Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 5

Логика предикатов:
выполнимые и общезначимые формулы
модели формул
логическое следствие
проблема общезначимости формул (постановка)

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2020/2021, весенний семестр

Вступление

Продолжаем обсуждение *логики предикатов*

Вспомним на примере, что есть что

Сигнатура:

$$\left\langle \{\mathsf{c}\}, \left\{\mathsf{f}^{(1)}\right\}, \left\{\mathrm{P}^{(1)}\right\} \right\rangle$$

Формула:

$$\varphi = \mathrm{P}(\mathsf{c}) \to \forall \mathtt{x}\, \mathrm{P}(\mathsf{f}(\mathtt{x}))$$

Интерпретация $\mathcal{I}$:

предметная область: $\{d_1, d_2\}$

$\overline{\mathsf{c}} = d_1$ $\quad$ $\overline{\mathsf{f}}(d_1) = \overline{\mathsf{f}}(d_2) = d_1$ $\quad$ $\overline{\mathrm{P}}(d_1) = \mathbb{t}$, $\quad$ $\overline{\mathrm{P}}(d_2) = \mathbb{f}$

Отношение выполнимости:

$$\mathcal{I} \models \varphi$$

Выполнимые и общезначимые формулы

Формула $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}^n})$ выполнима в интерпретации $\mathcal{I}$ ($\mathcal{I} \Vert\!\models \varphi$[1]),
если **существует** набор предметов $\widetilde{d^n}$ из области интерпретации $\mathcal{I}$,
такой что $\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}^n})[\widetilde{d^n}]$

Формула $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}^n})$ истинна в интерпретации $\mathcal{I}$ ($\mathcal{I} \models \varphi$),
если **для любого** набора предметов $\widetilde{d^n}$ из области интерпретации $\mathcal{I}$
верно $\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}^n})[\widetilde{d^n}]$

Формула φ выполнима ($\Vert\!\models \varphi$[1]),
если существует интерпретация, в которой она выполнима

Формула φ общезначима (тождественно истинна; $\models \varphi$),
если она истинна в любой интерпретации

Формула φ невыполнима (тождественно ложна),
если она не является выполнимой

[1] Как и раньше, это необщеупотребимое обозначение

Выполнимые и общезначимые формулы

Пример

$$
\begin{aligned}
\varphi &: \quad \forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}) \\
\psi &: \quad \exists \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}) \\
\chi &: \quad \forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \forall \mathrm{x}\ \neg \mathrm{P}(\mathrm{x})
\end{aligned}
$$

Интерпретация $\mathcal{I}_1$: $\mathsf{D} = \{d\}$, $\overline{\mathrm{P}}(d) = \mathbb{t}$

$$\mathcal{I}_1 \models \varphi \qquad \mathcal{I}_1 \models \psi \qquad \mathcal{I}_1 \not\models \chi$$

Интерпретация $\mathcal{I}_2$: $\mathsf{D} = \{d_1, d_2\}$, $\overline{\mathrm{P}}(d_1) = \mathbb{t}$, $\overline{\mathrm{P}}(d_2) = \mathbb{f}$

$$\mathcal{I}_2 \models \varphi \qquad \mathcal{I}_2 \not\models \psi \qquad \mathcal{I}_2 \not\models \chi$$

Только что мы доказали, что

1. формулы φ, ψ выполнимы
2. формулы ψ, χ необщезначимы

А как доказать общезначимость φ и невыполнимость χ?

Выполнимые и общезначимые формулы

Выполнимые необщезначимые формулы — это логические формы, в которых записана некоторая “нетривиальная” (“полезная”) информация

Общезначимые формулы — это (*казалось бы*) банальности, тавтологии, формы, не содержащие в себе никакой “полезной” информации

При этом общезначимые формулы в логике считаются чрезвычайно важными, и в курсе будут обсуждаться в основном такие формулы

Почему?

Модели

Интерпретация $\mathcal{I}$ называется модель для **предложения** φ, если $\mathcal{I} \models \varphi$

$$\text{интерпретация } \mathcal{I} \;\underset{\text{истинно (выполняется) в}}{\overset{\text{является моделью для}}{\rightleftarrows}}\; \text{предложение } \varphi$$

Интерпретация $\mathcal{I}$ называется моделью для **множества предложений** F, если она является моделью для каждого предложения из F

Наряду с “модель для формулы/множества” будем также говорить “модель формулы/множества” (без “для”)

Относительно каждой интерпретации $\mathcal{I}$ все предложения делятся на

- выполнимые в $\mathcal{I}$ (“верные” в $\mathcal{I}$) и
- невыполнимые в $\mathcal{I}$ (“неверные”)

Относительно каждого предложения φ все интерпретации делятся на

- модели для φ (“адекватно” подходящие под устройство φ) и
- не являющиеся моделями для φ (неподходящие)

Модели

Пример

Снова рассмотрим интерпретации с квадратами и кругами белого и чёрного цвета на плоскости:

$\mathrm{C}(\mathrm{x})$: “x — круг” $\mathrm{B}(\mathrm{x})$: “x — чёрный предмет”

$\mathrm{S}(\mathrm{x})$: “x — квадрат” $\mathrm{W}(\mathrm{x})$: “x — белый предмет”

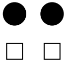
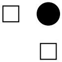
$\mathrm{U}(\mathrm{x},\mathrm{y})$: “предмет x лежит под предметом y”

Рассмотрим такую формулу φ:

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{W}(\mathrm{x})\ \&\ \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y})\ \&\ \mathrm{C}(\mathrm{y}\ \&\ \mathrm{U}(\mathrm{x},\mathrm{y})))$$

“**любой белый квадрат лежит под каким-то чёрным кругом**”

и такие интерпретации:

$\mathcal{I}_1$:  $\mathcal{I}_2$: 

Тогда $\mathcal{I}_1$ **является моделью** для φ, а $\mathcal{I}_2$ **не является**:

- $\mathcal{I}_1 \models \varphi$: оба белых квадрата лежат под чёрными кругами
- $\mathcal{I}_2 \not\models \varphi$: левый белый квадрат **не** лежит под чёрным кругом

Логическое следствие

Предложение φ называется логическим следствием множества предложений F ($\mathsf{F} \models \varphi$), если любая модель F является моделью φ

Другими словами — если для любой интерпретации $\mathcal{I}$ верно

$$\mathcal{I} \models \mathsf{F} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{I} \models \varphi$$

Содержательно — если независимо от смысла (*оценки*) символов сигнатуры из справедливости всех утверждений, записанных в F, **обязательно** следует справедливость утверждения φ

Наряду с "$\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \models \varphi$" будем также писать "$\psi_1, \ldots, \psi_n \models \varphi$"

Пример:

- $\forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \models \mathrm{P}(\mathbf{c})$: "все предметы обладают свойством P"
  $\Rightarrow$ "предмет, обозначенный символом **c**, обладает свойством P"
- $\mathrm{P}(\mathbf{c}) \not\models \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x})$:
  "предмет, обозначенный символом **c**, обладает свойством P"
  $\not\Rightarrow$ "все предеметы обладают свойством P"

Логическое следствие

Предложение φ называется логическим следствием множества предложений F ($\mathsf{F} \models \varphi$), если любая модель F является моделью φ

Другими словами — если для любой интерпретации $\mathcal{I}$ верно

$$\mathcal{I} \models \mathsf{F} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{I} \models \varphi$$

Содержательно — если независимо от смысла (*оценки*) символов сигнатуры из справедливости всех утверждений, записанных в F, **обязательно** следует справедливость утверждения φ

Одна из главных задач (и характерное проявление) интеллектуальной деятельности — это **извлечение логических следствий** из имеющихся баз знаний

Эта задача возникает в огромном числе областей "разумной деятельности": экспертные системы, (автоматическое и ручное) доказательство теорем, формальный анализ программ, . . . , . . .

Логическое следствие (пример)

Покажем, что представляют собой логические следствия, на простом показательном примере

Известно, что:

- Даша любит Сашу,
- а Саша любит пиво,
- а Паша любит пиво и всех тех, кто любит то же, что и он

Любит ли кто-нибудь Дашу?

Попробуем записать эту задачу на языке логики предикатов

Начнём с сигнатуры алфавита: в неё войдут

- константы **Даша**, **Саша**, **Паша**, **пиво** и
- предикатный символ $\mathrm{L}^{(2)}$: $\mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) =$ “икс любит игрека”

Логическое следствие (пример)

Условия задачи переписываются так:

- Даша любит Сашу
$$\varphi_1 = \mathrm{L}(\textbf{Даша}, \textbf{Саша})$$
- Саша любит пиво
$$\varphi_2 = \mathrm{L}(\textbf{Саша}, \textbf{пиво})$$
- Паша любит пиво и всех тех, кто любит то же, что и он:
$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \mathrm{L}(\textbf{Паша}, \textbf{пиво}) \\ \varphi_4 &= \forall \mathrm{x}\ (\exists \mathrm{y}\ (\mathrm{L}(\textbf{Паша}, \mathrm{y})\ \&\ \mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{L}(\textbf{Паша}, \mathrm{x})) \end{aligned}$$
- Любит ли кто-нибудь дашу?
  Правда ли, что из знаний $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ необходимо следует знание
$$\varphi_0 = \exists x\ L(\mathrm{x}, \textbf{Даша})\ ?$$

В конечном итоге задача переписывается так:

проверить соотношение $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \models \varphi_0$

Логическое следствие

Теорема(*о логическом следствии*). Для любого предложения φ и любого конечного множества предложений $\mathsf{F} = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ справедлива равносильность

$$\mathsf{F} \models \varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \models \psi_1 \,\&\, \psi_2 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

Доказательство. ($\Rightarrow$): Предположим, что $\mathsf{F} \models \varphi$

Рассмотрим **произвольную** интерпретацию $\mathcal{I}$

Если $\mathcal{I} \not\models \mathsf{F}$, то $\mathcal{I} \not\models \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n$, а значит, $\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$

Пусть теперь $\mathcal{I} \models \mathsf{F}$

Так как $\mathsf{F} \models \varphi$, верно и $\mathcal{I} \models \varphi$ —
а значит, снова верно $\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$

Итог: для **любой** интерпретации $\mathcal{I}$ верно

$$\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

Но это и означает общезначимость формулы $\psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$

Логическое следствие

Теорема(*о логическом следствии*). Для любого предложения φ и любого конечного множества предложений $\mathsf{F} = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ справедлива равносильность

$$\mathsf{F} \models \varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \models \psi_1 \,\&\, \psi_2 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

Доказательство. ($\Leftarrow$): Предположим, что $\models \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$

Рассмотрим **произвольную** модель $\mathcal{I}$ для множества F:

$$\mathcal{I} \models \psi_1, \qquad \dots, \qquad \mathcal{I} \models \psi_n$$

Тогда $\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n$

Так как формула $\psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$ общезначима, верно

$$\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

Согласно семантике "$\to$", это означает, что верно $\mathcal{I} \models \varphi$

Таким образом, **произвольная** модель $\mathcal{I}$ множества F является и моделью формулы φ, то есть $\mathsf{F} \models \varphi$ ▼

Проблема общезначимости формул

Чтобы уметь извлекать логические следствия и в целом анализировать достоверность утверждений, необходимо понимать **законы**, связывающие достоверность различных утверждений

Общезначимые формулы представляют собой один из способов записи таких законов — например, достоверность знаний φ, полученных из достоверных знаний $\mathsf{F} = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$, равносильна общезначимости формулы

$$\psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

В связи с этим оказывается важна проблема общезначимости формул:

для заданной формулы φ
проверить её общезначимость:

$$\models \varphi\ ?$$

Проблема общезначимости формул

Напоследок — несколько слов о взаимосвязи свойств общезначимости, выполнимости и невыполнимости формул логики предикатов:

формула $\varphi(\widetilde{x}^n)$ общезначима $\xrightarrow{\psi = \forall\widetilde{x}^n\ \varphi}$ предложение ψ общезначимо

формула $\varphi(\widetilde{x}^n)$ общезначима $\xrightarrow{\psi = \neg\varphi}$ формула $\psi(\widetilde{x}^n)$ невыполнима

формула $\psi(\widetilde{x}^n)$ невыполнима $\xrightarrow{\varphi = \neg\psi}$ формула $\varphi(\widetilde{x}^n)$ общезначима

формула $\psi(\widetilde{x}^n)$ невыполнима $\xrightarrow{\varphi = \exists\widetilde{x}^n\ \psi}$ предложение φ невыполнимо

формула $\psi(\widetilde{x}^n)$ невыполнима $\xleftrightarrow{\varphi = \psi}$ формула $\varphi(\widetilde{x}^n)$ выполнима: противоположный ответ

формула $\varphi(\widetilde{x}^n)$ выполнима $\xrightarrow{\psi = \exists\widetilde{x}^n\ \varphi}$ предложение ψ выполнимо

$\forall\widetilde{x}^n$ — сокращение для $\forall x_1 \ \ldots \forall x_n$

$\exists\widetilde{x}^n$ — сокращение для $\exists x_1 \ \ldots \exists x_n$

Проблема общезначимости формул

Напоследок — несколько слов о взаимосвязи свойств общезначимости, выполнимости и невыполнимости формул логики предикатов:

Утверждение

$$\begin{tikzcd}
\text{формула } \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \text{ общезначима} \arrow[r, bend left, "\psi = \forall\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \varphi"] \arrow[d, bend right, "\psi = \neg\varphi"'] & \text{предложение } \psi \text{ общезначимо} \\
\text{формула } \psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \text{ невыполнима} \arrow[r, bend left, "\varphi = \exists\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \psi"] \arrow[u, bend right, "\varphi = \neg\psi"'] \arrow[d, leftrightarrow, "\varphi = \psi"', "\text{противоположный ответ}"] & \text{предложение } \varphi \text{ невыполнимо} \\
\text{формула } \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \text{ выполнима} \arrow[r, bend left, "\psi = \exists\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \varphi"] & \text{предложение } \psi \text{ выполнимо}
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Напрямую следует из определений выполнимости, невыполнимости и общезначимости