Лекция 10. Теорема разделимости Шефера. Задача обобщенной выполнимости с бесконечным множеством.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

Теорема Шефера

Теорема 1 (Шефера).
Пусть $S \subseteq P_2$ *и* S *— конечно. Если* $S \setminus \{0\} \subseteq Q$, *где* Q *— одно из множеств* T_0', T_1, WP, WN, B, MA, *то задача* S*-ВЫП является полиномиальной. В остальных случаях задача* S*-ВЫП является* NP*-полной.*

Теорема Шефера

Доказательство.
1. Если $S \setminus \{0\} \subseteq Q$, где Q — одно из множеств T_0', T_1, WP, WN, B, MA, то для решения задачи S-*ВЫП* можно применить соответствующий полиномиальный алгоритм.

Поэтому S-*ВЫП* $\in P$.

Теорема Шефера

2. Пусть теперь $S \setminus \{0\}$ не является подмножеством ни одного из множеств T_0', T_1, WP, WN, B, MA.

Значит, найдутся такие функции $g_0, g_1, g_p, g_n, g_b, g_a \in S$, что

1) каждая из них не является константой 0;

2) $g_0 \notin T_0'$, $g_1 \notin T_1$, $g_p \notin WP$, $g_n \notin WN$, $g_b \notin B$, $g_a \notin MA$.

Теорема Шефера

2.1. Сначала рассмотрим случай, когда в S найдется несамодополнительная функция g_s.

Теорема Шефера

Шаг 1. Построение $x, \bar{x}$.

По лемме о функции, сохраняющей 0, и о функции, не сохраняющей 1, из $g_0, g_1 \in S$ условно выразим либо $x, \bar{x}$, либо $x_1 \oplus x_2$.

Если получена только $x_1 \oplus x_2$, то по лемме о несамодополнительной функции из $g_s \in S$ и $x_1 \oplus x_2$ условно выразим $x, \bar{x}$.

Итак, $x, \bar{x}$ получены.

Теорема Шефера

Шаг 2. Построение $x_1 \oplus x_2$.

По лемме о не слабо положительной функции и о не слабо отрицательной функции из $g_p, g_n \in S$ и $x, \bar{x}$ условно выразим $x_1 \oplus x_2$.

Итак, $x_1 \oplus x_2$ получена.

Теорема Шефера

Шаг 3. Построение $x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3}$, где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in E_2$.

По лемме о небиюнктивной функции и о немультиаффинной функции и лемме о дизъюнкции трех литералов из $g_b, g_a \in S$ и $x, \bar{x}, x_1 \oplus x_2$ условно выразим $x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3}$ для любых $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in E_2$.

Итак, $x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3}$, где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in E_2$, получены.

Теорема Шефера

Теперь покажем *NP*-полноту задачи *S-ВЫП*, т. е. что

1) *S-ВЫП* $\in$ *NP*;

2) *S-ВЫП* является *NP*-трудной.

Для доказательства п. 2 покажем, что *NP*-полная задача 3-*ВЫП* *P*-сводится к задаче *S-ВЫП*.

Теорема Шефера

Пусть
$$K(x_1, \ldots, x_n) = D_1 \cdot \ldots \cdot D_m,$$
где D_j — дизъюнкция не более 3-х литералов с переменными из $x_1, \ldots, x_n$, $j = 1, \ldots, m$, — пример задачи 3-*ВЫП*.

Мы показали, что над S можно условно выразить дизъюнкцию любых трех литералов.

Теорема Шефера

Рассмотрим S-КНФ D'_j, которая условно выражает ЭД D_j, $j = 1, \ldots, m$. При этом всегда можно сделать так, чтобы вспомогательные переменные D'_i и D'_j не пересекались при $i \neq j$ (и не совпадали с переменными $x_1, \ldots, x_n$).

Положим

$$K'(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) = D'_1 \cdot \ldots \cdot D'_m,$$

где $y_1, \ldots, y_k$ — вспомогательные переменные во всех $D'_1, \ldots, D'_m$.

Теорема Шефера

Итак,

$$\begin{aligned} K(x_1,\ldots,x_n) &= D_1\cdot\ldots\cdot D_m,\\ K'(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_k) &= D'_1\cdot\ldots\cdot D'_m, \end{aligned}$$

где D'_j условно выражает над S ЭД D_j.

Сначала отметим, что построить S-КНФ K' по КНФ K можно полиномиальным алгоритмом.

Теорема Шефера

Итак,

$$\begin{aligned} K(x_1,\ldots,x_n) &= D_1\cdot\ldots\cdot D_m,\\ K'(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_k) &= D'_1\cdot\ldots\cdot D'_m, \end{aligned}$$

где D'_j условно выражает над S ЭД D_j.

Теперь заметим, что по лемме о транзитивности условной выразимости и лемме о замене множителя K' условно выражает K с вспомогательными переменными $y_1,\ldots,y_k$.

Значит, для любого $\alpha\in E_2^n$

1) если $K(\alpha)=1$, то найдется такой $\beta\in E_2^k$, что $K'(\alpha,\beta)=1$;

2) если $K(\alpha)=0$, то для любого $\beta\in E_2^k$ верно $K'(\alpha,\beta)=0$.

Теорема Шефера

Итак,

$$\begin{aligned} K(x_1, \dots, x_n) &= D_1 \cdot \ldots \cdot D_m, \\ K'(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k) &= D'_1 \cdot \ldots \cdot D'_m, \end{aligned}$$

где K' условно выражает над S КНФ K.

Из того, что K' условно выражает КНФ K, следует, что

K — выполнима в том и только в том случае, когда K' — выполнима.

Т. е. NP-полная задача 3-*ВЫП* P-сводится к задаче S-*ВЫП*.

Значит, задача S-*ВЫП* является NP-трудной.

Теорема Шефера

2.2. Теперь рассмотрим случай, когда все функции в S являются самодополнительными.

Теорема Шефера

Шаг 1. Построение $x_1 \oplus x_2$.

По лемме о самодополнительной функции из $g_0 \in S$, $g_0 \notin T_0'$, условно выразим $x_1 \oplus x_2$.

Итак, $x_1 \oplus x_2$ получена.

Теорема Шефера

Теперь покажем NP-полноту задачи S-*ВЫП*, т. е. что

1) S-*ВЫП* $\in NP$;

2) S-*ВЫП* является NP-трудной.

Для доказательства п. 2 покажем, что задача S'-*ВЫП*, где $S' = S \cup \{x\}$, P-сводится к задаче S-*ВЫП*.

Множество $S' = S \cup \{x\}$ содержит несамодополнительную функцию x.

Поэтому в п. 2.1 уже доказано, что задача S'-*ВЫП* является NP-полной.

Теорема Шефера

Пусть

$$K'(x_1, \ldots, x_n) = g_1 \cdot \ldots \cdot g_m,$$

где $g_j \in S$ или $g_j = x_i$, $j = 1, \ldots, m$, — пример задачи S'-*ВЫП*.

Не ограничивая общности рассуждений, пусть $g_1, \ldots, g_{m-r} \in S$, а $g_{m-r+j} = x_{i_j}$, где $j = 1, \ldots, r$.

Положим

$$K''(x_1, \ldots, x_n, y) = g_1 \cdot \ldots \cdot g_{m-r} \cdot (x_{i_1} \oplus y) \cdot \ldots \cdot (x_{i_r} \oplus y),$$

где y — переменная, не встречающаяся в K'.

Теорема Шефера

Итак,

$$\begin{aligned} K'(x_1,\dots,x_n) &= g_1\cdot\ldots\cdot g_{m-r}\cdot x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_r}, \\ K''(x_1,\dots,x_n,y) &= g_1\cdot\ldots\cdot g_{m-r}\cdot(x_{i_1}\oplus y)\cdot\ldots\cdot(x_{i_r}\oplus y), \end{aligned}$$

где переменная y не встречается в K'.

Сначала отметим, что построить S-КНФ K'' по S'-КНФ K' можно полиномиальным алгоритмом.

Теорема Шефера

Итак,

$$\begin{aligned} K'(x_1, \ldots, x_n) &= g_1 \cdot \ldots \cdot g_{m-r} \cdot x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_r}, \\ K''(x_1, \ldots, x_n, y) &= g_1 \cdot \ldots \cdot g_{m-r} \cdot (x_{i_1} \oplus y) \cdot \ldots \cdot (x_{i_r} \oplus y), \end{aligned}$$

где переменная y не встречается в K'.

Если $K'(\alpha) = 1$ для некоторого $\alpha \in E_2^n$, то $K''(\alpha, 0) = 1$.

Теорема Шефера

Итак,

$$\begin{aligned} K'(x_1,\ldots,x_n) &= g_1\cdot\ldots\cdot g_{m-r}\cdot x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_r}, \\ K''(x_1,\ldots,x_n,y) &= g_1\cdot\ldots\cdot g_{m-r}\cdot(x_{i_1}\oplus y)\cdot\ldots\cdot(x_{i_r}\oplus y), \end{aligned}$$

где переменная y не встречается в K'.

Пусть $K''(\beta)=1$, где $\beta=(\alpha,b)$ для некоторых $\alpha\in E_2^n$, $b\in E_2$.

Если $b=0$, то $K'(\alpha)=1$.

Если $b=1$, то рассмотрим набор $\bar\beta=(\bar\alpha,0)\in E_2^{n+1}$.

В S входят только самодополнительные функции и $x_1\oplus x_2$ — самодополнительная функция, поэтому $K''(\bar\beta)=K''(\beta)=1$.
Значит, $K'(\bar\alpha)=1$.

Теорема Шефера

Итак,

$$\begin{aligned} K'(x_1,\ldots,x_n) &= g_1\cdot\ldots\cdot g_{m-r}\cdot x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_r}, \\ K''(x_1,\ldots,x_n,y) &= g_1\cdot\ldots\cdot g_{m-r}\cdot(x_{i_1}\oplus y)\cdot\ldots\cdot(x_{i_r}\oplus y), \end{aligned}$$

где переменная y не встречается в K', и

K' — выполнима в том и только в том случае, когда K'' — выполнима.

Т. е. NP-полная задача S'-*ВЫП* P-сводится к задаче S-*ВЫП*.

Значит, задача S-*ВЫП* является NP-трудной.

$\square$

Теорема Шефера

Посмотрим, как по теореме Шефера можно выяснять полиномиальность или NP-полноту задач S-*ВЫП* для заданных конечных множеств $S \subseteq P_2$.

$S = \{x \oplus y \oplus z, xy \oplus xz \oplus yz \oplus z\}$

Пример. По теореме Шефера выясним, является задача *S-ВЫП* с

$$S = \{x \oplus y \oplus z, xy \oplus xz \oplus yz \oplus z\} \subseteq P_2$$

полиномиальной или NP-полной.

$S = \{x \oplus y \oplus z, xy \oplus xz \oplus yz \oplus z\}$

Решение. Положим $g_1 = x \oplus y \oplus z$, $g_2 = xy \oplus xz \oplus yz \oplus z$. Тогда

x	y	z	g_1	g_2
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

$S = \{x \oplus y \oplus z, xy \oplus xz \oplus yz \oplus z\}$

Получаем:

$$
\begin{aligned}
N_1(g_1) &= \{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,1,1)\},\\
N_1(g_2) &= \{(0,0,1),(1,1,0)\}.
\end{aligned}
$$

Проверяем:

	T_0'	T_1	WP	WN	B	MA
g_1	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
g_2	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$

Значит, $S \subseteq MA$ и S-ВЫП $\in P$.

$S = \{t(x, y, z)\}$

Пример. По теореме Шефера выясним, является задача *S-ВЫП* с
$$S = \{t(x, y, z)\} \subseteq P_2$$
полиномиальной или NP-полной.

$S = \{t(x, y, z)\}$

Решение. Итак,

x	y	z	t
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$S = \{t(x, y, z)\}$

Получаем:

$$N_1(t) \quad = \quad \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}.$$

Проверяем:

	T_0'	T_1	WP	WN	B	MA
t	—	—	—	—	—	—

Значит, *S-ВЫП* — *NP*-полна.

Бесконечные множества

А что делать, если в задаче *S-ВЫП* множество S — бесконечно?

Бесконечные множества

Пусть $S \subseteq P_2$ и S — бесконечно.

Считаем, что любая функция $g \in S$ задана какой-то формулой над некоторым известным конечным множеством A, $A \subseteq P_2$.

Какова сложность задачи S-*ВЫП*?

Бесконечные множества

Итак, пусть $S \subseteq P_2$ и S — бесконечно.

Понятно, что если $S \setminus \{0\}$ **не содержится** ни в одном из множеств T_0', T_1, WP, WN, B, MA, то S-*ВЫП* — NP-полна.

А если $S \setminus \{0\}$ **содержится** в каком-то из множеств T_0', T_1, WP, WN, B, MA?

Классы T_0' и T_1

Теорема 2. *Пусть* $S \subseteq P_2$ *и* S *— бесконечно. Если* $S \setminus \{0\} \subseteq Q$, *где* $Q = T_0'$ *или* $Q = T_1$, *то* S*-ВЫП* $\in P$.

Классы T_0' и T_1

Доказательство. 1. Пусть $S \setminus \{0\} \subseteq T_0'$ и

$$K(x_1, \ldots, x_n) = g_1 \cdot \ldots \cdot g_m -$$

пример задачи S-*ВЫП*, где $g_j \in T_0'$ или $g_j = 0$, $j = 1, \ldots, m$.

Опишем полиномиальный алгоритм проверки выполнимости S-КНФ K.

Классы T_0' и T_1

Доказательство. 1. Пусть $S \setminus \{0\} \subseteq T_0'$ и

$$K(x_1, \ldots, x_n) = g_1 \cdot \ldots \cdot g_m -$$

пример задачи S-*ВЫП*, где $g_j \in T_0'$ или $g_j = 0$, $j = 1, \ldots, m$.

Опишем полиномиальный алгоритм проверки выполнимости S-КНФ K.

1. Находим значение $K(0, \ldots, 0)$.

2. Если $K(0, \ldots, 0) = 1$, то K — выполнима.

3. Если $K(0, \ldots, 0) = 0$, то K — не выполнима (т. к. $g_{j_0} = 0$ для некоторого j_0, $1 \leqslant j_0 \leqslant m$).

Классы T_0' и T_1

Доказательство. 1. Пусть $S \setminus \{0\} \subseteq T_0'$ и

$$K(x_1, \ldots, x_n) = g_1 \cdot \ldots \cdot g_m -$$

пример задачи S-$\textit{ВЫП}$, где $g_j \in T_0'$ или $g_j = 0$, $j = 1, \ldots, m$.

Опишем полиномиальный алгоритм проверки выполнимости S-КНФ K.

1. Находим значение $K(0, \ldots, 0)$.

2. Если $K(0, \ldots, 0) = 1$, то K — выполнима.

3. Если $K(0, \ldots, 0) = 0$, то K — не выполнима (т. к. $g_{j_0} = 0$ для некоторого j_0, $1 \leqslant j_0 \leqslant m$).

2. Случай $S \setminus \{0\} \subseteq T_1$ рассматривается аналогично.

$\square$

Классы T_0' и T_1

Пример. Пусть $S = T_0' \cup \{0\}$. Проверим выполнимость S-КНФ

$$K(x_1, x_2, x_3) = g_1(x_1, x_2, x_3) \cdot g_1(x_2, x_3, x_1) \cdot g_2(x_1, x_3, x_2),$$

где

$$\begin{aligned} g_1(x, y, z) &= (x \vee y) \to z, \\ g_2(x, y, z) &= (\overline{x \to y}) \cdot (\overline{z \to x}). \end{aligned}$$

Проверяем:

$$\begin{aligned} g_1(0, 0, 0) &= (0 \vee 0) \to 0 = 1, \\ g_2(0, 0, 0) &= (\overline{0 \to 0}) \cdot (\overline{0 \to 0}) = 0. \end{aligned}$$

Значит, $g_2(x, y, z) = 0$, и K — не выполнима.

Приведенные представления

Теорема 3. *Пусть $S \subseteq P_2$ и S — бесконечно. Если $S \subseteq Q$, где Q — одно из множеств WP, WN, B, MA и все функции из S заданы соответствующими приведенными представлениями, то S-ВЫП $\in P$.*

Доказательство. Для решения задачи *S-ВЫП* можно применить соответствующий полиномиальный алгоритм.

Классы WP, WN и B

Теорема 4. *Пусть $S \subseteq P_2$ и S — бесконечно. Если $S \subseteq Q$, где Q — одно из множеств WP, WN, B и все функции из S заданы полиномами Жегалкина или произвольными ДНФ, то S-ВЫП $\in P$.*

Классы WP, WN и B

Доказательство. 1. Пусть $S \subseteq WP$.

Заметим, что если $\bar{x}_i$ — импликанта функции $g(x_1, \dots, x_n) \in P_2$, то верно равенство:

$$g(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0.$$

Кроме того, если g задана полиномом Жегалкина или произвольной ДНФ, то проверить это равенство можно полиномиальным алгоритмом.

Далее, если $g \in WP$ и не имеет импликант вида $\bar{x}_i$, то $g(1, \dots, 1) = 1$.

Классы WP, WN и B

Пусть $S \subseteq WP$ и

$$K(x_1, \ldots, x_n) = g_1 \cdot \ldots \cdot g_m -$$

пример задачи S-*ВЫП*, где $g_j \in WP$ и задана полиномом Жегалкина или произвольной ДНФ, $j = 1, \ldots, m$.

Опишем полиномиальный алгоритм проверки выполнимости S-КНФ K.

Классы WP, WN и B

Алгоритм 5н.

1. $K_0 := K$, $\alpha_0 := (1, \ldots, 1) \in E_2^n$.

2.i, $i = 1, \ldots, n$.

1) Если в K_0 у любой функции g нет имплицент вида $\bar{x}_j$, то ответ **«да»**.

2) Если в K_0 найдется функция g с имплицентой $\bar{x}_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, то получаем K_0, заменяя в K_0 переменную x_j на 0, и $\alpha_0(j) := 0$.

3. Если $K_0(\alpha_0) = 1$, то ответ **«да»**, иначе — ответ **«нет»**.

Классы WP, WN и B

Отметим, что алгоритм 5н работает правильно (он основан на рассуждениях, приведенных выше), и он — полиномиальный.

Кроме того, в нем не находятся приведенные представления слабо положительных функций из S-КНФ K.

Классы WP, WN и B

2. Случай $S \subseteq WN$ рассматривается аналогично.

Классы WP, WN и B

3. Пусть $S \subseteq B$.

Заметим, что если $x_{i_1}^{\sigma_1} \vee x_{i_2}^{\sigma_2}$ — имплицента функции $g(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$, то верно равенство:

$$g(x_1, \ldots, x_{i_1-1}, \bar{\sigma}_1, x_{i_1+1}, \ldots, x_{i_2-1}, \bar{\sigma}_2, x_{i_2+1}, \ldots, x_n) = 0.$$

Кроме того, если g задана полиномом Жегалкина или произвольной ДНФ, то проверить это равенство можно полиномиальным алгоритмом.

Далее, число ЭД ранга 2 (а значит, и таких имплицент функции g) равно $O(n^2)$.

Поэтому полиномиальным алгоритмом можно найти все имплиценты ранга 2 функции g, а значит, и какое-то ее приведенное представление.

Классы WP, WN и B

Пусть $S \subseteq B$ и

$$K(x_1, \dots, x_n) = g_1 \cdot \dots \cdot g_m -$$

пример задачи S-*ВЫП*, где $g_j \in B$ и задана полиномом Жегалкина или произвольной ДНФ, $j = 1, \dots, m$.

Опишем полиномиальный алгоритм проверки выполнимости S-КНФ K.

Алгоритм 7н.

1. Для каждой функции g_j находим какое-то ее приведенное представление K_j, $j = 1, \dots, m$.

2. Применяем алгоритм 7 проверки выполнимости биюнктивной КНФ к биюнктивной КНФ $K_1 \cdot \dots \cdot K_m$.

Классы WP, WN и B

Заметим, что алгоритм 7н работает правильно (он опирается на рассуждения, приведенные выше), и он — полиномиальный.

$\square$

Классы WP, WN и B

Пример. Пусть $S = WP$ и задана S-КНФ

$$K(x_1, x_2, x_3, x_4) = g_1(x_1, x_2, x_3) \cdot g_1(x_4, x_3, x_2) \cdot g_2(x_4, x_2, x_1),$$

где

$$\begin{aligned} g_1(x, y, z) &= \bar{x}y \vee xz \vee yz, \\ g_2(x, y, z) &= \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}z. \end{aligned}$$

Получаем:

1. $K_0 = (\bar{x}_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3)(\bar{x}_4x_3 \vee x_4x_2 \vee x_3x_2)(\bar{x}_4\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4x_1)$,
$\alpha_0 = (1, 1, 1, 1) \in E_2^4$.

2.1. 1) ;

2) $x_j = x_4$, $K_0 = (\bar{x}_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3)(x_3)(\bar{x}_2 \vee x_1)$, $\alpha_0 = (1, 1, 1, 0)$.

2.2. 1) Ответ **«да»**.

Класс MA

Теорема 5. *Пусть $S \subseteq P_2$ и S — бесконечно. Если $S \subseteq MA$ и все функции из S заданы полиномами Жегалкина, то S-ВЫП $\in P$.*

Класс MA

Доказательство. Пусть $S \subseteq MA$ и

$$K(x_1, \dots, x_n) = g_1 \cdot \dots \cdot g_m -$$

пример задачи S-$ВЫП$, где $g_j \in MA$ и задана полиномом Жегалкина, $j = 1, \dots, m$.

Опишем полиномиальный алгоритм проверки выполнимости S-КНФ K.

Алгоритм 9н.

1. Для каждой функции g_j, применяя алгоритм 4, находим ее кратчайшую ЛКНФ K_j, $j = 1, \dots, m$.

2. Применяем алгоритм 9 проверки выполнимости ЛКНФ к ЛКНФ $K_1 \cdot \dots \cdot K_m$.

Класс MA

Отметим, что алгоритм 9н работает правильно, и он — полиномиальный.

$\square$

Класс MA

Пример. Пусть $S = MA$ и задана S-КНФ

$$K(x_1, x_2, x_3) = g_1(x_1, x_3) \cdot g_2(x_3, x_1, x_2) \cdot g_2(x_2, x_3, x_1),$$

где

$$\begin{aligned} g_1(x, y) &= x \oplus y, \\ g_2(x, y, z) &= xy \oplus xz \oplus x \oplus y \oplus z \oplus 1. \end{aligned}$$

Класс MA

1. По алгоритму 4 найдем какой-то базис пространства $L(g_2)$ функции g_2.

1.1. Получаем уравнение:

$$(c_0 \oplus c_1 x \oplus c_2 y \oplus c_3 z)(xy \oplus xz \oplus x \oplus y \oplus z \oplus 1) = 0.$$

1.2. Находим систему:

$$\begin{array}{llrcl}
xy: & c_0 & & = & 0, \\
xz: & c_0 & & = & 0, \\
x: & c_0 & & = & 0, \\
y: & c_0 & & = & 0, \\
z: & c_0 & & = & 0, \\
1: & c_0 & & = & 0, \\
yz: & & c_2 \oplus c_3 & = & 0, \\
xyz: & & c_2 \oplus c_3 & = & 0.
\end{array}$$

Класс MA

1.3. Решаем систему:

$$\begin{cases} c_0 & = 0, \\ c_2 \oplus c_3 & = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} c_0 = 0, \\ c_3 = c_2. \end{cases}$$

Получаем:

$$c_0 = 0, \;\; c_1 \in E_2, \;\; c_2 \in E_2, c_3 = c_2.$$

1.4.

c_0	c_1	c_2	c_3
0	0	1	1
0	1	0	0

Значит, ЛФ $L_1 = y \oplus z$, $L_2 = x$ образуют какой-то **базис** пространства $L(g_2)$.

Но $g_2 \in MA$, поэтому $g_2(x, y, z) = (x \oplus 1)(y \oplus z \oplus 1)$.

Класс MA

Итак,

$$K(x_1, x_2, x_3) = g_1(x_1, x_3) \cdot g_2(x_3, x_1, x_2) \cdot g_2(x_2, x_3, x_1),$$

где

$$g_1(x, y) = x \oplus y,\ \ g(x, y, z) = (x \oplus 1)(y \oplus z \oplus 1).$$

Поэтому

$$K = (x_1 \oplus x_3)(x_3 \oplus 1)(x_1 \oplus x_2 \oplus 1)(x_2 \oplus 1)(x_3 \oplus x_1 \oplus 1).$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} x_1 \oplus x_3 = 1, \\ x_3 = 0, \\ x_1 \oplus x_2 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_1 \oplus x_3 = 0. \end{cases}$$

2. Система несовместна, поэтому K — не выполнима.

Конец лекции