Лекция 5. Раскраски ребер графов. Хроматический индекс графа. Хроматический индекс двудольных графов. Верхняя и нижняя оценки хроматического индекса графа.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.su

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

Раскраска ребер графа

Раскраска ребер графа $G = (V, E)$ в k цветов — отображение

$$\rho : E \to \{1, 2, \ldots, k\},$$

в котором из $e_1 = (v, w) \in E$, $e_2 = (v, u) \in E$ следует $\rho(e_1) \neq \rho(e_2)$.

Т.е. любые ребра с общей вершиной обязаны быть окрашены в разные цвета.

Хроматический индекс $\chi'(G)$ графа G — наименьшее возможное число цветов, в которое можно окрасить его ребра.

Для произвольного графа G верно соотношение $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.

Задача о доступе

Пусть найдется m узлов и n пользователей. Некоторым из пользователей нужно обратиться к некоторым узлам. При этом каждое обращение занимает одинаковое время, каждый пользователь не может одновременно обращаться к нескольким узлам и каждый узел не может одновременно обрабатывать несколько запросов пользователей. За какое наименьшее время могут быть обработаны все запросы пользователей?

Полные графы

Предложение 1. *Справедливы равенства* $\chi'(K_n) = n$, *если* n — *нечетное число,* $\chi'(K_n) = n - 1$, *если* n — *четное число.*

Доказательство.

1. Пусть n — нечетное число. Предположим, что $\chi'(K_n) = n - 1$. Тогда из каждой вершины графа K_n исходит ровно одно ребро каждого цвета.

Поэтому число ребер одного цвета равно $n/2$, т.к. каждое ребро имеет два конца.

Но n — нечетное число, получаем противоречие.

Получим раскраску ребер графа K_n в n цветов $C = \{1, 2, \dots, n\}$: ребро (i, j) графа K_n, где $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ окрасим в цвет $((i + j)(\bmod\ n)) + 1$.

Полные графы

2. Пусть n — четное число. Удалим из графа K_n произвольную вершину v и раскрасим ребра оставшегося графа K_{n-1} в $(n-1)$ цветов.
Рассмотрим в этом графе K_{n-1} все ребра одного цвета i. Их концами являются $(n-2)$ вершины, т.к. $(n-1)$ — нечетное число. Поэтому в этом графе K_{n-1} найдется некоторая вершина v_i, из которой не исходит ребро цвета i. Окрасим в исходном графе K_n ребро (v, v_i) в цвет i.
Т.к. в каждой вершине графа K_{n-1} отсутствует ребро только одного цвета, все ребра графа K_n, исходящие из вершины v, окрасим в разные цвета.

$\square$

Двудольные графы

Теорема 1 (Кенига) *Если G — двудольный граф, то* $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Доказательство. Индукцией по числу ребер q при заданном числе вершин p построим раскраску ребер двудольного графа G в $\Delta(G)$ цветов из $C = \{1, 2, \dots, \Delta(G)\}$.

Двудольные графы

Доказательство.
Базис индукции: $q = 0$ верен.
Индуктивный переход. Рассмотрим двудольный граф $G = (V, E)$, в котором $|V| = p$, $|E| = q + 1 \geq 1$.
Пусть $e = (u, w) \in E$ — произвольное ребро графа G.
Рассмотрим граф $G' = G - e$. Граф G' является двудольным, содержит p вершин и q ребер. Значит, для него верно предположение индукции.
Окрасим ребра графа G' в $\Delta(G') \leq \Delta(G)$ цветов из множества C.

Двудольные графы

Доказательство.
1. Если найдется цвет $i \in C$, одновременно отсутствующий среди ребер из вершин u, w графа G', то припишем ребру (u, w) графа G цвет i.

Двудольные графы

Доказательство.
2. Иначе заметим, что найдется некоторый цвет $i \in C$, отсутствующий среди ребер из вершины u, и некоторый цвет $j \in C$, отсутствующий среди ребер из вершины w, $i \neq j$, т.к. $d_{G'}(u) \leq \Delta(G) - 1$, $d_{G'}(w) \leq \Delta(G) - 1$.
Рассмотрим неудлиняемую цепь P с ребрами чередующихся цветов i и j, начинающуюся из вершины w.
Эта цепь не может достигнуть вершины u. В самом деле, если цепь P приходит в вершину u, то в графе G существует цикл $C = u(u, w)wPu$ нечетной длины, чего не может быть.
Перекрасим на цепи P ребра: цвет i заменим на цвет j, цвет j заменим на цвет i.
Затем припишем ребру (u, w) в графе G цвет i.

$\square$

Полные двудольные графы

Следствие 1.1. *Справедливо равенство* $\chi'(K_{m,n}) = \max(m, n)$.

Двудольные мультиграфы

Замечание 1. Теорема 1 верна и для мультиграфов. При этом степенью вершины в мультиграфе называется число исходящих из нее ребер.

Теорема Визинга

Теорема 2 (Визинга). *Для произвольного графа* $G = (V, E)$ *верно соотношение* $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Доказательство: индукция по числу ребер $q = |E|$ при заданном числе вершин $p = |V|$.

Базис индукции верен.

Индуктивный переход: пусть утверждение верно для всех графов с p вершинами и q ребрами.

Рассмотрим граф $G = (V, E)$ с p вершинами и $(q + 1)$ ребрами.

Выберем $e_1 = (u, w_1) \in E$ — произвольное ребро графа G.

Положим $H = G - e_1$. Очевидно, что $\Delta(H) \leq \Delta(G)$.

Для графа H верно предположение индукции. Пусть ρ — раскраска ребер графа H в $\Delta(G) + 1$ цветов из $C = \{1, 2, \ldots, \Delta(G), \Delta(G) + 1\}$.

Теорема Визинга

Доказательство.
Назовем цвет $i \in C$ **отсутствующим** в вершине $v \in V$, если для каждого ребра $e = (v, w) \in E$ верно $\rho(e) \neq i$.
Т.к. $|C| > \Delta(G)$, то в каждой вершине $v \in V$ отсутствует хотя бы один цвет.
Пусть в вершине u отсутствует цвет i_0 и в вершине w_1 отсутствует цвет i_1.

Теорема Визинга

Доказательство.
По индукции построим последовательность
вершин $w_1, w_2, \ldots, w_m$ и соответствующую последовательность
цветов $i_1, i_2, \ldots, i_m$.
Базис индукции: положим w_1 — конец ребра $e_1 = (u, w_1)$, и
i_1 — цвет, отсутствующий в вершине w_1.
Индуктивный переход. Пусть уже построены
последовательности вершин $w_1, w_2, \ldots, w_k$ и цветов $i_1, i_2, \ldots, i_k$,
$k \geq 1$.
Если найдется такое ребро $(u, w) \in E$, что $w \neq w_1, \ldots, w_k$
и $\rho(e) = i_k$, то положим $w_{k+1} = w$, i_{k+1} — цвет, отсутствующий
в вершине w.
Иначе положим $m = k$ и завершим построение.

Теорема Визинга

Доказательство.
Итак, получены такие последовательсти вершин $w_1, w_2, \ldots, w_m$ и цветов $i_1, i_2, \ldots, i_m$, что $\rho(u, w_j) = i_j$, цвет i_j отсутствует в вершине w_j, $j = 1, \ldots, m$.

1. Если для каждого ребра $e = (u, w) \in E$ верно $\rho(e) \neq i_m$, то перекрасим ребра w_j: положим $\rho(w_j) = i_j$, $j = 1, \ldots, m$. Получим раскраску ребер графа G в $\Delta(G) + 1$ цветов.

Теорема Визинга

Доказательство.
Итак, получены такие последовательсти вершин $w_1, w_2, \ldots, w_m$ и цветов $i_1, i_2, \ldots, i_m$, что $\rho(u, w_j) = i_j$, цвет i_j отсутствует в вершине w_j, $j = 1, \ldots, m$.

2. Пусть найдется ребро $e = (u, w) \in E$, для которого верно $\rho(e) = i_m$. Тогда $e = e_k$, $w = w_k$, $2 \leq k \leq m - 1$.
Тогда перекрасим некоторые ребра w_j: положим $\rho(w_j) = i_j$, $j = 1, \ldots, k - 1$, и сотрем цвет у ребра $e_k = (u, w_k)$.

Теорема Визинга

Доказательство.
Теперь рассмотрим такой подграф F графа G, который содержит все вершины и только ребра цветов i_0 и i_m.
Каждая компонента связности графа F — либо изолированная вершина, либо простая цепь, либо простой цикл.
Заметим, что $d_F(u) \leq 1$, $d_F(w_k) \leq 1$, $d_F(w_m) \leq 1$.
Поэтому эти три вершины u, w_k, w_m не могут входить в одну компоненту связности графа F.

Теорема Визинга

Доказательство.
а) Пусть вершины u и w_k входят в разные компоненты связности графа F.
Тогда в компоненте связности графа F, содержащей вершину w_k, заменим цвет i_0 на цвет i_m и заменим цвет i_m на цвет i_0.
Теперь цвет i_0 отсутствует в вершинах u, w_k.
Положим $\rho(e_k) = \rho(u, w_k) = i_0$.
Получим раскраску ребер графа G в $\Delta(G) + 1$ цветов.

Теорема Визинга

Доказательство.
б) Пусть вершины u и w_m входят в разные компоненты связности графа F.
Тогда в компоненте связности графа F, содержащей вершину w_m, заменим цвет i_0 на цвет i_m и заменим цвет i_m на цвет i_0.
Теперь цвет i_0 отсутствует в вершинах u, w_m.
Положим $\rho(w_j) = i_{j+1}$, $j = k, \ldots, m-1$, $\rho(e_m) = \rho(u, w_m) = i_0$.
Получим раскраску ребер графа G в $\Delta(G) + 1$ цветов.

$\square$

Задачи

1. По доказательству предложения 1 раскрасить ребра полного графа G в наименьшее число цветов, если

1) $G = K_4$;
2) $G = K_5$;
3) $G = K_6$;
4) $G = K_7$.

2. По доказательству теоремы 1 раскрасить ребра двудольного графа G в наименьшее число цветов, если

1) $G = K_{2,3}$;
2) $G = K_{3,3}$;
3) $G = K_{3,4}$;
4) $G = K_{4,4}$.

Задачи

3. По доказательству теоремы 2 раскрасить ребра графа G в $\Delta(G)+1$ цветов, если

1) $G = K_4 - e$, где e — произвольное ребро графа K_4;
2) $G = K_4 - \{e_1, e_2\}$, где e_1, e_2 — произвольные различные ребра графа K_4 (рассмотреть все возможные случаи);
3) $G = K_5 - e$, где e — произвольное ребро графа K_5;
4) $G = K_5 - \{e_1, e_2\}$, где e_1, e_2 — произвольные различные ребра графа K_5 (рассмотреть все возможные случаи).

4. Найти хроматический индекс графа $G = (V, E)$, если:

Литература к лекции

1. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Либроком, 2009. С. 248–252.

2. Bondy J.A., Murty U.S.R. Graph theory. Springer, 2008. С. 451–457.

Конец лекции