Общефакультетский курс «Основы кибернетики»

Весенний семестр 2014–2015 уч. г. группы 320–328, 318

лектор — профессор С. А. Ложкин (lozhkin@cs.msu.su)

Информационная поддержка курса по адресам:

http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_(3-й_поток)

http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_(318,_418_группы)

1. Представление функций алгебры логики (ФАЛ) дизъюнктивными нормальными формами (ДНФ) и его «геометрическая» интерпретация. Совершенная ДНФ и критерий единственности ДНФ

Утверждение 1.1. Совершенная ДНФ ФАЛ f, $f \not\equiv 0$, $f \in P_2(n)$, является единственной ДНФ от БП $X(n)$, которая реализует эту ФАЛ, тогда и только тогда, когда во множестве N_f нет соседних наборов.

Следствие. Совершенная ДНФ ФАЛ ℓ, $\overline{\ell}$, является единственной ДНФ этой ФАЛ от БП $X(n)$.

2. Сокращенная ДНФ и способы ее построения

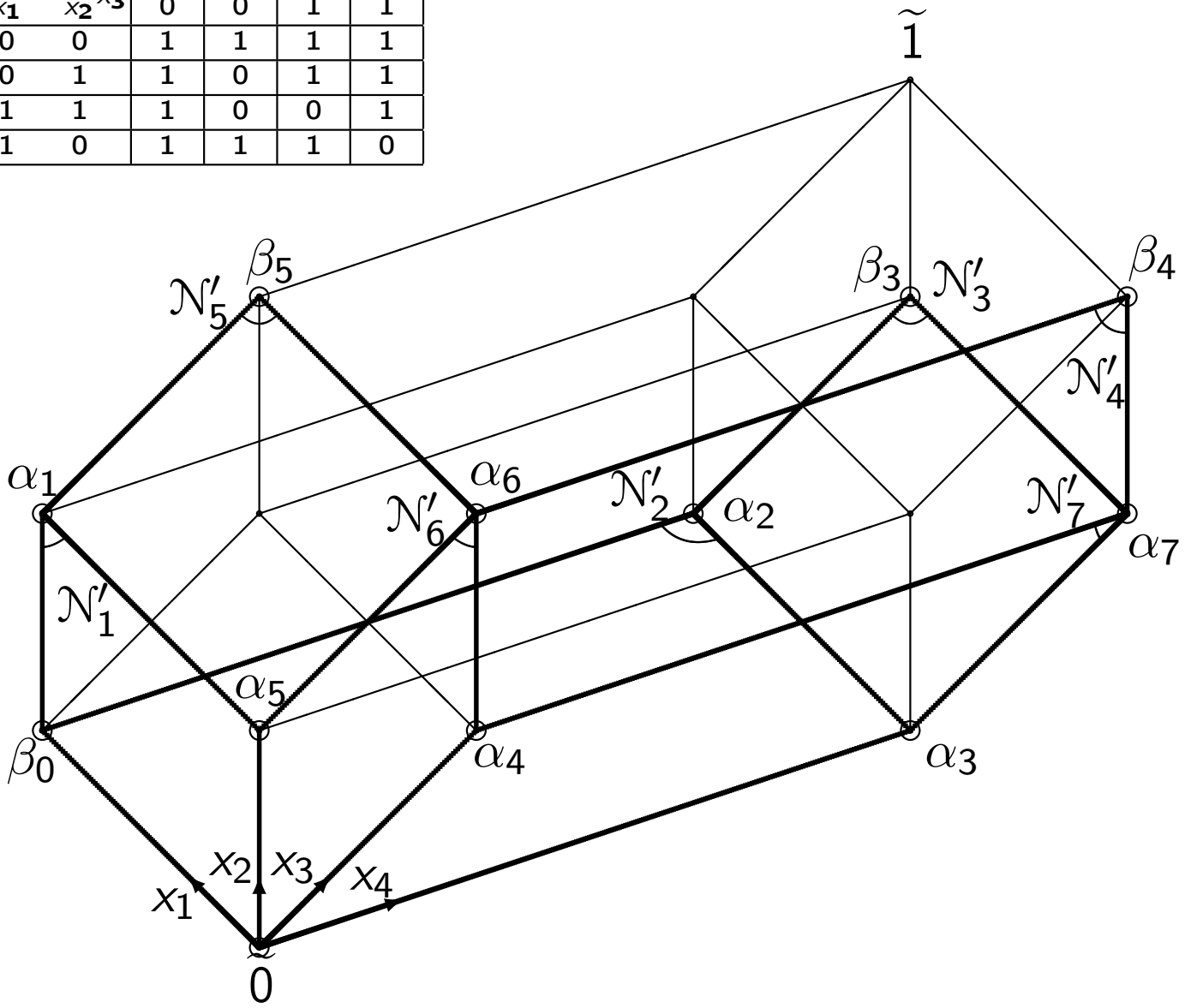
Утверждение 2.1. Пусть $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}''$ — сокращенные ДНФ ФАЛ f' и f'' соответственно, а ДНФ $\mathfrak{A}$ без поглощений ЭК получается из формулы $\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{A}''$ в результате раскрытия скобок и приведения подобных. Тогда $\mathfrak{A}$ — сокращенная ДНФ ФАЛ $f = f' \cdot f''$.

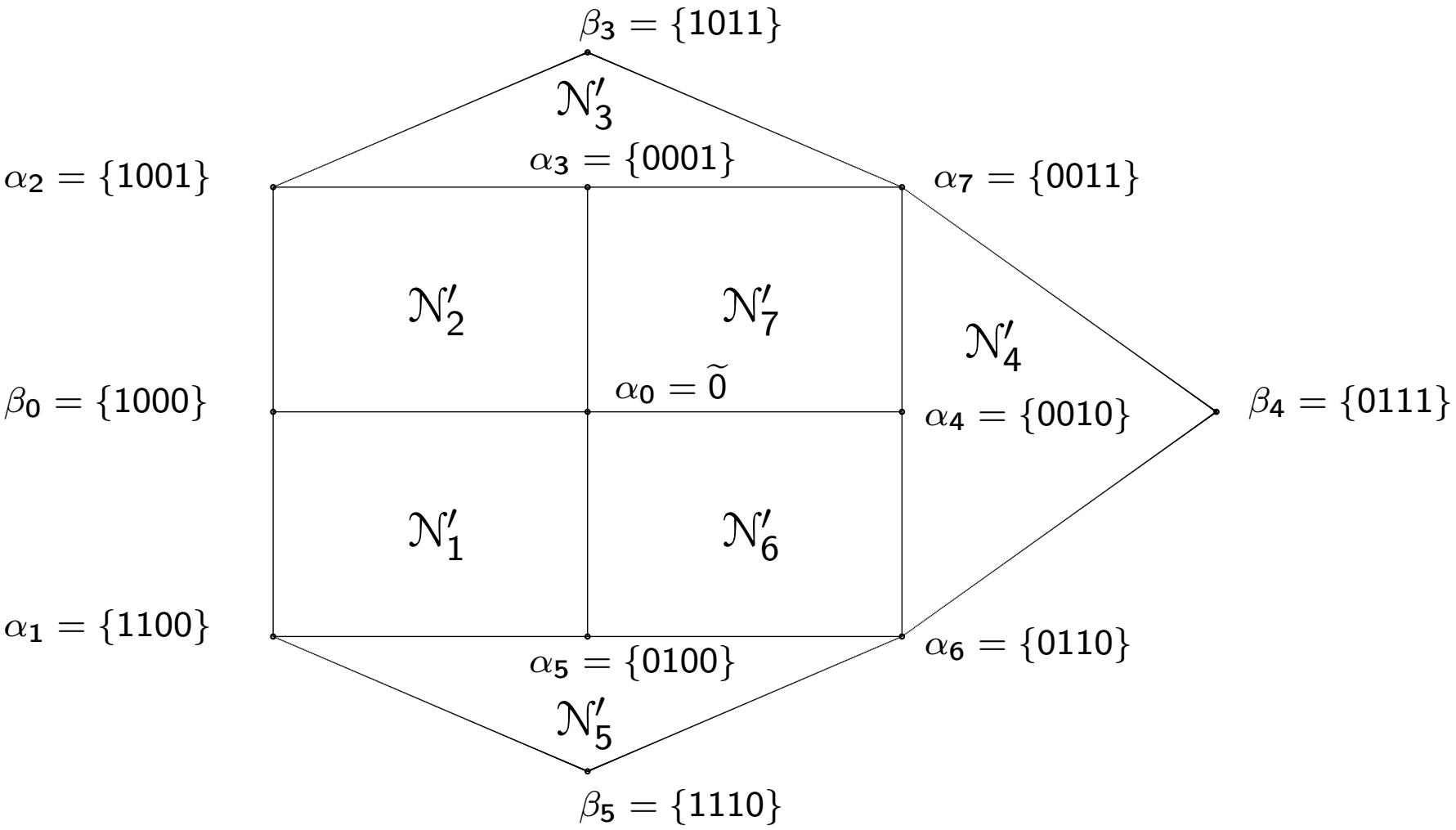
Следствие. Если ДНФ $\mathfrak{A}$ без поглощений ЭК получается из КНФ $\mathfrak{B}$ ФАЛ f в результате раскрытия скобок и приведения подобных, то $\mathfrak{A}$ — сокращенная ДНФ ФАЛ f.

Утверждение 2.2. ДНФ без поглощений ЭК является сокращенной ДНФ тогда и только тогда, когда она не имеет строгих расширений.

Следствие. Из любой ДНФ $\mathfrak{A}$ ФАЛ f можно получить сокращенную ДНФ этой ФАЛ в результате построения последовательных строгих расширений и приведения подобных до получения ДНФ без поглощений ЭК, не имеющей строгих расширений.

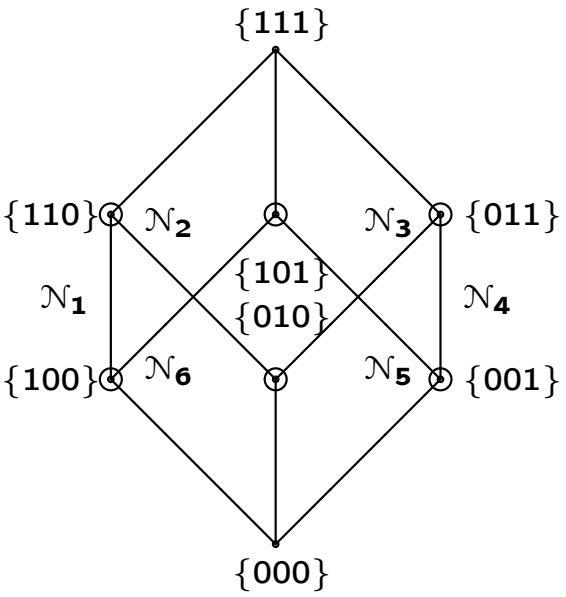
x_1	x_2	x_4 / x_3	0 / 0	1 / 0	1 / 1	0 / 1
0	0		1	1	1	1
0	1		1	0	1	1
1	1		1	0	0	1
1	0		1	1	1	0





$$\mathfrak{A}'_1 = K'_1 \vee K'_3 \vee K'_4 \vee K'_5, \quad \mathfrak{A}'_2 = K'_2 \vee K'_3 \vee K'_4 \vee K'_5.$$

$$g\{x_1, x_2, x_3\} = \underbrace{x_1\overline{x}_3}_{K_1} \vee \underbrace{x_2\overline{x}_3}_{K_2} \vee \underbrace{\overline{x}_1 x_2}_{K_3} \vee \underbrace{\overline{x}_1 x_3}_{K_4} \vee \underbrace{\overline{x}_2 x_3}_{K_5} \vee \underbrace{x_1\overline{x}_2}_{K_6}.$$



$$\overline{N}_g = \{\{000\}, \{111\}\},$$
$$\mathfrak{A}_1 = K_1 \vee K_3 \vee K_5,$$
$$\mathfrak{A}_2 = K_2 \vee K_4 \vee K_6,$$
$$\mathfrak{A}_3 = K_1 \vee K_2 \vee, K_4 \vee K_5,$$
$$\mathfrak{A}_4 = K_2 \vee K_3 \vee K_5 \vee K_6,$$
$$\mathfrak{A}_5 = K_3 \vee K_4 \vee K_6 \vee K_1.$$

3. Тупиковые ДНФ, ядро и ДНФ пересечение тупиковых. ДНФ Квайна, критерий вхождения простых импликант в ДНФ сумма тупиковых, его локальность.

Утверждение 3.1. Дизъюнктивная нормальная форма $\cap T$ ФАЛ f состоит из тех простых импликант ФАЛ f, которые соответствуют ядровым граням этой ФАЛ.

Следствие. Сокращенная ДНФ ФАЛ f является ее единственной тупиковой ДНФ тогда и только тогда, когда f — *ядровая* ФАЛ, т.е. все ее максимальные грани входят в ядро.

Утверждение 3.2. Простая импликанта K ФАЛ f входит в ДНФ ΣT тогда и только тогда, когда грань N_K не является регулярной гранью этой ФАЛ.

4. Особенности ДНФ линейных и монотонных функций. Функция покрытия, таблица Квайна и построение всех тупиковых ДНФ.

Утверждение 4.1. Сокращенная ДНФ $\mathfrak{A}$ монотонной ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, является единственной тупиковой ДНФ этой ФАЛ и имеет вид:

$$\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\beta \in N_f^+} K_\beta^+(x_1, \ldots, x_n).$$

При этом все наборы из N_f^+ являются ядровыми точками ФАЛ f.

Следствие. Монотонная ФАЛ является ядровой ФАЛ.

Утверждение 4.2. Функция покрытия $F(y_1, \ldots, y_p)$ матрицы M, $M \in B^{p,s}$, без нулевых столбцов задается КНФ вида:

$$F(y_1, \ldots, y_p) = \bigwedge_{j=1}^{s} \left(\bigvee_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ M\langle i,j \rangle = 1}} y_i \right).$$

Следствие. В результате раскрытия скобок и приведения подобных из этой КНФ можно получить сокращенную ДНФ ФАЛ $F(y)$, простые импликанты которой взаимно однозначно соответствуют тупиковым покрытиям матрицы M.

5. Градиентный алгоритм и оценка длины градиентного покрытия, лемма о протыкающих наборах. Использование градиентного алгоритма для построения ДНФ

Утверждение 5.1 Пусть для действительного γ, $0 < \gamma \leqslant 1$, в каждом столбце матрицы M, $M \in B^{p,s}$, имеется не меньше, чем $\gamma \cdot p$, единиц. Тогда покрытие матрицы M, получаемое с помощью градиентного алгоритма, имеет длину не больше, чем

$$\left\lceil \frac{1}{\gamma} \ln^{+}(\gamma s) \right\rceil + \frac{1}{\gamma},$$

$$\text{где } \ln^{+} x = \begin{cases} \ln x, & \text{если } x \geqslant 1; \\ 0, & \text{если } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Утверждение 5.2 При любых натуральных n и m, $m \leqslant n$, в кубе B^n всегда найдется подмножество мощности не более, чем $n \cdot 2^m$, протыкающее все грани ранга m.

6. Задача минимизации ДНФ. Поведение функций Шеннона и оценки типичных значений для ранга и длины ДНФ.

Утверждение 6.1 Для любого $n, n \in \mathbb{N}$, имеют место соотношения

$$\lambda(n) = 2^{n-1}, R(n) = n \cdot 2^{n-1}.$$

Утверждение 6.2 Для почти всех ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, выполняются неравенства

$$\lambda(f) \leqslant \frac{3}{4} 2^{n-1} \left(1 + O\left(n \cdot 2^{-n/2}\right)\right),$$

$$\lambda(f) \leqslant \frac{3}{4} n \cdot 2^{n-1} \left(1 + O\left(n \cdot 2^{-n/2}\right)\right).$$

7. Алгоритмические трудности минимизации ДНФ и оценки максимальных значений некоторых связанных с ней параметров. Теорема Ю. И. Журавлева о ДНФ сумма минимальных.

Утверждение 7.1 Число тупиковых (минимальных) ДНФ у ФАЛ f из $P_2(n)$, $n \geqslant 4$, вида

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, x_3) \cdot (x_4 \oplus \cdots \oplus x_n),$$

где $\overline{N}_g = \{(000), (111)\}$, равно $5^{2^{n-4}}$ (соответственно $2^{2^{n-4}}$).

Следствие

$$\tau(n) \geqslant 5^{2^{n-4}}, \quad \mu_n(n) \geqslant 2^{2^{n-4}}.$$

Утверждение 7.2

$$\lambda_{\text{сокр.}}(n) \geqslant e_1 \frac{3^n}{n},$$

где e_1 — некоторая константа.

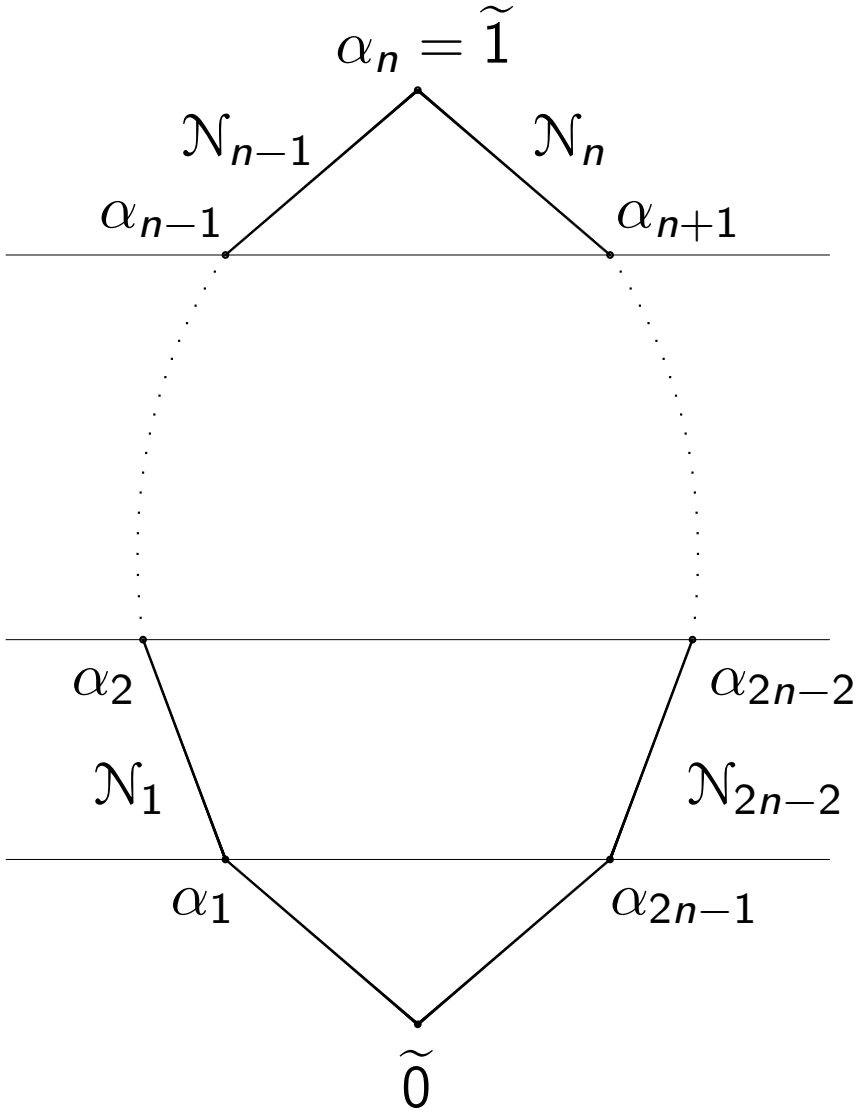


Рис.: цепная ФАЛ длины $(2n-2)$ в кубе B^n

Утверждение 7.3 При любом $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 3$, в $P_2(n)$ существуют ФАЛ f' и f'', имеющие общую простую импликанту K, которая входит в ДНФ ΣM одной, но не входит в ДНФ ΣM другой из этих ФАЛ и для которой $S_{n-3}(N_K, f') = S_{n-3}(N_K, f'')$.

Замечание Из теоремы следует, что критерий вхождения ЭК в ДНФ ΣM не имеет такого локального характера, как критерий вхождения ЭК в ДНФ ΣT.

Замечание Известно, что при $n \geqslant 14$ в $P_2(n)$ имеется цепная ФАЛ четной длины t, $t \geqslant 2^{n-11} - 4$, на основе которой справедливость теоремы можно установить для окрестности порядка $\left(\frac{t}{2} - 2\right)$.

II. Основные классы дискретных управляющих систем, структурные представления схем и оценка их числа. Эквивалентные преобразования управляющих систем

8. Формулы и способы их задания, эквивалентность формул и функционалы их сложности. Оптимизация подобных формул по глубине

Утверждение 8.1 Для формулы $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{U}^{\Phi}$, выполняются неравенства

$$R(\mathcal{F}) = L_{\&,\vee}(\mathcal{F}) + 1 \leqslant L(\mathcal{F}) + 1 \leqslant 2^{D(\mathcal{F})},$$

где $L_{\&,\vee}(\mathcal{F})$ — число ФС & и $\vee$ в формуле $\mathcal{F}$.

Следствие

$$D(\mathcal{F}) \geqslant \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil.$$

Утверждение 8.2 Для любой формулы $\mathcal{F}$ с поднятыми отрицаниями из $\mathcal{U}^{\Phi}$ существует подобная ей формула $\check{\mathcal{F}}$ такая,что

$$D\left(\check{\mathcal{F}}\right) \leqslant \lceil \log\left(L\left(\mathcal{F}\right)+1\right)\rceil + \mathrm{Alt}\left(\mathcal{F}\right).$$

Следствие 1. Для любой ЭК или ЭД K существует подобная ей формула $\check{K}$ такая, что

$$D(\check{K}) = \lceil \log(L(K) + 1) \rceil,$$

которая, минимальна по глубине.

Следствие 2. Для любой ДНФ или КНФ $\mathfrak{A}$ существует подобная ей формула $\check{\mathfrak{A}}$ такая, что

$$D(\check{\mathfrak{A}}) \leqslant \lceil \log(L(\mathfrak{A}) + 1) \rceil + 1.$$

9. Схемы из функциональных элементов и операции их приведения. Оценка числа формул и схем в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$

Утверждение 9.1 Для приведенной СФЭ Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}^{C}$, с одним выходом, выполняются неравенства

$$R(\Sigma) \leqslant L_{\&,\vee}(\Sigma) + 1 \leqslant L(\Sigma) + 1 \leqslant 2^{D(\Sigma)},$$

где $L_{\&,\vee}$ — число ФЭ $\&$ и $\vee$ в Σ.

Утверждение 9.2 Для любых натуральных n, L, D выполняются неравенства

$$\left|\mathcal{U}^{\Phi}(L,n)\right| \leqslant (10n)^{L+1},$$
$$\left\|\mathcal{U}^{\Phi}(L,n)\right\| \leqslant (8n)^{L+1},$$
$$\left\|\mathcal{U}^{\Phi}[D,n]\right\| \leqslant (8n)^{2^D}.$$

Следствие Число попарно не квазиизоморфных формул с поднятыми отрицаниями ранга R от БП $x_1, \ldots, x_n$ не больше, чем $(12n)^R$.

Утверждение 9.3 Для любых натуральных n и L выполняется неравенство

$$\left\|\mathcal{U}^{\mathrm{C}}(L, n)\right\| \leqslant (8(L+n))^{L+1}.$$

10. Контактные схемы и π-схемы, моделирование формул и π-схем. Оценка числа контактных схем и π-схем, особенности функционирования многополюсных схем

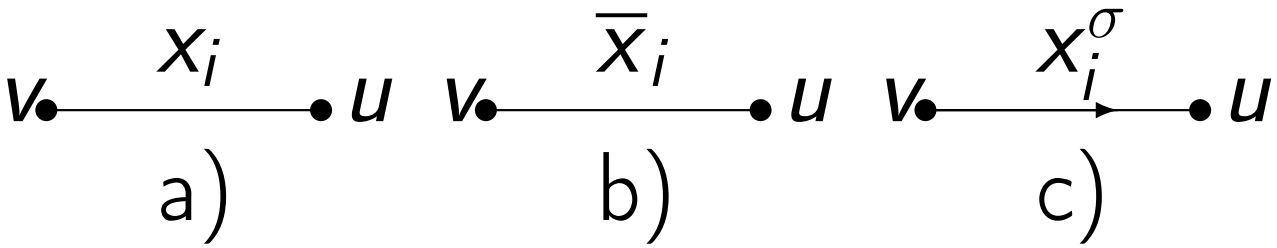


Рис.: типы контактов

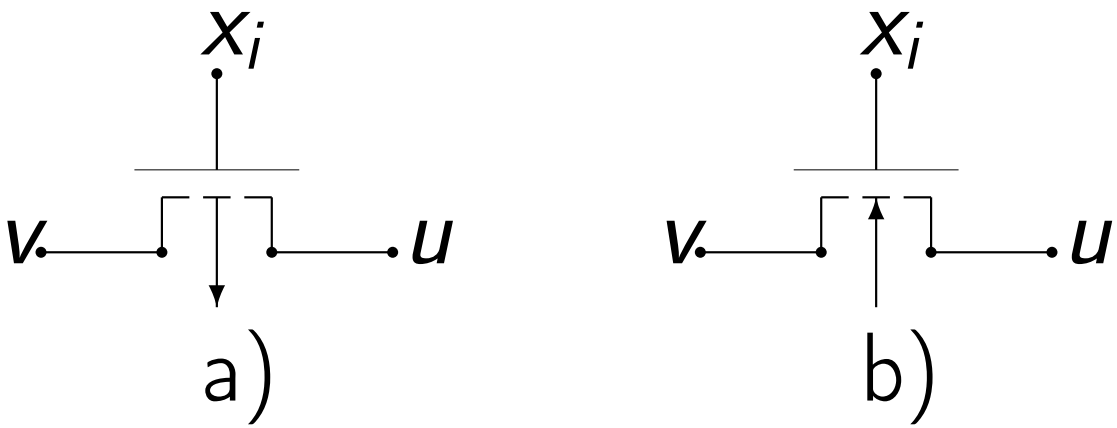


Рис.: физическая интерпретация контактов

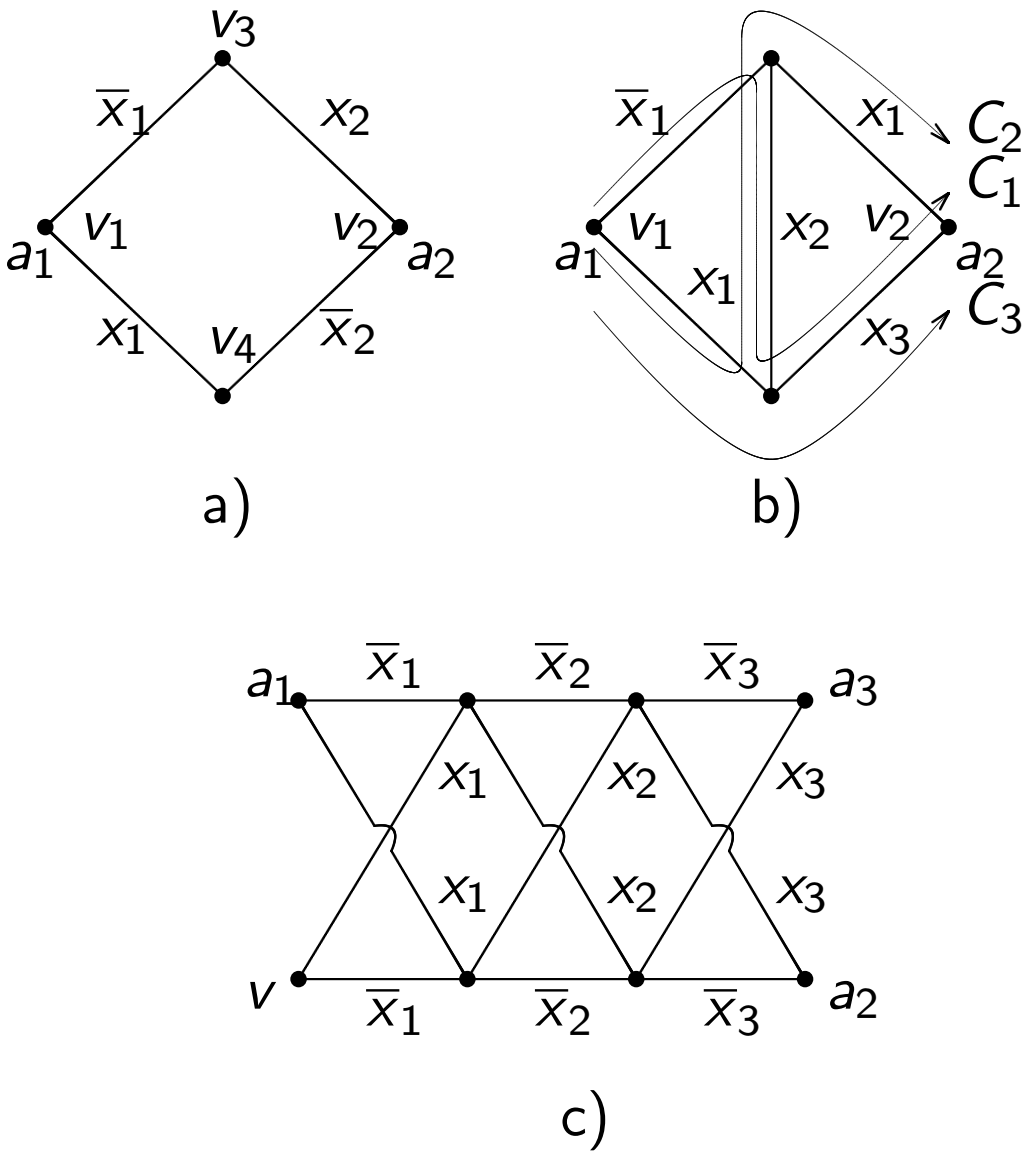


Рис.: некоторые КС от БП x_1, x_2, x_3

Утверждение 10.1 Любой π-схеме Σ можно сопоставить эквивалентную ей формулу $\mathcal{F}$ из $\mathcal{U}^{\Phi}$ с поднятыми отрицаниями такую, что $R(\mathcal{F}) = L(\Sigma)$ и обратно.

Утверждение 10.2 При любых натуральных L и n выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}^{\pi}(L, n)\| \leqslant (12n)^{L}.$$

Утверждение 10.3 При любых натуральных L и n выполняется неравенство

$$\left\|\mathcal{U}^{\mathrm{K}}(L,n)\right\| \leqslant (8nL)^{L}.$$

11 Эквивалентные преобразования формул с помощью тождеств. Полнота системы основных тождеств для эквивалентных преобразований формул базиса $\{\&, \vee, \neg\}$

$$
\begin{aligned}
\tau^{\text{осн}} &= \left\{ t^{\mathrm{M}}_{\&},\ t^{\mathrm{M}}_{\neg},\ t^{\mathrm{A}}_{\&},\ t^{\mathrm{K}}_{\&},\ t^{\text{ОП}}_{\&},\ t^{\mathrm{D}}_{\&,\vee},\ t^{\text{ПК}}_{1,\&},\ t^{\text{ПК}}_{0,\&} \right\},\\
\tau^{\mathrm{A}} &= \left\{ t^{\mathrm{A}}_{\&},\ t^{\mathrm{A}}_{\vee} \right\},\\
\tau^{\mathrm{K}} &= \left\{ t^{\mathrm{K}}_{\&},\ t^{\mathrm{K}}_{\vee} \right\},\\
\tau^{\text{ОП}} &= \left\{ t^{\text{ОП}}_{\&},\ t^{\text{ОП}}_{\vee} \right\},\\
\tau^{\mathrm{D}} &= \left\{ t^{\mathrm{D}}_{\&,\vee},\ t^{\mathrm{D}}_{\vee,\&} \right\},\\
\tau^{\text{ПК}} &= \left\{ t^{\text{ПК}}_{0,\&},\ t^{\text{ПК}}_{1,\&},\ t^{\text{ПК}}_{0,\vee},\ t^{\text{ПК}}_{1,\vee} \right\},\\
\widetilde{\tau}^{\text{осн}} &= \left\{ \tau^{\mathrm{M}},\ \tau^{\mathrm{A}},\ \tau^{\mathrm{K}},\ \tau^{\text{ОП}},\ \tau^{\mathrm{D}},\ \tau^{\text{ПК}},\ t^{\text{П}} \right\}.
\end{aligned}
$$

Утверждение 11.1 Система $\widetilde{\tau}^{\text{осн}}$ выводима из системы $\tau^{\text{осн}}$.

Утверждение 11.2 Любую формулу $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n)$, реализующую ФАЛ f, с помощью ЭП на основе системы тождеств $\tau^{\text{осн}}$ можно преобразовать в совершенную ОДНФ ФАЛ f от БП $X(n)$.

Утверждение 11.3 Система $\tau^{\text{осн}}$ — полная система тождеств.

12. Эквивалентные преобразования схем из функциональных элементов и моделирование с их помощью формульных преобразований. Моделирование эквивалентных преобразований формул и схем в различных базисах, теорема перехода

Утверждение 12.1 Если τ — конечная полная система тождеств для ЭП формул из $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{Ф}}$, то $\left\{\underline{\tau},\ \tau^{\mathrm{C}},\ \tau^{\mathrm{B}}\right\}$ — конечная полная система тождеств для ЭП СФЭ из $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\mathrm{C}}$

Следствие Система тождеств $\left\{\underline{\tau}^{\text{осн}},\ \tau^{\mathrm{B}},\ \tau^{\mathrm{C}}\right\}$ — КПСТ для ЭП СФЭ из $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}$.

Утверждение 12.2 Пусть τ — КПСТ для ЭП формул из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$, а Π' и Π — системы тождеств для перехода от базиса Б к базису Б$'$ и от базиса Б$'$ к базису Б соответственно. Тогда система тождеств $\{\Pi'(\tau), \Pi'(\Pi)\}$ является КПСТ для ЭП формул из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$.

Следствие Из системы тождеств $\tau^{\text{осн}}$ для ЭП формул из $\mathcal{U}^{\Phi}$ указанным в утверждении способом можно получить КПСТ для ЭП формул в любом базисе Б.

13. Эквивалентные преобразования контактных схем. Основные тождества, вывод вспомогательных и обобщённых тождеств

Утверждение 13.1 Имеет место выводимость $\{t_1 — t_5, t_6^{(1)}, t_6^{(2)}\} \models\!\!\Rightarrow \{t_7 — t_{11}\}$.

Утверждение 13.2 При $n \geqslant 2$ имеет место выводимость $\tau_n \models\!\!\Rightarrow \tau^{(n)}$.

14. Полнота системы основных тождеств и отсутствие конечной полной системы тождеств в классе контактных схем

Утверждение 14.1 Для любой КС Σ, где $\Sigma = \Sigma\left(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m\right) \in \mathcal{U}^{\mathrm{K}}$, и любой эквивалентной Σ КС $\widehat{\Sigma}\left(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m\right)$ канонического вида существует ЭП $\Sigma \underset{\tau_n}{\rightrightarrows} \widehat{\Sigma}$.

Утверждение 14.2 Для любых двух эквивалентных КС Σ' и Σ'' от БП $x_1, \ldots, x_n$ существует ЭП вида $\Sigma' \underset{\tau_n}{\rightrightarrows} \Sigma''$.

Следствие Система τ_n является КПСТ для ЭП КС из $\mathcal{U}^{\mathrm{K}}$ от БП $x_1, \ldots, x_n$.

Следствие Система τ_∞ является ПСТ для ЭП КС из $\mathcal{U}^{\mathrm{K}}$.

Утверждение 14.3 Если $\Sigma'(x_1, \ldots, x_n) \underset{\{t_1 - t_5\}}{\rightrightarrows} \Sigma''(x_1, \ldots, x_n)$, то $\Theta(\Sigma') = \Theta(\Sigma'')$, а если $\Sigma' \underset{\tau_k}{\rightrightarrows} \Sigma''$, где $k < n$, то $\Theta(\Sigma') - \Theta(\Sigma'')$ делится на 2^{n-k}.

Утверждение 14.4 В классе $\mathcal{U}^{\mathrm{K}}$ не существует конечной полной системы тождеств.