

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы

→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 49

Логика Хоара

Автоматизация проверки правильности программ

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, сентябрь–декабрь

Логика Хоара

Для проверки частичной корректности модельных императивных программ можно адаптировать метод семантических таблиц: ввести понятие вывода (дерева, построенного по правилам вывода) и свести проверку корректности к построению успешного вывода

Правила вывода будут выглядеть так:¹

$$\frac{\Phi}{\Psi}, \quad \frac{\Phi}{\Psi, \Omega}, \quad \frac{\Phi}{\varphi} \quad \text{или} \quad \frac{\Phi}{\varphi, \Omega, \psi},$$

где Φ, Ψ, Ω — триплеты Хоара и φ, ψ — формулы логики предикатов

Содержательное прочтение:

если в \mathcal{I} истинны все триплеты и формулы под чертой
то в \mathcal{I} истинен триплет Φ

¹ Hoare C.A.R. An axiomatic basis for computer programming. 1969

Логика Хоара

Вот эти правила:

$$R_\emptyset : \frac{\{\varphi\}\emptyset\{\varphi\}}{\dagger} \quad R_{:=} : \frac{\{\varphi\{x/t\}\}x := t; \{\varphi\}}{\dagger}$$

(подстановка $\{x/t\}$ правильна для φ)

$$R_{\text{if}} : \frac{\{\varphi\}\text{if } C \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi}\{\psi\}}{\{\varphi \& C\}\pi_1\{\psi\}, \{\varphi \& \neg C\}\pi_2\{\psi\}}$$

$$R_{\text{while}} : \frac{\{\varphi\}\text{while } C \text{ do } \pi \text{ od}\{\varphi \& \neg C\}}{\{\varphi \& C\}\pi\{\varphi\}}$$

$$R_{\text{seq}} : \frac{\{\varphi\}\pi_1\pi_2\{\psi\}}{\{\varphi\}\pi_1\{\chi\}, \{\chi\}\pi_2\{\psi\}}$$

$$R_{\text{inf}} : \frac{\{\varphi\}\pi\{\psi\}}{\varphi \rightarrow \varphi', \{\varphi'\}\pi\{\psi'\}, \psi' \rightarrow \psi}$$

Логика Хоара

Лемма (о корректности правил вывода Хоара)

Для любой интерпретации \mathcal{I} и любого из правил

$$R_{\emptyset}, R_{:=}, R_{\text{if}}, R_{\text{while}}, R_{\text{seq}}, R_{\text{while}} \\ (\frac{\Phi}{\Psi}, \frac{\Phi}{\Psi, \Omega}, \frac{\Phi}{\varphi}, \frac{\Phi}{\varphi, \Psi, \psi})$$

верно следующее: если $\mathcal{I} \models \Psi, \mathcal{I} \models \Omega, \mathcal{I} \models \varphi$ и $\mathcal{I} \models \psi$, то $\mathcal{I} \models \Phi$

Доказательство.

Подробно рассмотрим только правило $R_{:=}$:
$$\frac{\{\varphi\{x/t\}\}x := t; \{\varphi\}}{\dagger}$$

Пусть σ — произвольное состояние данных, такое что $\mathcal{I} \models \varphi\{x/t\}\sigma$

Шаг вычисления для программы « $x := t;$ » устроен так:

$$\langle x := t; | \sigma \rangle \xrightarrow{\mathcal{I}} \langle \emptyset | \sigma\{x \leftarrow t\sigma\} \rangle$$

Так как $\mathcal{I} \models \varphi\{x/t\}\sigma$, то верно и $\mathcal{I} \models \varphi(\sigma\{x \leftarrow t\sigma\})$

Следовательно, $\mathcal{I} \models \{\varphi\{x/t\}\}x := t; \{\varphi\}$

Корректность остальных правил обосновывается по той же схеме



Логика Хоара

Вывод триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$ — это дерево следующего вида:

- ▶ вершины размечены триплетами и формулами
- ▶ корень помечен триплетом $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$
- ▶ дети вершины определяются относительно правил логики Хоара
так же, как и в дереве табличного вывода
относительно правил табличного вывода
- ▶ все листья помечены формулами

Успешный вывод триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$ в интерпретации \mathcal{I} — это конечный вывод, все листья которого помечены формулами, истинными в \mathcal{I}

Логика Хоара

Теорема (о корректности логики Хоара)

Если существует успешный вывод триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$ в интерпретации \mathcal{I} , то $\mathcal{I} \models \{\varphi\}\pi\{\psi\}$

Доказательство.

Рассмотрим произвольный успешный вывод D для $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$ в \mathcal{I}

Во всех листьях D записаны формулы, истинные в \mathcal{I}

Применив лемму о корректности правил вывода конечное число раз, получим истинность триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$ в \mathcal{I} ▼

Логика Хоара

Пример: алгоритм Эвклида

$\pi = \text{while } \neg(x = y) \text{ do if } x > y \text{ then } x := x - y; \text{ else } y := y - x; \text{ fi od}$

Докажем, что в результате выполнения π в интерпретации $Ar_{\mathbb{Z}}$ в x записывается **наибольший общий делитель** (НОД) положительных чисел, заданных в x и y перед выполнением

Предусловие φ : числа x и y положительны, и z — переменная, обозначающая НОД x и y в начале выполнения программы

$$u|v = \exists w (v = u \cdot w)$$

$$\gcd(u, v, w) = (w|u) \& (w|v) \& \forall r ((r|u) \& (r|v) \rightarrow (w \geq r))$$

$$\varphi = x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z)$$

Постусловие ψ : в x записан требуемый НОД

$$\psi = (x = z)$$

Для обоснования правильности π достаточно построить успешный табличный вывод для триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$

Логика Хоара

```
{x > 0 & y > 0 & gcd(x, y, z)}  
while ¬(x = y) do if x > y then x := x - y; else y := y - x; fi od  
{x = z}
```

$\chi_1: x > 0 \& x > 0 \& \text{gcd}(x, y, z) \rightarrow x > 0 \& y > 0 \& \text{gcd}(x, y, z)$

$\chi_2: x > 0 \& y > 0 \& \text{gcd}(x, y, z) \& \neg\neg(x = y) \rightarrow x = z$

```
{x > 0 & y > 0 & gcd(x, y, z)}  
while ¬(x = y) do if x > y then x := x - y; else y := y - x; fi od  
{x > 0 & y > 0 & gcd(x, y, z) & \neg\neg(x = y)}
```

$$\begin{array}{l} \mathcal{I} \models \chi_1 \\ \mathcal{I} \models \chi_2 \end{array}$$

$$R_{inf}: \frac{\{\varphi\}\pi\{\psi\}}{\varphi \rightarrow \varphi', \{\varphi'\}\pi\{\psi'\}, \psi' \rightarrow \psi}$$

Логика Хоара

```
{x > 0 & y > 0 & gcd(x, y, z)}  
while  $\neg(x = y)$  do if x > y then x := x - y; else y := y - x; fi od  
{x = z}
```

$x_1: x > 0 \& x > 0 \& \text{gcd}(x, y, z) \rightarrow x > 0 \& y > 0 \& \text{gcd}(x, y, z)$

$x_2: x > 0 \& y > 0 \& \text{gcd}(x, y, z) \& \neg\neg(x = y) \rightarrow x = z$

```
{x > 0 & y > 0 & gcd(x, y, z)}  
while  $\neg(x = y)$  do if x > y then x := x - y; else y := y - x; fi od  
{x > 0 & y > 0 & gcd(x, y, z) & \neg\neg(x = y)}
```

```
{x > 0 & y > 0 & gcd(x, y, z) & \neg(x = y)}  
if x > y then x := x - y; else y := y - x; fi  
{x > 0 & y > 0 & gcd(x, y, z)}
```

$$R_{\text{while}}: \frac{\{\varphi\} \mathbf{while } C \mathbf{do } \pi \mathbf{od} \{\varphi \& \neg C\}}{\{\varphi \& C\} \pi \{\varphi\}}$$

Логика Хоара

$\{x > 0 \& y > 0 \& \text{gcd}(x, y, z) \& \neg(x = y) \& x > y\} x := x - y; \{x > 0 \& y > 0 \& \text{gcd}(x, y, z)\}$

$\{x > 0 \& y > 0 \& \text{gcd}(x, y, z) \& \neg(x = y) \& \neg(x > y)\} y := y - x; \{x > 0 \& y > 0 \& \text{gcd}(x, y, z)\}$

$\{x > 0 \& y > 0 \& \text{gcd}(x, y, z) \& \neg(x = y)\}$

if $x > y$ **then** $x := x - y$; **else** $y := y - x$; **fi**

$\{x > 0 \& y > 0 \& \text{gcd}(x, y, z)\}$

$$R_{\text{if}}: \frac{\{\varphi\} \text{if } C \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi}\{\psi\}}{\{\varphi \& C\}\pi_1\{\psi\}, \{\varphi \& \neg C\}\pi_2\{\psi\}}$$

Логика Хоара

$\{x - y > 0 \& y > 0 \& \gcd(x - y, y, z)\} x := x - y; \{x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z)\}$

$\chi_3: x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z) \& \neg(x = y) \& x > y \rightarrow x - y > 0 \& y > 0 \& \gcd(x - y, y, z)$

$\chi_4: x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z) \rightarrow x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z)$

$\{x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z) \& \neg(x = y) \& x > y\} x := x - y; \{x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z)\}$

$\{x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z) \& \neg(x = y) \& \neg(x > y)\} y := y - x; \{x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z)\}$

$\{x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z) \& \neg(x = y)\}$

$\text{if } x > y \text{ then } x := x - y; \text{ else } y := y - x; \text{ fi}$

$\{x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z)\}$

$$\begin{array}{l} \mathcal{I} \models \chi_3 \\ \mathcal{I} \models \chi_4 \end{array}$$

$$R_{inf}: \frac{\{\varphi\}\pi\{\psi\}}{\varphi \rightarrow \varphi', \{\varphi'\}\pi\{\psi'\}, \psi' \rightarrow \psi}$$

Логика Хоара

t

$\{x - y > 0 \& y > 0 \& \gcd(x - y, y, z)\} x := x - y; \{x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z)\}$

$x_3: x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z) \& \neg(x = y) \& x > y \rightarrow x - y > 0 \& y > 0 \& \gcd(x - y, y, z)$

$x_4: x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z) \rightarrow x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z)$

$\{x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z) \& \neg(x = y) \& x > y\} x := x - y; \{x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z)\}$

$\{x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z) \& \neg(x = y) \& \neg(x > y)\} y := y - x; \{x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z)\}$

$\{x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z) \& \neg(x = y)\}$

if $x > y$ **then** $x := x - y$; **else** $y := y - x$; **fi**

$\{x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z)\}$

$$R := \frac{\{\varphi\{x/t\}\}x := t; \{\varphi\}}{t}$$

Логика Хоара

t

$\{x - y > 0 \& y > 0 \& \gcd(x - y, y, z)\} x := x - y; \{x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z)\}$

$\chi_3: x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z) \& \neg(x = y) \& x > y \rightarrow x - y > 0 \& y > 0 \& \gcd(x - y, y, z)$

$\chi_4: x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z) \rightarrow x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z)$

$\{x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z) \& \neg(x = y) \& x > y\} x := x - y; \{x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z)\}$

$\{x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z) \& \neg(x = y) \& \neg(x > y)\} y := y - x; \{x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z)\}$

$\chi_5: x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z) \& \neg(x = y) \& \neg(x > y) \rightarrow$
 $x > 0 \& y - x > 0 \& \gcd(x, y - x, z)$

$\chi_6: x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z) \rightarrow x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z)$

$\{x > 0 \& y - x > 0 \& \gcd(x, y - x, z)\} y := y - x; \{x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z)\}$

$$R_{inf}: \frac{\{\varphi\}\pi\{\psi\}}{\varphi \rightarrow \varphi', \{\varphi'\}\pi\{\psi'\}, \psi' \rightarrow \psi}$$

$$\mathcal{I} \models \chi_5$$
$$\mathcal{I} \models \chi_6$$

Логика Хоара

t

{ $x - y > 0 \& y > 0 \& \text{gcd}(x - y, y, z)$ } $x := x - y$; { $x > 0 \& y > 0 \& \text{gcd}(x, y, z)$ }

χ_3 : $x > 0 \& y > 0 \& \text{gcd}(x, y, z) \& \neg(x = y) \& x > y \rightarrow x - y > 0 \& y > 0 \& \text{gcd}(x - y, y, z)$

χ_4 : $x > 0 \& y > 0 \& \text{gcd}(x, y, z) \rightarrow x > 0 \& y > 0 \& \text{gcd}(x, y, z)$

{ $x > 0 \& y > 0 \& \text{gcd}(x, y, z) \& \neg(x = y) \& x > y$ } $x := x - y$; { $x > 0 \& y > 0 \& \text{gcd}(x, y, z)$ }

{ $x > 0 \& y > 0 \& \text{gcd}(x, y, z) \& \neg(x = y) \& \neg(x > y)$ } $y := y - x$; { $x > 0 \& y > 0 \& \text{gcd}(x, y, z)$ }

χ_5 : $x > 0 \& y > 0 \& \text{gcd}(x, y, z) \& \neg(x = y) \& \neg(x > y) \rightarrow$
 $x > 0 \& y - x > 0 \& \text{gcd}(x, y - x, z)$

χ_6 : $x > 0 \& y > 0 \& \text{gcd}(x, y, z) \rightarrow x > 0 \& y > 0 \& \text{gcd}(x, y, z)$

{ $x > 0 \& y - x > 0 \& \text{gcd}(x, y - x, z)$ } $y := y - x$; { $x > 0 \& y > 0 \& \text{gcd}(x, y, z)$ }

t

$$R := \frac{\{\varphi\{x/t\}\} x := t; \{\varphi\}}{t}$$

Логика Хоара

t

$\{x - y > 0 \& y > 0 \& \gcd(x - y, y, z)\} x := x - y; \{x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z)\}$

$\chi_3: x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z) \& \neg(x = y) \& x > y \rightarrow x - y > 0 \& y > 0 \& \gcd(x - y, y, z)$

$\chi_4: x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z) \rightarrow x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z)$

$\{x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z) \& \neg(x = y) \& x > y\} x := x - y; \{x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z)\}$

$\{x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z) \& \neg(x = y) \& \neg(x > y)\} y := y - x; \{x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z)\}$

$\chi_5: x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z) \& \neg(x = y) \& \neg(x > y) \rightarrow$
 $x > 0 \& y - x > 0 \& \gcd(x, y - x, z)$

$\chi_6: x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z) \rightarrow x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z)$

$\{x > 0 \& y - x > 0 \& \gcd(x, y - x, z)\} y := y - x; \{x > 0 \& y > 0 \& \gcd(x, y, z)\}$

t

Частичная корректность программы доказана

Полнота логики Хоара

Согласно теореме о корректности логики Хоара, правильность программы можно обосновать, построив успешный табличный вывод подходящего триплета Хоара

А правда ли, что корректность **любой** правильной программы может быть обоснована построением успешного табличного вывода подходящего триплета?

На самом деле это не один вопрос, а два принципиально разных:

1. Все ли свойства правильности программ могут быть записаны в виде формул логики предикатов?
2. Для любого ли истинного триплета существует успешный вывод?

Полнота логики Хоара

Ответ на оба вопроса существенно зависит от **сигнатуры**, в которой записываются предусловия и постусловия

Если эта сигнатура слишком «скучная», то:

- ▶ Её может быть недостаточно для записи свойств правильности программы
- ▶ При применении правил

$$R_{seq} : \frac{\{\varphi\}\pi_1\pi_2\{\psi\}}{\{\varphi\}\pi_1\{\chi\}, \{\chi\}\pi_2\{\psi\}} \quad R_{inf} : \frac{\{\varphi\}\pi\{\psi\}}{\varphi \rightarrow \varphi', \{\varphi'\}\pi\{\psi'\}, \psi' \rightarrow \psi}$$

может и не найтись подходящих формул φ' , ψ' , χ , позволяющих достроить вывод до успешного

При этом чем «богаче» сигнатурра, тем труднее анализировать истинность формул и подбирать «подходящие» формулы при построении вывода

Автоматизация проверки правильности программ

А если сигнатура достаточно «богата», то можно ли реализовать программу, автоматически доказывающую корректность программ?

Как и в вопросе про полноту, это на самом деле не один вопрос, а два:

1. Можно ли автоматизировать запись триплетов Хоара, отвечающих свойствам правильности программ?
2. Можно ли автоматизировать построение успешного вывода для заданного триплета Хоара?

Ответ на первый вопрос однозначен — **нет**:

один из главных недостатков формальной верификации состоит в том, что формальная спецификация программы, как правило, создается вручную специально обученным экспертом

Автоматизация проверки правильности программ

С автоматизацией построения успешного вывода для заданного триплета Хоара дела обстоят чуть лучше

Слабейшим предусловием для программы π и постусловия ψ в интерпретации \mathcal{I} называется формула $wpr(\pi, \psi, \mathcal{I})$, такая что

- ▶ $\mathcal{I} \models \{wpr(\pi, \psi, \mathcal{I})\}\pi\{\psi\}$ и
- ▶ для любой формулы φ , такой что $\mathcal{I} \models \{\varphi\}\pi\{\psi\}$, верно соотношение $\mathcal{I} \models \varphi \rightarrow wpr(\pi, \psi, \mathcal{I})$

Слабейших предусловий на самом деле может быть много, но они имеют одинаковый смысл в \mathcal{I} , так что для простоты иногда будем считать, что оно единственное

Теорема. $\mathcal{I} \models \{\varphi\}\pi\{\psi\} \Leftrightarrow \mathcal{I} \models \{wpr(\pi, \psi, \mathcal{I})\}\pi\{\psi\}$ и $\mathcal{I} \models \varphi \rightarrow wpr(\pi, \psi, \mathcal{I})$

Доказательство. Следует из определения слабейшего предусловия ▼

Автоматизация проверки правильности программ

Теорема (о слабейшем предусловии)

- ▶ $wpr(\emptyset, \psi, \mathcal{I}) = \psi$
- ▶ $wpr(x := t; , \psi, \mathcal{I}) = \psi\{x/t\},$
если подстановка $\{x/t\}$ правильна для ψ
- ▶ $wpr(\text{if } C \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi}, \psi, \mathcal{I}) =$
 $C \& wpr(\pi_1, \psi, \mathcal{I}) \vee \neg C \& wpr(\pi_2, \psi, \mathcal{I})$
- ▶ $wpr(\pi_1 \pi_2, \psi, \mathcal{I}) = wpr(\pi_1, wpr(\pi_2, \psi, \mathcal{I}), \mathcal{I})$

Доказательство опустим, чтобы сэкономить время

Таким образом,

- ▶ проверка корректности программы сводится к вычислению слабейшего предусловия и проверки истинности заданной формулы
- ▶ для программ **без циклов** слабейшее предусловие не зависит от выбора интерпретации и вычисляется очень просто

Автоматизация проверки правильности программ

А как вычислить слабейшее предусловие для цикла?

Устройство слабейшего предусловия тесно связано с устройством правил доказательства корректности программ:

вычисление этого предусловия — настолько же (не)простая задача, насколько и применение правила для построения успешного вывода

Чтобы применить правило

$$R_{\text{while}} : \frac{\{\varphi\} \mathbf{while } C \mathbf{ do } \pi \mathbf{ od } \{\varphi \& \neg C\}}{\{\varphi \& C\} \pi \{\varphi\}},$$

требуется предварительно найти формулу φ , реализующую свойство состояний данных, сохраняющееся при выполнении каждого витка цикла

Эта формула φ называется **инвариантом цикла** и явно или неявно используется практически всегда при анализе циклов

Автоматическая генерация инвариантов циклов — это
ключевая проблема автоматизации проверки правильности программ