Математические модели последовательных вычислений

mk.cs.msu.ru $\to$ Лекционные курсы
$\to$ Математические модели последовательных вычислений

Блок 18

Эрбрановские интерпретации
для стандартных схем программ

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, весенний семестр

Проблема функциональной эквивалентности стандартных схем программ схожа с проблемой равносильности формул логики предикатов: требуется проверить совпадение смысла двух формальных объектов в каждой интерпретации логики предикатов

Для «упорядочивания» рассуждений о произвольных интерпретациях при решении задач логики предикатов иногда применяется особый класс эрбрановских интерпретаций

Как и раньше, далее полагаем заданными множество переменных Var и сигнатуру логики предикатов $\sigma = \langle \mathrm{Const}, \mathrm{Func}, \mathrm{Pred} \rangle$

Эрбрановским универсум $\mathcal{H}_\sigma$ сигнатуры σ — это множество всех основных термов (то есть термов, не содержащих ни одной переменной) сигнатуры σ', получающейся из σ добавлением новой константы $\mathbf{c}_{\mathtt{x}}$ для каждой переменной $\mathtt{x}$

Эрбрановская интерпретация (она же свободная интерпретация) сигнатуры σ — это интерпретация $\mathcal{I} = (\mathcal{H}_\sigma, \overline{\mathsf{Const}}_{\mathcal{H}}, \overline{\mathsf{Func}}_{\mathcal{H}}, \overline{\mathsf{Pred}})$, где

- $\overline{\mathsf{Const}}_{\mathcal{H}}(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$
- $\overline{\mathsf{Func}}_{\mathcal{H}}(\mathbf{f}^{(n)})(t_1, \ldots, t_n) = \mathbf{f}(t_1, \ldots, t_n)$

Таким образом, эрбрановские интерпретации используют основные термы в качестве предметов и отличаются друг от друга только оценкой предикатных символов (а остальные три составляющих однозначно задаются сигнатурой)

Эрбрановское вычисление стандартной схемы программ — это её вычисление в эрбрановской интерпретации на оценке $\xi_{\mathcal{H}}$, такой что $\xi_{\mathcal{H}}(x) = \mathbf{c}_{\mathrm{x}}$ для каждой переменной x

Утверждение. **Для любых конечных подстановок θ, η и любой эрбрановской интерпретации $\mathcal{I}$ верно**

$$\theta[\xi_{\mathcal{H}}]_{\mathcal{I}} = \eta[\xi_{\mathcal{H}}]_{\mathcal{I}} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \eta$$

Доказательство. Следует из соответствующих определений ▼

Это означает, что оценку переменных, получающуюся в процессе эрбрановского вычисления стандартной схемы программ, можно отождествить с подстановкой, при применении которой получается эта оценка

Стандартные схемы программ π_1, π_2 назовём эрбрановски эквивалентными ($\pi_1 \sim_{\mathcal{H}} \pi_2$), если для любой эрбрановской интерпретации $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ верно $val(\pi_1, \mathcal{I}_{\mathcal{H}}, \xi_{\mathcal{H}}) = val(\pi_2, \mathcal{I}_{\mathcal{H}}, \xi_{\mathcal{H}})$

Теорема (об эрбрановских интерпретациях). Для любых стандартных схем программ π_1, π_2 верно следующее:

$$\pi_1 \sim \pi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \pi_1 \sim_{\mathcal{H}} \pi_2$$

Доказательство.

($\Rightarrow$) Очевидно (если результаты всех вычислений во всех интерпретациях равны, то и результаты эрбрановских вычислений в эрбрановских интерпретациях тоже равны)

($\Leftarrow$) Предположим *от противного*, что $\pi_1 \nsim \pi_2$ и $\pi_1 \sim_{\mathcal{H}} \pi_2$

Тогда существуют интерпретация $\mathcal{I}$ и оценка переменных ξ, такие что $val(\pi_1, \mathcal{I}, \xi) \neq val(\pi_2, \mathcal{I}, \xi)$

По теореме о моделировании стандартных схем программ системами переходов, тогда для систем переходов $S_1 = LTS(\pi_1)$ и $S_2 = LTS(\pi_2)$ верно $val(S_1, \mathcal{I}, \xi) \neq val(S_2, \mathcal{I}, \xi)$ и результаты эрбрановских вычислений S_1 и S_2 в каждой эрбрановской интерпретации равны

Тогда, чтобы найти противоречие, достаточно показать, как по $\mathcal{I}$ и ξ построить эрбрановскую интерпретацию $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$, такую что

$$val(S_1, \mathcal{I}_{\mathcal{H}}, \xi_{\mathcal{H}}) = val(S_2, \mathcal{I}_{\mathcal{H}}, \xi_{\mathcal{H}}) \quad \Rightarrow \quad val(S_1, \mathcal{I}, \xi) = val(S_2, \mathcal{I}, \xi)$$

Доказательство. $(\Leftarrow)$

$(\mathcal{I}, \xi \to \mathcal{I}_{\mathcal{H}}$: $val(S_1, \mathcal{I}_{\mathcal{H}}, \xi_{\mathcal{H}}) = val(S_2, \mathcal{I}_{\mathcal{H}}, \xi_{\mathcal{H}}) \Rightarrow val(S_1, \mathcal{I}, \xi) = val(S_2, \mathcal{I}, \xi))$

Оценим каждую атомарную формулу A в $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ на каждой подстановке θ так: $A[\theta]_{\mathcal{I}_{\mathcal{H}}} = A[\theta[\xi]]_{\mathcal{I}}$

Тогда верно следующее:

$$comp(S_i, \mathcal{I}, \xi) = (v_1, \xi_1), (v_2, \xi_2), (v_3, \xi_3), \dots$$

$\Leftrightarrow$

для подстановок $\theta_1, \theta_2, \dots$, помечающих переходы пути, реализуемого вычислением $comp(S_i, \mathcal{I}, \xi)$, верно

$$comp(S_i, \mathcal{I}, \xi) = (v_1, \xi), (v_2, \theta_1\xi), (v_3, \theta_2\theta_1\xi), \dots$$

$\Leftrightarrow$

$$comp(S_i, \mathcal{I}_{\mathcal{H}}, \xi_{\mathcal{H}}) = (v_1, \varepsilon), (v_2, \theta_1), (v_3, \theta_2\theta_1), \dots$$

Следовательно,

$$val(S_1, \mathcal{I}, \xi) = val(S_2, \mathcal{I}, \xi) \Leftrightarrow val(S_1, \mathcal{I}_{\mathcal{H}}, \xi_{\mathcal{H}}) = val(S_2, \mathcal{I}_{\mathcal{H}}, \xi_{\mathcal{H}}) \blacktriangledown$$