Занятие 1. Функции алгебры логики. Формулы. Тождества. Существенность переменных.

Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Страница курса на сайте https://mk.cs.msu.ru

Задачник

Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004.

Функция алгебры логики

Пусть $E_2 = \{0, 1\}$. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, называется **функцией алгебры логики**, если

$$f : E_2^n \to E_2.$$

Функция называется n-**местной**, если она зависит от n переменных, $n \geqslant 1$.

Иногда считаем, что 0 и 1 являются 0-**местными** функциями алгебры логики (т. е. функциями без переменных).

Таблица истинности

Как можно задавать функции алгебры логики?

1. **Таблицы истинности** (таблицы значений). Упорядочим все наборы из множества E_2^n в **лексико-графическом** порядке (т. е. в алфавитном порядке) и сопоставим каждому набору значение функции $f \in P_2^{(n)}$ на нем:

x_1	$\ldots$	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$
0	$\ldots$	0	0	$f(0, \ldots, 0, 0)$
0	$\ldots$	0	1	$f(0, \ldots, 0, 1)$
	$\ldots$			
1	$\ldots$	1	0	$f(1, \ldots, 1, 0)$
1	$\ldots$	1	1	$f(1, \ldots, 1, 1)$

Вектор значений

2. Если считать, что все наборы из E_2^n упорядочены лексико-графически, то функция $f \in P_2^{(n)}$ однозначно задается правым столбцом ее таблицы истинности. Называем его **вектором значений** функции f и обозначаем α_f. Другими словами,

$$\alpha_f = (f(\alpha_0), f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_{2^n-1})) \in E_2^{2^n},$$

где наборы $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n-1}$ из E_2^n перечислены в лексико-графическом порядке.

Функции алгебры логики

Некоторые важные функции алгебры логики имеют собственные названия.

$n = 0$: **константы** 0, 1.

$n = 1$:

x	x	$\bar{x}$
0	0	1
1	1	0

x — **тождественно равная** x;
$\bar{x}$ — **отрицание** x.

Функции алгебры логики

$n = 2$:

x_1	x_2	$x_1 \& x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \to x_2$	$x_1 \sim x_2$	x_1 / x_2	$x_1 \downarrow x_2$
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0

Слева направо по порядку: **конъюнкция**, **дизъюнкция**, **сложение по модулю** 2, **импликация**, **эквивалентность**, **штрих Шеффера**, **стрелка Пирса**.

Конъюнкцию & также обозначаем точкой $\cdot$ или знак операции пропускаем.

Знаки $\bar{\ }$, &, $\cdot$, $\vee$, $\oplus$, $\to$, $\sim$, $/$, $\downarrow$ называем **связками**.

Функции алгебры логики

$n = 3$:

x_1	x_2	x_3	$m(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Функция $m(x_1, x_2, x_3)$ называется **медианой**, или **функцией голосования**.

Формула

3. Функции алгебры логики можно задавать **формулами**.

Пусть $A \subseteq P_2$, причем каждая функция из A имеет свое, отличное от других функций, обозначение.

Формула над множеством A определяется по индукции.

Базис индукции. Если x — переменная, то выражение x — формула.

Индуктивный переход. Если f — обозначение m-местной функции из A и $F_1, \ldots, F_m$ — уже построенные формулы (не обязательно различные), то выражение $f(F_1, \ldots, F_m)$ — формула.

Формулы со связками

Если A содержит функции со связками, то индуктивный переход проводим следующим образом:

1) если $f = \bar{x}$, то $F = \overline{F_1}$;

2) если $f = x \circ y$, где $\circ \in \{\&, \cdot, \vee, \oplus, \rightarrow, \sim, /, \downarrow\}$, то

$$F = (F_1) \circ (F_2),$$

причем если F_i — переменная, то ее в скобки не заключаем, $i = 1, 2$.

Кроме того, в построенной формуле убираем некоторые скобки, считая, что конъюнкция имеет самый высокий приоритет среди двуместных связок.

Формулы

Пример. Пусть

$$A = \{0, 1, \bar{x}, x \cdot y, x \vee y, x \oplus y, x \to y, x \sim y, x/y, x \downarrow y\} \subseteq P_2.$$

Тогда

$F_1 = x$ и $F_2 = y$	формулы, построенные по базису индукции из переменных x и y;
$F_3 = x \oplus y$	формула, построенная по индуктивному переходу из функции $x \oplus y \in A$ и формул F_1 и F_2;
$F_4 = (x \oplus y) \cdot x$	формула, построенная по индуктивному переходу из функции $x \cdot y \in A$ и формул F_3 и F_1;
$F_5 = \overline{(x \oplus y) \cdot x}$	формула, построенная по индуктивному переходу из функции $\bar{x} \in A$ и формулы F_4;
	и т. д.

Функция, определяемая формулой

Формула $F = F(x_1, \dots, x_n)$ над множеством A, $A \subseteq P_2$, однозначно задает **функцию** $f_F = f_F(x_1, \dots, x_n) \in P_2$, определяемую по индукции.

Базис индукции. Если $F = x$, где x — переменная, то $f_F(x) = x$, т. е. f_F — функция, тождественно равная x.

Индуктивный переход. Если $F = f(F_1, \dots, F_m)$, где f — обозначение m-местной функции из A и $F_1, \dots, F_m$ — формулы, причем формула $F_i = F_i(x_1, \dots, x_n)$ определяет функцию $f_{F_i}(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, m$, то

$$f_F(x_1, \dots, x_n) = f(f_{F_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, f_{F_m}(x_1, \dots, x_n)).$$

Функции, определяемые формулами

Пример. Рассмотрим формулу $F_5 = \overline{(x \oplus y) \cdot x}$ из предыдущего примера. Тогда:

x	y	$f_{F_3} = x \oplus y$	$f_{F_4} = (x \oplus y) \cdot x$	$f_{F_5} = \overline{(x \oplus y) \cdot x}$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1

Функция f_{F_5}, определяемая формулой F_5, записана в самом правом столбце.

Тождественные формулы

Формулы F_1 и F_2 называются **эквивалентными**, или **тождественными**, если на любом наборе значений переменных, входящих в формулы F_1 и F_2, функции f_{F_1} и f_{F_2} принимают одинаковые значения.

Обозначение тождественных формул: $F_1 = F_2$.

Для самостоятельного разбора: гл. 1

Гл. 1: 1.18(4), 1.17(1,2), 1.19(3,4), 1.20(6,7).

Для решения задач

Существенная переменная

Введем понятие существенной переменной функции.

Переменная x_i называется **существенной** для функции $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$, если найдутся такие элементы $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \in E_2$, что

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Другими словами, переменная x_i — существенна для функции $f \in P_2$, если найдутся два соседних по i-му разряду набора, на которых функция f принимает различные значения.

Т. е. переменная x_i — существенна для функции $f \in P_2$, если все другие переменные можно так определить, что полученная функция одной переменной x_i принимает два значения: и 0, и 1 (т. е. не является константой).

Несущественная переменная

Переменная, не являющаяся существенной, называется **несущественной**, или **фиктивной**.

Равенство функций определяем с точностью до несущественных переменных.

Т. е. считаем, что несущественные переменные можно добавлять и убирать.

Равенство функций алгебры логики

Функции $f \in P_2$ и $g \in P_2$ назовем **равными**, если добавляя или убирая несущественные переменные из них можно получить совпадающие функции, т. е. функции, зависящие от одних и тех же переменных и при любом наборе значений этих переменных принимающие одно и то же значение.

Пример. Функции $f(x) = x$ и $g(x, y) = x$ равны.

Конгруэнтность функций алгебры логики

Функции $f \in P_2$ и $g \in P_2$ называются **конгруэнтными**, если переменные одной из них можно так переобозначить (при этом разные переменные переобозначаются по-разному), что получится функция, равная другой.

Пример. Функции $f(x) = x$ и $h(y) = y$ конгруэнтны.

Для самостоятельного разбора: гл. 1

Гл. 1: 1.28(1,2), 1.31(1,2), 1.33(1,2), 1.34(5).

Для решения задач

Домашнее задание

По задачнику: Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004.

Гл. 1: 1.17(3,4), 1.19(3,4), 1.20(4,5), 1.28(3), 1.31(3), 1.33(5,9), 1.34(6), 1.35.