Лекция 7. Числа Рамсея. Верхняя оценка числа Рамсея. Нижняя оценка числа Рамсея.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова

Лекции на сайте https://mk.cs.msu.ru

Число Рамсея

Можно ли ожидать, что если в графе G нет достаточно большого полного подграфа, то что в нем найдется достаточно большое независимое множество (т. е. множество вершин, попарно не связанных ребрами)?

Ф. П. Рамсей (1930) показал существование такого числа $R(m, n)$, что для любого графа G с не менее $R(m, n)$ вершинами: либо в G найдется полный подграф с m вершинами, либо в G найдется независимое множество с n вершинами.

Числа Рамсея

Граф $\bar{G} = (V, \bar{E})$ — **дополнительный** к графу $G = (V, E)$, если $\bar{E}$ содержит все те ребра, которых нет в E, т. е. $\bar{E} = \{(v, w) \mid v, w \in V, v \neq w, (v, w) \notin E\}$.

Число Рамсея $R(m, n)$ — такое наименьшее целое число x, что для любого графа G с x вершинами: либо в G найдется подграф K_m, либо в $\bar{G}$ найдется подграф K_n.

Числа Рамсея

Раскраска ребер графа $G = (V, E)$ в два цвета — отображение $\rho : E \to \{1, 2\}$.

Число Рамсея $R(m, n)$ — такое наименьшее число x, что при любой раскраске ребер полного графа K_x в два цвета либо в нем найдется подграф K_m с ребрами цвета 1, либо в нем найдется подграф K_n с ребрами цвета 2.

Задача о знакомых

Доказать, что среди любых шести человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

Задача о знакомых

Предложение 1. *Если G — граф с шестью вершинами, то либо G, либо $\bar{G}$ содержит треугольник.*

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ и $v \in V$ — произвольная вершина.
1. Пусть в графе G вершина v смежна с какими-то тремя вершинами $v_1, v_2, v_3 \in V$.
Если какие-то две вершины из v_1, v_2, v_3 смежны в графе G, то вместе с вершиной v они образуют треугольник.
Если все три вершины v_1, v_2, v_3 не смежны в графе G, то они образуют треугольник в графе $\bar{G}$.
2. Если в графе G вершина v смежна не более, чем с двумя вершинами, то повторим рассуждения для графа $\bar{G}$.

$\square$

Верхняя оценка числа Рамсея

Теорема 1 (П. Эрдеш, Г. Зекерес, 1935). *При* $m, n \geqslant 2$ *справедливо неравенство*

$$R(m,n) \leqslant R(m-1,n) + R(m,n-1),$$

при этом если оба числа $R(m-1,n)$, $R(m,n-1)$ *— четные, то неравенство строгое.*

Доказательство.
Положим $x = R(m-1,n) + R(m,n-1)$.
Рассмотрим произвольную раскраску ребер полного графа K_x в цвета 1 и 2.
Из произвольной вершины v графа K_x исходит либо $R(m-1,n)$ ребер цвета 1, либо $R(m,n-1)$ ребер цвета 2.
Случаи аналогичны, рассмотрим один из них.

Верхняя оценка числа Рамсея

Доказательство.
1. Пусть из вершины v графа K_x исходит $R(m-1,n)$ ребер цвета 1.
Положим V — множество из $y = R(m-1,n)$ концов этих ребер.
Множество V вместе с соединяющими их ребрами образуют полный подграф K_y графа K_x.
По определению числа $R(m-1,n)$ в графе K_y найдется либо полный подграф K_n с ребрами цвета 2, либо полный подграф K_{m-1} с ребрами цвета 1.
В первом случае этот полный подграф K_n с ребрами цвета 2 есть и в графе K_x.
Во втором случае добавим к этому полному подграфу K_{m-1} вершину v и получим полный подграф K_m с ребрами цвета 1 в графе K_x.

Верхняя оценка числа Рамсея

Доказательство.

2. Пусть оба числа $R(m-1,n)$, $R(m,n-1)$ — четные. Положим $z = R(m-1,n) + R(m,n-1) - 1$. Рассмотрим произвольную раскраску ребер полного графа K_z в цвета 1 и 2. Если из некоторой вершины v графа K_z исходит либо $R(m-1,n)$ ребер цвета 1, либо $R(m,n-1)$ ребер цвета 2, то искомый полный граф найдется.

Пусть из каждой вершины v графа K_z исходит в точности $R(m-1,n)-1$ ребер цвета 1.

Тогда рассмотрим подграф H графа K_z, образованный всеми вершинами графа K_z и всеми ребрами цвета 1.

В графе H нечетное число вершин $z = R(m-1,n) + R(m,n-1) - 1$, причем степень каждой вершины — нечетна (равна $R(m-1,n)-1$), чего не может быть.

□

Верхняя оценка числа Рамсея

Следствие 1.1. *При* $m, n \geqslant 1$ *справедливо неравенство*

$$R(m,n) \leqslant C_{m+n-2}^{m-1}.$$

Доказательство: индукция по $(m+n)$.
Базис индукции $m+n=2$ верен.
Индуктивный переход: по теореме получаем

$$\begin{aligned} R(m,n) &\leqslant R(m-1,n)+R(m,n-1) \leqslant \\ &\leqslant C_{m+n-3}^{m-2} + C_{m+n-3}^{m-1} = C_{m+n-2}^{m-1}. \end{aligned}$$

□

Верхняя оценка числа Рамсея

Следствие 1.2. *При $m, n \geqslant 1$ справедливо неравенство*

$$R(m, n) \leqslant 2^{m+n-2}.$$

Доказательство.

$$R(m, n) \leqslant C_{m+n-2}^{m-1} \leqslant 2^{m+n-2}.$$

□

Некоторые оценки чисел Рамсея

Верны равенства $R(1,n)=1$, $R(2,n)=n$.

Поэтому получаем:

$$\begin{aligned}
R(3,3) &\leqslant R(2,3)+R(3,2)=3+3=6;\\
R(3,4) &\leqslant R(2,4)+R(3,3)\leqslant 4+6=10;\\
R(3,5) &\leqslant R(2,5)+R(3,4)\leqslant 5+10=15;\\
R(4,4) &\leqslant R(3,4)+R(4,3)\leqslant 10+10=20.
\end{aligned}$$

Нижняя оценка числа Рамсея

Теорема 2 (П. Эрдеш, 1947). *При* $k \geqslant 2$ *справедливо неравенство*

$$R(k,k) \geqslant 2^{k/2}.$$

Доказательство. Рассмотрим $k \geqslant 3$, т. к. $R(2,2) = 2$.
Оценим долю $\gamma(p,k)$ графов с p помеченными вершинами, в которых найдется полный подграф с k вершинами.
Возможных ребер в графах с p вершинами ровно C_p^2, откуда графов с p вершинами в точности $2^{C_p^2}$.
Выбрать k вершин, образующих полный подграф, из p вершин можно C_p^k способами.
Оставшиеся $C_p^2 - C_k^2$ ребра могут быть проведены произвольно.
Поэтому число графов с p вершинами, содержащих полный подграф с k вершинами, не более $C_p^k \cdot 2^{C_p^2 - C_k^2}$.

Нижняя оценка числа Рамсея

Доказательство. Значит,

$$\gamma(p,k) \leqslant \frac{C_p^k \cdot 2^{C_p^2 - C_k^2}}{2^{C_p^2}} = \frac{p^k}{k!2^{C_k^2}}.$$

При $p < 2^{k/2}$ получаем

$$\gamma(p,k) < \frac{2^{k^2/2}}{k!2^{k^2/2-k/2}} = \frac{2^{k/2}}{k!} < \frac{1}{2}.$$

Нижняя оценка числа Рамсея

Доказательство.
Разобьем все графы с p вершинами на пары $(G, \bar{G})$.
Тогда по доказанному выше при $p < 2^{k/2}$ в этом разбиении найдется такая пара графов $(G, \bar{G})$, что ни G, ни $\bar{G}$ не содержат полный подграф с k вершинами.
Поэтому $R(k, k) \geqslant 2^{k/2}$.

$\square$

Нижняя оценка числа Рамсея

Следствие 2.1. *При* $m, n \geqslant 2$ *справедливо неравенство*

$$R(m, n) \geqslant 2^{\min(m,n)/2}.$$

Известные числа Рамсея

Верны равенства $R(1, n) = 1$, $R(2, n) = n$, $R(m, n) = R(n, m)$.

Числа Рамсея $R(m, n)$:

$m \setminus n$	3	4	5	6	7	8	9
3	6	9	14	18	23	28	36
4	9	18	25				

(m, n)-граф Рамсея

Граф $G = (V, E)$ называется (m, n)-**графом Рамсея**, если $|V| = R(m, n) - 1$, в G нет подграфа K_m и в $\bar{G}$ нет подграфа K_n.

Например, $(3, 3)$-граф Рамсея — простой цикл C_5 с пятью вершинами.

Краткий итог лекции

1. Существует такое число $R(m, n)$, что для любого графа G с не менее $R(m, n)$ вершинами: либо в G найдется полный подграф с m вершинами, либо в G найдется независимое множество с n вершинами.

2.
$$2^{\min(m,n)/2} \leqslant R(m, n) \leqslant 2^{m+n-2}.$$

Задачи

1. Доказать, что:

1) $R(2, n) = n$;
2) $R(3, 3) > 5$;
3) $R(3, 4) > 8$;
4) $R(3, 5) > 13$.

2.

Литература к лекции

1. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973. С. 28–30.

2. Bondy J.A., Murty U.S.R. Graph theory. Springer, 2008. С. 308–313.