Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра математической кибернетики

Семинары по курсу «Основы кибернетики»

Москва, 2020

Семинар 1.

Семинар 2. Алгебраические методы построения сокращенной ДНФ. Тупиковые ДНФ, ядро и ДНФ пересечение тупиковых

I. Окончание семинара 1 (по необходимости).

Напомнить определение импликанты ФАЛ, простой импликанты ФАЛ и ее сокращенной ДНФ, а также геометрический смысл этих понятий.

Задача 2.1. Из заданного множества A элементарных конъюнкций (ЭК) выделить простые импликанты (ПИ) ФАЛ f и g:

1. $A = \{x_1, \bar{x}_3, x_1x_2, x_2\bar{x}_3\}$, $\tilde{\alpha}_f = (00101111) \Rightarrow$ "геометрически" строим сокращенную ДНФ ФАЛ f вида $x_1 \vee x_2\bar{x}_3$, в которую из A входят только ПИ x_1 и $x_2\bar{x}_3$, причем ЭК $\bar{x}_3$ не является импликантой f, а ЭК x_1x_2 является импликантой, но не является ПИ;

2. $A = \{x_1\bar{x}_2, x_2x_3, x_1x_2x_3\}$, $\tilde{\alpha}_g = (01111110) \Rightarrow$ сокращенная ДНФ ФАЛ g имеет вид $x_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2 = K_1 \vee \cdots \vee K_6$, в которую из A входит только K_6.

II. Построение сокращенной ДНФ: а) методом Нельсона; б) методом Блейка.

а) *Задача 2.3* (1, 2):

1) $f = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \cdot (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) = (x_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) = x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3$

2) $f = (x_1 \vee \bar{x}_2) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) = x_1 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3$

Задача 2.9 (3):

$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \cdot (x_4 \oplus \cdots \oplus x_n) =$ (см. п.I.2)

$(K_1 \vee \cdots \vee K_6) \cdot (\bigvee\limits_{(\sigma_4,\ldots,\sigma_n) \in B^n_{\text{неч}}} x_4^{\sigma_4} \cdots x_n^{\sigma_n}) = \bigvee\limits_{i=1}^{6} \bigvee\limits_{(\sigma_4,\ldots,\sigma_n) \in B^n_{\text{неч}}} x_4^{\sigma_4} \cdots x_n^{\sigma_n} \cdot K_i,$

где $B^m_{\text{неч}}$ — множество всех наборов длины m с нечетным числом 1; при этом полученная сокращенная ДНФ ФАЛ f имеет длину $6 \cdot 2^{n-4}$.

б) *Задача 2.2* (1,2) (те ЭК, к которым применяется обобщенное склеивание, выделены полужирным шрифтом):

1) $\boldsymbol{\bar{x}_1\bar{x}_2} \vee \boldsymbol{x_1\bar{x}_2x_4} \vee x_2\bar{x}_3x_4 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \boldsymbol{\bar{x}_2x_4} \vee \boldsymbol{x_2\bar{x}_3x_4} = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_3x_4$.

2) $x_1\bar{x}_2x_3 \vee \boldsymbol{\bar{x}_1x_2\bar{x}_4} \vee \boldsymbol{\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4} = \boldsymbol{x_1\bar{x}_2x_3} \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_4 \vee \boldsymbol{\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4} \vee x_1\bar{x}_3\bar{x}_4 = x_1\bar{x}_2x_3 \vee \cdots \vee x_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_4$

III. Определения: тупиковой ДНФ, ядровой точки, ядровой грани, ядра и ДНФ пересечение тупиковых.

Задача 2.14 (1,2):

Показать, что всякая простая импликанта K ФАЛ f из $P_2(n)$ ранга r является ядровой, если: 1) $r = n$; 2) $r \leq 1$.

Решение

1) Заметим, что множество N_K состоит из единственного набора α, $\alpha \in N_f$, который в силу максимальности грани N_K для ФАЛ f не может принадлежать никакой другой максимальной грани ФАЛ f. Это означает, что грань N_K является ядровой гранью ФАЛ f, так как она содержит ядровую точку α этой ФАЛ.

2) В случае $r = 0$ утверждение верно, если считать, что при этом $f = K = 1$, то есть K — "пустая" ЭК и $N_K = B^n$.

Осталось рассмотреть случай, когда $r = 1$, то есть $K = x_i^{\sigma}$, где $1 \leq i \leq n$ и $\sigma \in B$. Заметим, что в данном случае имеет место строгое включение $N_f \setminus B_{\sigma}^{n;i} \subset B_{\bar{\sigma}}^{n;i}$, так как в противном случае выполнялось бы равенство $N_f = B^n$. Это означает, что найдется набор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \bar{\sigma}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \in \bar{N}_f$ такой, что соответствующий ему набор $\beta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \sigma, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ является ядровой точкой ФАЛ f.

Действительно, для любой содержащей точку β и отличной от N_K грани $N_{K'}$ ФАЛ f в ЭК K' должна входить буква x_i^{σ}, так как иначе не могли бы выполняться равенства $f(\beta) = 1$, $f(\alpha) = 0$. Следовательно, ни одна максимальная и отличная от N_K грань ФАЛ f не может проходить через точку β.

Задача 3.3 (1,2):

Построить ядро и ДНФ $\cap T$ ФАЛ f, заданной сокращенной ДНФ:

1) $f = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3 = K_1 \vee K_2 \vee K_3$ — цепная ФАЛ длины 3, ядро которой состоит из граней N_{K_1}, N_{K_2};

2) $f = \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 = K_1 \vee \cdots \vee K_6$ — данная ДНФ является сокращенной ДНФ ФАЛ f и "геометрически" состоит из квадрата, две соседние точки которого соединены цепочкой из 5 ребер, ее ядром является грань N_{K_1}.

Задача 2.12 (3):

Найти число ядровых ПИ у ФАЛ из приведенной выше *задачи 2.9(3)*.

Решение

С "геометрической точки" зрения сокращенная ДНФ данной ФАЛ представляет собой систему из 2^{n-4} циклов длины 6. Следовательно, у нее нет ядровых простых импликант.

Семинар 3. ДНФ Квайна и ДНФ сумма тупиковых. Таблица Квайна, методы построения всех тупиковых ДНФ.

I.

Напомнить определение ДНФ Квайна и ДНФ $\sum$Т. Построить указанные ДНФ для ФАЛ из следующих задач.

Задача 3.1. (1, 5):

1) $f = x_1x_2 \vee \bar{x}_2 = x_1 \vee \bar{x}_2$ — сокр. ДНФ = ДНФ Квайна = ДНФ $\sum$Т ФАЛ f;

5) $f = x_1x_2x_3 \vee x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3 = x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3 \vee x_1x_3 \vee x_1x_2$ — сокр. ДНФ = ДНФ Квайна = ДНФ $\sum$Т ФАЛ f.

Задача 3.3. (1, 2):

1) $f =$ (см. занятие 2) $= x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3 = K_1 \vee K_2 \vee K_3$ — цепная ФАЛ длины 3, ядро которой состоит из граней N_{K_1}, N_{K_2}, а ее ДНФ Квайна = ДНФ $\sum$Т = $K_1 \vee K_2$;

2) $f =$ (см. занятие 2) $= \bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4 = K_1 \vee \cdots \vee K_6$ — данная ДНФ является сокращенной ДНФ ФАЛ f и “геометрически” состоит из квадрата, две соседние точки которого соединены цепочкой из 5 ребер, ее ядром является грань N_{K_1}, а ее ДНФ Квайна = ДНФ $\sum$Т = сокр. ДНФ.

II. Построить все тупиковые ДНФ для ФАЛ, заданной своей сокращенной ДНФ, и, возможно, найти среди них минимальные.

Задача 3.4. (3):

3) $f = \bar{x}_1x_4 \vee \bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_3x_4 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3 = K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee K_4 \vee K_5$.

Построим таблицу Квайна:

	$(0**1)$				$(*0*1)$		$(**01)$	$(11**)$			$(*11*)$	
	(0001)(0101) (0011)(0111)				~~(0001)(0011)~~ (1001)(1011)		~~(0001)(0101)~~ ~~(1001)~~(1101)	(1100)~~(1101)~~ (1110)(1111)			(0110)~~(0111)~~ ~~(1110)(1111)~~	
$K_1 = \bar{x}_1 x_4$	1	1	1	1								Р
$K_2 = \bar{x}_2 x_4$	1		1		1	1						Я
$K_3 = \bar{x}_3 x_4$	1	1				1	1					Я
$K_4 = x_1 x_2$								1	1	1		Я
$K_5 = x_2 x_3$				1					1	1	1	Я
	Р	Р	Р	Р	Я	Р	Я	Я	Р	Р	Я	ядр./рег.

ДНФ Квайна $=$ ДНФ $\sum$Т $=$ ДНФ $\sum$М $= K_2 \vee K_3 \vee K_4 \vee K_5$

II. Построить все тупиковые ДНФ для ФАЛ, заданной столбцом значений

Задача 3.6. (1, 4, 7):

1) $\tilde{\alpha}_f = (0111\,1100)$ — цепная ФАЛ длины 4 от БП x_1, x_2, x_3;

Карта Карно ФАЛ f:

	0	0	1	1	x_2
x_1	0	1	1	0	x_3
0	0	1 α_3	1 α_4	1 α_5	
1	1 α_1	1 α_2	0	0	

$\{\alpha_1, \alpha_2\} = N_{K_1}$, $K_1 = x_1 \bar{x}_2$;

$\{\alpha_2, \alpha_3\} = N_{K_2}$, $K_2 = \bar{x}_2 x_3$;

$\{\alpha_3, \alpha_4\} = N_{K_3}$, $K_2 = \bar{x}_1 x_3$;

$\{\alpha_4, \alpha_5\} = N_{K_4}$, $K_4 = \bar{x}_1 x_2$.

Таблица Квайна:

	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5		
N_{K_1}	1	1				Я	y_1
N_{K_2}		1	1				y_2
N_{K_3}			1	1			y_3
N_{K_4}				1	1	Я	y_4
	Я	Р		Р	Я	Я/Р	

КНФ ФАЛ покрытия редуцированной таблицы Квайна:

$\hat{F}(y_2, y_3) = y_2 \vee y_3$.

Тупиковые ДНФ:

$\mathfrak{A}_1 = K_1 \vee K_2 \vee K_4$,

$\mathfrak{A}_2 = K_1 \vee K_3 \vee K_4$,

обе являются минимальными и кратчайшими.

4) $\tilde{\alpha}_f = (1111\,1000\,0100\,1100)$

Карта Карно ФАЛ f:

$x_1\ x_2$	0 0	0 1	1 1	1 0	x_3 x_4
0 0	1 α_1	1 α_2	1 α_3	1 α_4	
0 1	1 α_5	0	0	0	
1 1	1 α_6	1 α_7	0	0	
1 0	0	1 α_8	0	0	

$\{\alpha_1, \dots, \alpha_4\} = N_{K_1},\ K_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2;$

$\{\alpha_1, \alpha_5\} = N_{K_2},\ K_2 = x_2\bar{x}_3\bar{x}_4;$

$\{\alpha_5, \alpha_6\} = N_{K_3},\ K_3 = x_2\bar{x}_3\bar{x}_4;$

$\{\alpha_6, \alpha_7\} = N_{K_4},\ K_4 = x_1x_2\bar{x}_3;$

$\{\alpha_7, \alpha_8\} = N_{K_5},\ K_5 = x_1\bar{x}_3x_4;$

$\{\alpha_8, \alpha_2\} = N_{K_6},\ K_6 = \bar{x}_2\bar{x}_3x_4.$

Замечание: Эта ФАЛ совпадает с ФАЛ из *Задачи 3.3* (2) из семинара 2 и с “геометрической” точки зрения ее сокращенная ДНФ - квадрат, две соседние точки которого соединены цепочкой из 5 ребер:

$f = \bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4 = K_1 \vee \dots \vee K_6.$

Таблица Квайна:

	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8		
N_{K_1}	1	1	1	1					Я	y_1
N_{K_2}	1				1					y_2
N_{K_3}					1	1				y_3
N_{K_4}						1	1			y_4
N_{K_5}							1	1		y_5
N_{K_6}		1						1		y_6
			Я	Я					Я/Р	

КНФ ФАЛ покрытия редуцированной таблицы Квайна:

$\hat{F}(y_2, \dots, y_6) = (y_2 \vee y_3) \cdot (y_3 \vee y_4) \cdot (y_4 \vee y_5) \cdot (y_5 \vee y_6) = (y_2y_4 \vee y_3) \cdot (y_5 \vee y_4y_6) = y_3y_5 \vee y_2y_4y_5 \vee y_3y_4y_5 \vee y_2y_4y_6$

тупиковые ДНФ:

$\mathfrak{A}_1 = K_1 \vee K_3 \vee K_5$ — кратчайшая и минимальная;

$\mathfrak{A}_2 = K_1 \vee K_2 \vee K_4 \vee K_5;$

$\mathfrak{A}_3 = K_1 \vee K_3 \vee K_4 \vee K_5;$

$\mathfrak{A}_4 = K_1 \vee K_2 \vee K_4 \vee K_6.$

7) $\tilde{\alpha}_f = (0001\,0111\,1010\,1110)$

Карта Карно ФАЛ f:

$x_1\ x_2$	0 0	0 1	1 1	1 0	x_3 x_4
0 0	0	0	1 α_9	0	
0 1	0	1 α_7	1 α_6	1 α_5	
1 1	1 α_3	1 α_8	0	1 α_1	
1 0	1 α_4	0	0	1 α_2	

$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_4\} = N_{K_1}$, $K_1 = x_1\bar{x}_4$;

$\{\alpha_1, \alpha_5\} = N_{K_2}$, $K_2 = x_2x_3\bar{x}_4$;

$\{\alpha_5, \alpha_6\} = N_{K_3}$, $K_3 = \bar{x}_1x_2x_3$;

$\{\alpha_6, \alpha_7\} = N_{K_4}$, $K_4 = \bar{x}_1x_2x_4$;

$\{\alpha_7, \alpha_8\} = N_{K_5}$, $K_5 = x_2\bar{x}_3x_4$;

$\{\alpha_3, \alpha_8\} = N_{K_6}$, $K_6 = x_1x_2\bar{x}_3$;

$\{\alpha_6, \alpha_9\} = N_{K_7}$, $K_7 = \bar{x}_1x_3x_4$.

Таблица Квайна:

	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_7	α_8	α_6	α_9		
N_{K_1}	1	1	1	1						Я	y_1
N_{K_2}					1						y_2
N_{K_3}					1			1			y_3
N_{K_4}						1		1			y_4
N_{K_5}						1	1				y_5
N_{K_6}			1				1				y_6
N_{K_7}								1	1	Я	y_7
	Р	Я	Р	Я				Р	Я	Я/Р	

КНФ ФАЛ покрытия редуцированной таблицы Квайна:

$\hat{F}(y_2, \ldots, y_6) = (y_2 \vee y_3) \cdot (y_4 \vee y_5) \cdot (y_5 \vee y_6) = (y_2 \vee y_3) \cdot (y_5 \vee y_4y_6) = y_2y_5 \vee y_3y_5 \vee y_2y_4y_6 \vee y_3y_4y_6$

тупиковые ДНФ:

$\mathfrak{A}_1 = K_1 \vee K_2 \vee K_5 \vee K_7$;

$\mathfrak{A}_2 = K_1 \vee K_3 \vee K_5 \vee K_7$ — кратчайшие и минимальные;

$\mathfrak{A}_3 = K_1 \vee K_2 \vee K_4 \vee K_5 \vee K_7$;

$\mathfrak{A}_4 = K_1 \vee K_3 \vee K_4 \vee K_6 \vee K_7$.