Лекция 1. Графы. Простейшие свойства графов. Пути, цепи и циклы. Связность, k-связность. Деревья, корневые деревья.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

Граф

(**Неориентированным**) **графом** G называется пара (V, E), где V — непустое конечное множество вершин; E — конечное множество ребер, причем каждому ребру $e \in E$ сопоставлена **неупорядоченная** пара вершин, т. е. $e = (v, w)$, где $v, w \in V$.

Обозначения:

$V(G)$ — множество вершин графа G,

$E(G)$ — множество ребер графа G.

Пример: сеть

Сеть — p узлов с соединениями между некоторыми из них.

Петли и кратные ребра

Ребро $e = (v, v)$, где $v \in V$, называется **петлей**.

Ребра $e_1 = (v, w)$ и $e_2 = (v, w)$, где $v, w \in V$ и $e_1 \neq e_2$, называются **кратными** ребрами.

Граф, в котором допускаются и петли, и кратные ребра иногда называется **псевдографом**.
Граф без петель, но, возможно, с кратными ребрами называется **мультиграфом**.
Граф без петель и кратных ребер называется **простым**, или **обыкновенным** графом.

Мы будем, как правило, рассматривать простые графы, т. е. графы без петель и кратных ребер.

Смежность

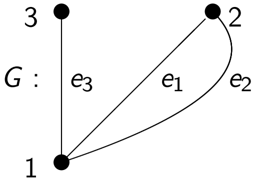
Говорят, что ребро $e = (v, w)$ **соединяет** вершины v и w, или **исходит** из вершины v (и из вершины w), или вершины v и w **инцидентны** ребру e.

При этом вершины v и w называются **концами** ребра e, или **смежными** (**соседними**) по ребру e.

Изображения графов

Для наглядности графы можно изображать: вершинам ставятся в соответствие **точки** (разным вершинам — различные точки); ребрам сопоставляются непрерывные **линии**, соединяющие соответствующие вершины (точки) (разным ребрам — различные линии).

Пусть $G = (V, E)$, где $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, где $e_1 = (1, 2)$, $e_2 = (1, 2)$ и $e_3 = (1, 3)$.



Изоморфизм графов

Два графа без петель и кратных ребер

$$G_1 = (V_1, E_1) \text{ и } G_2 = (V_2, E_2)$$

называются **изоморфными**, если найдется взаимно однозначное отображение $\varphi : V_1 \to V_2$, сохраняющее ребра, т. е. для любых вершин $v, w \in V_1$ выполняется соотношение:

$$(v, w) \in E_1 \;\Leftrightarrow\; (\varphi(v), \varphi(w)) \in E_2.$$

Пустые и полные графы

Пустым графом O_n называется граф с n вершинами, в котором нет ни одного ребра (т. е. с пустым множеством ребер), $n \geqslant 1$.

Полным графом K_n называется граф с n вершинами, в котором любые две различные вершины смежны, $n \geqslant 1$.

Полный граф K_3 называется также **треугольником**.

Двудольные графы

Двудольным графом называется граф, в котором вершины можно так разбить на две непересекающиеся части (доли), что смежны только вершины из разных долей.

Полным двудольным графом $K_{m,n}$ называется двудольный граф с долями из m и n вершин, в котором смежны любые две вершины из разных долей, $m, n \geqslant 1$.

Дополнительный граф

Дополнительным графом к графу $G = (V, E)$ называется граф $\bar{G} = (V, \bar{E})$, где

$$\bar{E} = \{(v, w) \mid v, w \in V, v \neq w, (v, w) \notin E\}.$$

Т. е. дополнительный граф $\bar{G}$ содержит те же вершины, что и граф G, и любая пара различных вершин в нем смежна том и только в том случае, когда эта пара вершин не смежна в графе G.

Другими словами, дополнительный граф $\bar{G}$ содержит те же вершины, что и граф G, и в точности все те ребра, которые не содержит граф G.

Степень вершины

Степенью $d_G(v)$ вершины $v \in V$ в графе $G = (V, E)$ называется число исходящих из нее ребер (причем петля вносит двойной вклад в степень вершины).

Степень $d_G(v)$ вершины $v \in V$ в графе без петель и кратных ребер $G = (V, E)$ совпадает с числом смежных с ней вершин.

Если $d_G(v) = 0$, то вершина v называется **изолированной** в графе G; если $d_G(v) = 1$, то вершина v называется **висячей**, или **концевой**, в графе G.

Обозначения: $\delta(G) = \min\limits_{v \in V} d_G(v)$ и $\Delta(G) = \max\limits_{v \in V} d_G(v)$ — соответственно, **наименьшая** и **наибольшая** степени вершин в графе G.

Формула Эйлера для степеней вершин

Предложение 1. *Пусть $G = (V, E)$ — граф без петель и кратных ребер. Тогда*
1) $\sum\limits_{v \in V} d_G(v) = 2|E|$;
2) *в графе G число вершин, имеющих нечетную степень, четно.*

Доказательство.
1. Рассмотрим сумму в левой части равенства. Т. к. любое ребро графа имеет ровно два конца, каждое ребро в этой сумме будет подсчитано ровно два раза. Получаем выражение в правой части равенства.
2. Свойство непосредственно следует из равенства п. 1.

$\square$

Отметим, что формула Эйлера для степеней вершин верна и для псевдографов.

Пути в графах

Путем в графе $G = (V, E)$ из вершины v_0 в вершину v_m (или (v_0, v_m)-**путем**) называется последовательность вершин и ребер графа G

$$v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{m-1} e_m v_m,$$

в которой $e_j = (v_{j-1}, v_j) \in E$ для каждого $j = 1, \dots, m$, $m \geqslant 0$.

При этом вершина v_0 называется **началом** пути, вершина v_m называется **концом** пути. Число m ребер пути называется его **длиной**.

Для графов без петель и кратных ребер **путь** однозначно определяется последовательностью вершин $v_0 v_1 v_2 \dots v_{m-1} v_m$.

Цепь — путь без повторений ребер.

Простая цепь — цепь без повторений вершин.

Свойства путей и цепей

Предложение 2. *Пусть* $G = (V, E)$ *— граф без петель и кратных ребер. Тогда в графе* G *из любого пути можно выделить простую цепь, соединяющую те же вершины, что и этот путь.*

Доказательство. Пусть P — (v, w)-путь в G, где $v, w \in V$. Покажем, что из пути P можно выделить простую (v, w)-цепь.

Свойства путей и цепей

Доказательство. Если в P никакая вершина, не повторяется, то он — искомая простая (v, w)-цепь.

Пусть некоторая вершина $u \in V$ в нем повторяется, т. е.

$$P = vP_1uP_2uP_3w,$$

где vP_1u, uP_2u, uP_3w — непересекающиеся пути, на которые разбивается путь P двумя повторами вершины u. При этом первый или третий из них может быть пустым (если $u = v$ или $u = w$), но второй из них всегда содержит хотя бы одно ребро.

Тогда повторим эти рассуждения для (v, w)-пути $P' = vP_1uP_3w$, имеющего меньшую длину.

Через конечное число шагов получим искомую простую (v, w)-цепь.

$\square$

Циклы в графах

Замкнутый путь — путь, в котором последняя вершина совпадает с первой.

Цикл — замкнутый путь без повторений ребер.

Простой цикл — цикл, в котором все вершины, кроме последней, различны.

Свойства цепей и циклов

Предложение 3. *Пусть* $G = (V, E)$ *— граф без петель и кратных ребер. Тогда*

1) *в графе* G *из любого замкнутого пути нечетной длины* m, $m \geqslant 3$, *можно выделить простой цикл нечетной длины;*

2) *в графе* G *найдутся*

а) *простая цепь с длиной, не меньшей* $\delta(G)$,

б) *простой цикл с длиной, не меньшей* $\delta(G) + 1$ *при* $\delta(G) \geqslant 2$.

Свойства цепей и циклов

Доказательство.
1. Рассмотрим замкнутый путь P нечетной длины m, $m \geqslant 3$. Если в нем никакая вершина, кроме последней, не повторяется, то он — искомый простой цикл нечетной длины. Пусть некоторая вершина $v \in V$ в нем повторяется, т. е.

$$P = vP_1vP_2v,$$

где vP_1v, vP_2v — непересекающиеся непустые замкнутые пути, на которые вершина v разбивает путь P. Пусть m_1, m_2 — длины замкнутых путей P_1, P_2, причем $m_1 < m$ и $m_2 < m$. Из того, что $m = m_1 + m_2$ и m — нечетное число, заключаем, что либо m_1 — нечетное число, либо m_2 — нечетное число. Повторим рассуждения для нового замкнутого пути $P' = vP_iv$ с меньшей нечетной длиной m_i. Через конечное число шагов получим искомый простой цикл нечетной длины.

Свойства цепей и циклов

Доказательство.
2. a) Рассмотрим произвольную вершину $v_0 \in V$. Положим $P_0 = v_0$ — простая цепь длины 0. Пусть мы уже построили простую цепь $P_i = v_0 v_1 \dots v_i$ длины i.

Если $i = \delta(G)$, то P_i — искомая простая цепь.

Пусть $i < \delta(G)$. Т. к. $d_G(v_i) \geqslant \delta(G)$, найдется такая вершина $v_{i+1} \in V$, не совпадающая ни с одной из вершин $v_0, v_1, \dots, v_{i-1}$, что $(v_i, v_{i+1}) \in E$. Добавим эту вершину v_{i+1} к цепи P_i, т. е. построим простую цепь $P_{i+1} = v_0 v_1 \dots v_i v_{i+1}$ длины $(i + 1)$.

Через $\delta(G)$ шагов мы получим искомую простую цепь.

Свойства цепей и циклов

Доказательство.
2. б) Пусть мы построили простую цепь $P_m = v_0 v_1 \dots v_m$ длины $m = \delta(G)$. Если найдется такая вершина v_{m+1}, не совпадающая с вершинами $v_0, v_1, \dots, v_m$, что $(v_m, v_{m+1}) \in E$, то добавим эту вершину v_{m+1} к цепи P_m, т. е. построим простую цепь $P_{m+1} = v_0 v_1 \dots v_m v_{m+1}$ длины $(m+1)$.

Так будем действовать до тех пор, пока не получим такую простую цепь $P_{m'} = v_0 v_1 \dots v_m \dots v_{m'}$ длины m', $m' \geqslant m$, что все вершины, с которыми связана вершина $v_{m'}$, лежат на цепи $P_{m'}$.

Пусть v_{i_0}, $i_0 < m'$, — вершина с наименьшим номером на цепи $P_{m'}$, с которой связана вершина $v_{m'}$. Тогда искомый простой цикл $C = v_{i_0} \dots v_{m'} v_{i_0}$.

□

Подграф

Граф $H = (V', E')$ называется **подграфом** графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$.

Подграф $H = (V, E')$ графа $G = (V, E)$, т. е. подграф, содержащий все вершины графа G, называется его **остовным подграфом**.

Операции над графами

Операции над графами:

Граф $G - e$, где $e \in E$: $G - e = (V, E \setminus \{e\})$.

Граф $G - v$, где $v \in V$, — граф с множеством вершин $V \setminus \{v\}$ и с множеством ребер E без всех ребер с концами в вершине v.

Граф $G + e$, где $e = (v, w)$, $e \notin E$:
$G + e = (V \cup \{v, w\}, E \cup \{e\})$.

Связность

Граф $G = (V, E)$ называется **связным**, если для каждой пары вершин $v, w \in V$ в графе G найдется (v, w)-путь (а значит, и простая (v, w)-цепь).

Максимальный (по включению) связный подграф графа G называется его **компонентой связности**.

Если G — связный граф, то у графа G ровно одна компонента связности.

Связность

Пусть $G = (V, E)$ — граф. Рассмотрим отношение $R \subseteq V^2$ на множестве его вершин V: если $v, w \in V$, то $R(v, w)$ в том случае, когда в G найдется (v, w)-путь.

Тогда R — рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. R — отношение эквивалентности на множестве V.

Каждый класс эквивалентности по отношению R порождает компоненту связности графа G.

Пример: связная сеть

Связная сеть — p узлов с такими соединениями между ними, что из любого узла можно передать данные в любой другой (возможно, через промежуточные узлы).

Свойства связных графов

Предложение 4. *Пусть $G = (V, E)$ — связный граф без петель и кратных ребер. Тогда*

1) *в графе $G_1 = G + e$, где $e = (v, w) \notin E$, $v, w \in V$, найдется цикл;*

2) *граф $G_2 = G - e$, где ребро e принадлежит циклу, является связным.*

Свойства связных графов

Доказательство.
1. Граф G — связный, поэтому в нем найдется (v, w)-путь, а значит, и простая (v, w)-цепь P. В графе G_1 простая цепь P также содержится. Тогда $C = vPw(w, v)v$ — искомый цикл в графе G_1.

Свойства связных графов

Доказательство.

2. Пусть ребро e принадлежит циклу C в графе G. Рассмотрим две произвольные вершины v, w в графе G_2. Эти же вершины принадлежат графу G. Граф G — связный, поэтому в графе G найдется (v, w)-путь P. Если путь P не проходит через ребро e, то он содержится и в графе G_2. Если же путь P проходит через ребро e, то заменим в нем это ребро ребрами, принадлежащими оставшейся части цикла C. Получим (v, w)-путь в графе G_2.

$\square$

Число компонет связности

Теорема 1. *Пусть* $G = (V, E)$ *— граф без петель и кратных ребер с* p *вершинами,* q *ребрами и* s *компонентами связности. Тогда*

1) $s \geqslant p - q$;

2) *если в графе* G *отсутствуют циклы, то* $s = p - q$.

Число компонет связности

Доказательство.
1. Рассмотрим переход от графа $G_i = (V, E_i)$ к графу $G_{i+1} = G_i + e$, где $E_i \subseteq E$, $e \in E \setminus E_i$. Пусть в графах G_i, G_{i+1} соответственно s_i, s_{i+1} компонет связности. Тогда если ребро e соединяет вершины из одной компоненты связности графа G_i, то $s_{i+1} = s_i$; и если ребро e соединяет вершины из разных компонент связности графа G_i, то $s_{i+1} = s_i - 1$. Поэтому

$$s_{i+1} \geqslant s_i - 1.$$

Граф G можно получить из графа $G_0 = (V, \emptyset)$ с p компонентами связности последовательным добавлением всех ребер множества E. Поэтому $s \geqslant p - q$.
2. Если же в графе G нет циклов, то в предыдущих рассуждениях верно $s_{i+1} = s_i - 1$. Поэтому $s = p - q$.

$\square$

k-связность

Граф $G = (V, E)$ называется k-**связным**, если он содержит не менее k вершин и при удалениии из него не более $(k-1)$ любых вершин остается связный граф, $k \geqslant 1$.

Граф $G = (V, E)$ называется **реберно** k-**связным**, если при удалениии из него не более $(k-1)$ любых ребер остается связный граф, $k \geqslant 1$.

Пример: надежная связная сеть

Если связная сеть определяется реберно двусвязным графом, то при выходе из строя любого ее соединения остается также связная сеть.

Дерево

Деревом называется связный граф без циклов.

Граф без циклов (без условия связности) называется **лесом**.

Отметим, что любая компонента связности леса является деревом.

Деревья

Теорема 2 (о равносильных определениях дерева). *Пусть $G = (V, E)$ — граф с p вершинами и q ребрами. Тогда следующие утверждения равносильны*:

1) G — *дерево, т. е. связный граф без циклов*;

2) G — *связный граф и* $q = p - 1$;

3) G — *граф без циклов и* $q = p - 1$;

4) G — *граф без циклов, но при соединении любой пары несмежных вершин ребром появляется цикл*;

5) G — *связный граф, но при удалении любого ребра остается несвязный граф*.

Деревья

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$.

Дано: G — связный граф без циклов.
Доказать: G — связный граф и $q = p - 1$.

Обоснование. По условию G связный.

По условию G без циклов, поэтому по соотношению для G между числом вершин p, числом ребер q и числом компонент связности $s = 1$ получаем: $1 = s = p - q$.

Значит, $q = p - 1$.

Деревья

Доказательство. $2 \Rightarrow 3$.

Дано: G — связный граф и $q = p - 1$.
Доказать: G — граф без циклов и $q = p - 1$.

Обоснование. По условию $q = p - 1$.

Если в связном графе G найдется цикл, то удалим из G некоторое ребро e из цикла. Останется связный граф G'. По соотношению для G' между числом вершин p, числом ребер $q - 1$ и числом компонент связности $s' = 1$ получаем: $s' \geqslant p - (q - 1) = (p - q) + 1 = 2$ — противоречие.

Значит, G без циклов.

Деревья

Доказательство. $3 \Rightarrow 4$.

Дано: G — граф без циклов и $q = p - 1$.
Доказать: G — граф без циклов, но при соединении любой пары несмежных вершин ребром появляется цикл.

Обоснование. По условию G без циклов.

По соотношению для G между числом вершин p, числом ребер q и числом компонент связности s получаем:
$s = p - q = 1$, т. е. G связный.

Значит, при соединении в G любой пары несмежных вершин ребром появится цикл.

Деревья

Доказательство. $4 \Rightarrow 5$.

Дано: G — граф без циклов, но при соединении любой пары несмежных вершин ребром появляется цикл.
Доказать: G — связный граф, но при удалении любого ребра остается несвязный граф.

Обоснование. Если G не связный, то при соединении двух вершин из разных компонент связности цикл не появится. Значит, G связный.

Пусть при удалении из G некоторого ребра e остался связный граф G'. Тогда G получается из связного графа G' добавлением нового ребра e. Поэтому в G найдется цикл — противоречие.

Значит, при удалении из G любого ребра останется несвязный граф.

Деревья

Доказательство. $5 \Rightarrow 1$.

Дано: G — связный граф, но при удалении любого ребра остается несвязный граф.
Доказать: G — связный граф без циклов.

Обоснование. По условию G связный.

Если в G найдется цикл, то удалим из G любое ребро из цикла. Останется связный граф —противоречие.

Значит, G без циклов.

$\square$

Свойства деревьев

Предложение 5.

1. *В любом дереве с хотя бы двумя вершинами найдется не менее двух висячих вершин.*

2. *В любом дереве любые две различные вершины соединены ровно одной простой цепью.*

3. *Если к дереву добавить ребро, соединяющее его несмежные вершины, то получится граф с ровно одним простым циклом.*

4. *Если из дерева удалить любое ребро, то останется граф с ровно двумя компонентами связности.*

Свойства деревьев

Доказательство.

1. Доказывается от обратного, что в дереве найдется хотя бы одна висячая вершина. Затем опять от обратного, что в дереве найдется не менее двух висячих вершин.

2. Следует из зависимости между числом вершин, ребер и компонент связности в графе, т. к. в дереве нет циклов.

3. Если какие-то вершины соединены более, чем одной простой цепью, то из объединения двух из этих цепей можно выделить цикл, чего не может быть.

4. Ровно один простой цикл появится, т. к. по свойству 3 эти вершины в исходном дереве соединены ровно одной простой цепью.

5. Следует из свойств связных графов, т. к. в дереве нет циклов. □

Корневые деревья

Корневым деревом называется пара $(D; v_0)$, где $D = (V, E)$ — дерево, $v_0 \in V$ — выделенная вершина, называемая **корнем**.

При изоморфизме корневых деревьев корень обязан переходить в корень.

Висячая вершина корневого дерева, не являющаяся корнем, называется **листом**.

Поддеревья в корневом дереве

Пусть $(D; v_0)$ — корневое дерево, и $(v_0, v_1), \ldots, (v_0, v_m)$ — все ребра, исходящие из вершины v_0 в дереве D.
Тогда каждая компонента связности графа $G - v_0$ является деревом, и пусть $D_1, \ldots, D_m$ — все эти деревья.
Каждое из корневых деревьев $(D_i; v_i)$ называется **поддеревом** корневого дерева D, $i = 1, \ldots, m$.

Обходом в глубину из вершины v_0 назовем следующий обход дерева D:
1) перейти в непройденное поддерево D_i, обойти его в глубину из вершины v_i и вернуться в вершину v_0;
2) если пройдены все поддеревья, то закончить обход.

Задачи

1. Найти число неизоморфных графов $G = (V, E)$ (без петель к кратных ребер), если:

1) $|V| = 4$;
2) $|V| = 5$ и G — несвязный граф без изолированных вершин;
3) $|V| = 6$, $|E| = 7$ и в G ровно 2 висячие вершины;
4) $|V| = 6$, $|E| = 12$.

Изобразить эти неизоморфные графы.

2. Найти число неизоморфных деревьев $D = (V, E)$, если:

1) $|V| = 3$;
2) $|V| = 4$;
3) $|E| = 6$ и в D ровно 3 висячие вершины;
4) $|E| = 6$ и в D ровно 4 висячие вершины.

Изобразить эти неизоморфные деревья.

Задачи

3. Найти число неизоморфных корневых деревьев $(D; v_0)$, $D = (V, E)$, $v_0 \in V$, если:

1) $|V| = 3$;
2) $|V| = 4$;
3) $|E| = 6$ и в D ровно 3 листа;
4) $|E| = 6$ и в D ровно 4 листа.

Изобразить эти неизоморфные корневые деревья.

4. Найти число неизоморфных остовных
а) деревьев; б) корневых деревьев в графе G, если:

1) $G = K_3$;
2) $G = K_4$;
3) $G = K_4 - e$, где e — произвольное ребро графа K_4;
4) $G = K_{2,3}$.

Изобразить эти неизоморфные деревья.

Задачи

5. В дереве D ровно 156 вершин степени 4, остальные вершины — степени 1 или 2. Найти число вершин степени 1 в дереве D.

6. Связный граф G содержит 295 концевых вершин, остальные его вершины имеют степень 2 или 3. Кроме того, в графе G ровно один цикл. Найти число вершин степени 3 в графе G.

7. Сформулировать определение изоморфизма для псевдографов.

8. Верны ли предложения 1–4

1) для мультиграфов;
2) для псевдографов?

Если верны, то обосновать; если не верны, то указать, как надо изменить формулировки, чтобы они стали верными.

Литература к лекции

1. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Либроком, 2009. С. 9–11, 17, 22–25, 26–27, 53–55.

2. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973. С. 22–28, 48–51.