рис. 8.

6.10. Рассматривается построенная по методу каскадов КС S_n^r (см. рис. 8), реализующая элементарную симметрическую функцию от n переменных с рабочим числом r (т. е. функцию, принимающую значение 1 на всех наборах из B_r^n и только на них).

1) Используя результат задачи 5.12, получить нижнюю оценку вида $\frac{2r(n-r)}{r+1}$ для длины единичного теста размыкания данной схемы.

2) Показать, что для S_n^r существует единичный диагностический тест размыкания длины, не превосходящей $2n - 2$.

6.13. На основе контактного дерева построена КС для функции $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$. Для этой схемы найти длину минимального единичного проверяющего теста

- а) размыкания,
- б) замыкания,
- в) как размыкания, так и замыкания.

6.16. Рассматривается построенная по методу каскадов КС Σ_n , реализующая линейную функцию $x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n \oplus 1$ при $n \geq 3$ (см. рис. 1).

- 1) Докажите эквивалентность единичных замыканий одноименных контактов.
- 2) Найдите длину минимального единичного проверяющего теста
 - а) замыкания,
 - б) размыкания,
 - в) как размыкания, так и замыкания.
- 3) Постройте асимптотически минимальный единичный диагностический тест замыкания.