Математические модели последовательных вычислений

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические модели последовательных вычислений

Блок 10

Языки сетей Петри

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, весенний семестр

Изложенные результаты о проблемах ограниченности, живости и эквивалентности показывают, что:

- Сети Петри устроены существенно проще машин Тьюринга (то есть не являются универсальной вычислительной моделью)
    - Иначе были бы неразрешимы свойства ограниченности и живости
- Сети Петри устроены существенно труднее конечных автоматов
    - Иначе были бы разрешимы проблемы включения и эквивалентности

Попробуем аналогично оценить положение сетей Петри относительно иерархии языков Хомского, добавив сетям Петри возможность чтения символов при выполнении переходов (как в конечных и магазинных автоматах)

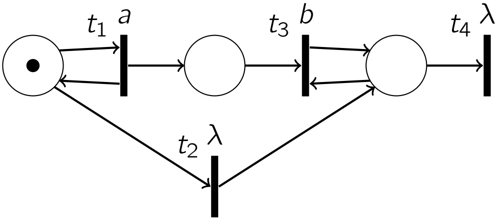
Размеченная терминальная сеть Петри над конечным алфавитом Σ — это система (π, φ, M_f), где:

- $\pi = (P, T, E, W, M_0)$ — маркированная сеть Петри
- $\varphi : R \to \Sigma \cup \{\lambda\}$ — разметка переходов, сопоставляющая каждому переходу t букву алфавита Σ или пустое слово λ
- M_f — терминальная разметка

Язык размеченной терминальной сети Петри (или, по-другому, язык, распознаваемый сетью) — это множество $L(\pi, \varphi, M_f)$ всех слов в алфавите Σ, являющихся конкатенацией пометок переходов в вычислении сети, оканчивающемся в M_f:

$$L(\pi, \varphi, M_f) = \{\varphi(t_1)\dots\varphi(t_n) \mid n \in \mathbb{N}_0,\ M_0 \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_1} \dots \xrightarrow{t_n} M_f\}$$

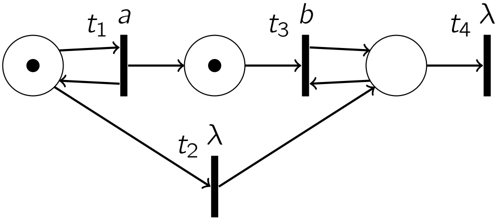
Пример ($\Sigma = \{a, b\}$)



Срабатывание переходов в вычислении:

Соответствующее слово:

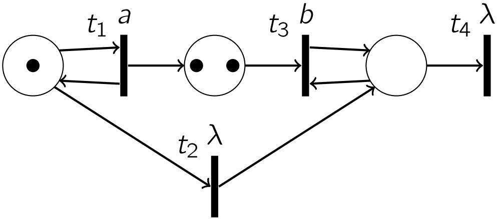
Пример ($\Sigma = \{a, b\}$)



Срабатывание переходов в вычислении: t_1

Соответствующее слово: a

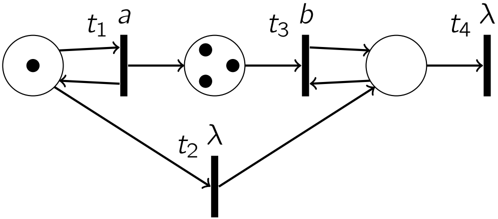
Пример ($\Sigma = \{a, b\}$)



Срабатывание переходов в вычислении: t_1 , t_1

Соответствующее слово: a a

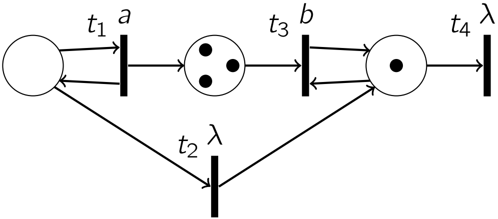
Пример ($\Sigma = \{a, b\}$)



Срабатывание переходов в вычислении: t_1 , t_1 , t_1

Соответствующее слово: a a a

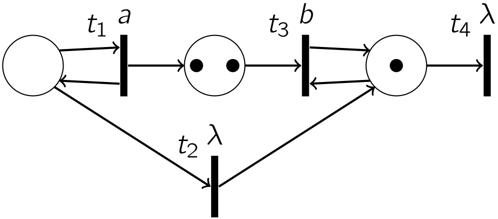
Пример ($\Sigma = \{a, b\}$)



Срабатывание переходов в вычислении: t_1 , t_1 , t_1 , t_2

Соответствующее слово: a a a

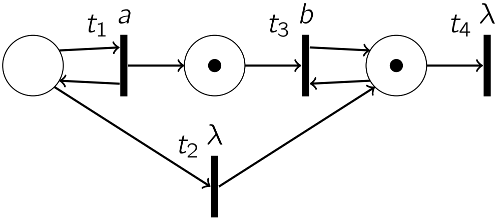
Пример ($\Sigma = \{a, b\}$)



Срабатывание переходов в вычислении: t_1 , t_1 , t_1 , t_2 , t_3

Соответствующее слово: $a\ a\ a\ b$

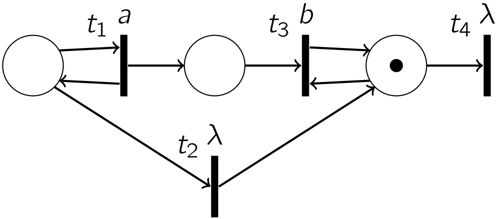
Пример ($\Sigma = \{a, b\}$)



Срабатывание переходов в вычислении: t_1 , t_1 , t_1 , t_2 , t_3 , t_3

Соответствующее слово: a a a b b

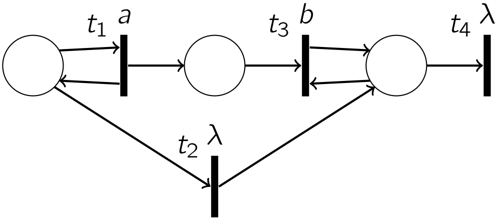
Пример ($\Sigma = \{a, b\}$)



Срабатывание переходов в вычислении: t_1 , t_1 , t_1 , t_2 , t_3 , t_3 , t_3

Соответствующее слово: a a a b b b

Пример ($\Sigma = \{a, b\}$)



Срабатывание переходов в вычислении: t_1 , t_1 , t_1 , t_2 , t_3 , t_3 , t_3 , t_4

Соответствующее слово: $a\ a\ a\ b\ b\ b$

Язык этой сети с терминальной разметкой $\langle 0, \ldots, 0 \rangle$:

$$\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$$

Для размышлений:

- Распознаётся ли это множество какой-либо сетью без переходов, помеченных λ?
- Если да — любой ли язык сети с переходами, помеченными λ, распознаётся какой-либо сетью без таких переходов?

Теорема (о регулярных языках). Любой регулярный язык распознаётся некоторой размеченной терминальной сетью Петри

Доказательство.

Как известно, регулярные языки распознаются конечными автоматами

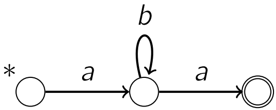
Значит, достаточно показать, что для любого автомата A существует сеть π, распознающая тот же язык

Эта сеть устроена так:

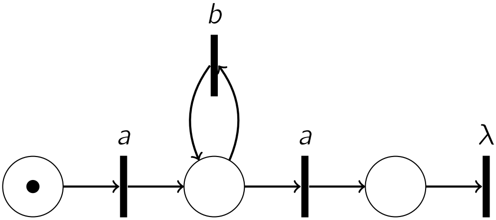
- Позиции π — это состояния A
- Начальное состояние содержит одну фишку в начальной разметке π, остальные — ни одной фишки
- Каждый переход $q_1 \xrightarrow{a} q_2$ в автомате отвечает переходу t с дугами $q_1 \to t \to q_2$, помеченному буквой a
- Пометка «заключительное» у состояния q отвечает переходу t с дугой $q \to t$, помеченному пустым словом
- Терминальная разметка — $\langle 0, \ldots, 0 \rangle$ ▼

Пример

Язык автомата



распознаётся сетью Петри с терминальной разметкой $\langle 0, \ldots, 0 \rangle$, устроенной так:

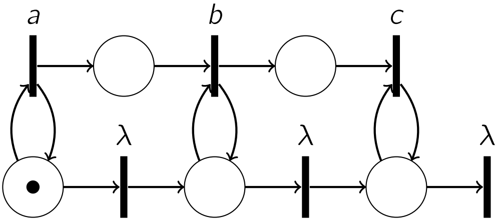


Теорема. Существует контекстно-зависимый язык, не являющийся контекстно-свободным и распознающийся некоторой сетью Петри

Доказательство.

Вот пример такого языка: $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

Этот язык распознаётся сетью с терминальной разметкой $\langle 0, \ldots, 0 \rangle$, устроенной так:



▼

Теорема. Существует контекстно-свободный язык, который не распознаётся ни одной сетью Петри

Доказательство.

Примером такого языка является язык, порождаемой следующей грамматикой с начальным нетерминалом S_0:

$$\begin{array}{lcl} S_0 & \to & S_0 c S_0 \\ S_0 & \to & S \\ S & \to & SS \\ S & \to & (S) \\ S & \to & \lambda \end{array}$$

Можете попробовать это доказать (и это непросто) ▼

Таким образом, языки сетей Петри строго шире регулярных, но оказываются несравнимы с контекстно-свободными:

- Есть языки сетей Петри, не являющиеся контекстно-свободными
- И наоборот, есть контекстно-свободные языки, не распознающиеся сетями Петри

Характерные особенности сетей Петри, приводящие к такому эффекту, — это

- «продвинутая» способность считать (как при моделировании диофантовых многочленов),
- но при этом неспособность запоминать и переиспользовать порядок выполненных действий, как это позволяет, например, магазин (стек)