Решение задач семинара є 3 по курсу “Основы кибернетики” для 3-го потока 3-го курса факультета ВМК МГУ. Тема: “Эквивалентные преобразования формул”

Теоретический материал [1: с. 146-148, 156-161], [2: с. 19].
В классе. Из [2]: 3.1 (1), 3.3 (1, 4), 3.8 (1-3), 3.9 (1).
На дом. Из [2]: 3.1 (2), 3.3 (3, 6), 3.8 (5-9), 3.9 (2).

3.1 (1). Используя только тождество ассоциативности конъюнкции

$$t_{\&}^{\mathrm{A}} : \; x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3,$$

вывести тождество $(x_1 \cdot x_2) \cdot (x_3 \cdot x_4) = ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \cdot x_4$.

Решение. Выполнив подстановку в тождество $t_{\&}^{\mathrm{A}}$, представляющую собой замену переменной x_1 на подформулу $x_1 \cdot x_2$, переменной x_2 — на подформулу x_3, а переменной x_3 — на подформулу x_4 (в дальнейшем вид конкретных подстановок уточняться не будет), однократным эквивалентным преобразованием на основе тождества $t_{\&}^{\mathrm{A}}$ получим требуемое:

$$(x_1 \cdot x_2) \cdot (x_3 \cdot x_4) \overset{t_{\&}^{\mathrm{A}}}{\mapsto} ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \cdot x_4.$$

3.3 (1). С помощью расширенной системы тождеств $\tilde{\tau}^{\text{осн}}$ преобразовать в совершенную дизъюнктивную нормальную форму от переменных x, y, z или в формулу $x\&\bar{x}$ формулу $x\bar{y}$.

Решение. $x\bar{y} \overset{t_{1,\&}^{\Pi\mathrm{K}}}{\mapsto} x\bar{y} \cdot (z \vee \bar{z}) \overset{t_{\&,\vee}^{\mathrm{D}}}{\mapsto} x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z}$.

3.3 (4). С помощью расширенной системы тождеств $\tilde{\tau}^{\text{осн}}$ преобразовать в совершенную дизъюнктивную нормальную форму от переменных x, y, z или в формулу $x\&\bar{x}$ формулу $\overline{(xy \vee \bar{y}z \vee \bar{x} \vee \bar{z})}$.

Решение. $\overline{(xy \vee \bar{y}z \vee \bar{x} \vee \bar{z})} \overset{t_{\vee}^{\mathrm{A}}}{\mapsto} \overline{(xy \vee \bar{y}z) \vee (\bar{x} \vee \bar{z})} \overset{t_{\vee}^{\mathrm{M}}}{\mapsto} \overline{(xy \vee \bar{y}z)}\&\overline{(\bar{x} \vee \bar{z})} \overset{t_{\vee}^{\mathrm{M}}}{\rightrightarrows}$

$\overset{t_{\vee}^{\mathrm{M}}}{\rightrightarrows} (\overline{(xy)}\&\overline{(\bar{y}z)})\&(\bar{\bar{x}}\&\bar{\bar{z}}) \overset{t_{\&}^{\mathrm{M}}, t_{\neg}^{\mathrm{M}}}{\rightrightarrows} (\bar{x} \vee \bar{y})\&(y \vee \bar{z})\&(xz) \overset{t_{\&}^{\mathrm{A}}, t_{\&}^{\mathrm{K}}, t_{\&,\vee}^{\mathrm{D}}}{\rightrightarrows} (\bar{x} \vee \bar{y})\&(yxz \vee \bar{z}xz) \overset{t_{\&}^{\mathrm{A}}, t_{\&,\vee}^{\mathrm{D}}, t_{\&}^{\mathrm{K}}}{\rightrightarrows}$

$\overset{t_{\&}^{\mathrm{A}}, t_{\&}^{\mathrm{K}}, t_{\&,\vee}^{\mathrm{D}}}{\rightrightarrows} (\bar{x} \vee \bar{y})\&(y(xz) \vee \bar{z}(xz)) \overset{t_{\&}^{\mathrm{A}}, t_{\&}^{\mathrm{K}}}{\rightrightarrows} (\bar{x} \vee \bar{y})\&(xyz \vee x(z\bar{z})) \overset{t_{0,\&}^{\Pi\mathrm{K}}}{\mapsto} (\bar{x} \vee \bar{y})\&(xyz \vee z\bar{z}) \overset{t_{0,\vee}^{\Pi\mathrm{K}}}{\mapsto}$

$\overset{t_{0,\vee}^{\Pi\mathrm{K}}}{\mapsto} (\bar{x} \vee \bar{y})\&(xyz) \overset{t_{\&}^{\mathrm{K}}, t_{\&,\vee}^{\mathrm{D}}}{\rightrightarrows} \bar{x}(xyz) \vee \bar{y}(xyz) \overset{t_{\&}^{\mathrm{A}}, t_{\&}^{\mathrm{K}}}{\rightrightarrows} (yz)(x\bar{x}) \vee (xz)(y\bar{y}) \overset{t_{0,\&}^{\Pi\mathrm{K}}}{\rightrightarrows} (x\bar{x}) \vee (y\bar{y}) \overset{t_{0,\vee}^{\Pi\mathrm{K}}}{\mapsto} x\bar{x}.$

3.8 (1). Построить эквивалентное преобразование при помощи расширенной системы тождеств $\tilde{\tau}^{\text{осн}}$ для формул F_1 и F_2, где

$$F_1 = x \vee yz \vee \bar{y}\bar{z},$$

$$F_2 = \overline{(x \vee y \vee z) \cdot (\overline{x \vee y} \vee \overline{x \vee z})}.$$

Решение. Выведем сначала из системы тождеств $\tilde{\tau}^{\text{осн}}$ вспомогательное тождество

$$t^* :\; x_1 \vee \bar{x}_1 x_2 = x_1 \vee x_2$$

(оно понадобится не только в этой задаче).

$$x_1 \vee \bar{x}_1 x_2 \overset{t^{\text{ПК}}_{1,\&}}{\mapsto} x_1(x_2 \vee \bar{x}_2) \vee \bar{x}_1 x_2 \overset{t^{\text{D}}_{\&,\vee}}{\mapsto} (x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2) \vee \bar{x}_1 x_2 \overset{t^{\text{ОП}}_{\vee}}{\mapsto}$$

$$\mapsto ((x_1 x_2 \vee x_1 x_2) \vee x_1 \bar{x}_2) \vee \bar{x}_1 x_2 \overset{t^{\text{A}}_{\vee}, t^{\text{K}}_{\vee}}{\rightrightarrows} (x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2) \vee (x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_2) \overset{t^{\text{K}}_{\&}, t^{\text{D}}_{\&,\vee}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows x_1(x_2 \vee \bar{x}_2) \vee x_2(x_1 \vee \bar{x}_1) \overset{t^{\text{ПК}}_{1,\&}}{\rightrightarrows} x_1 \vee x_2,$$

что и требовалось. Теперь преобразуем F_2 к F_1.

$$F_2 = \overline{(x \vee y \vee z) \cdot (\overline{x \vee y} \vee \overline{x \vee z})} \overset{t^{\text{M}}_{\&}}{\mapsto} \overline{(x \vee y \vee z)} \vee \overline{(\overline{x \vee y} \vee \overline{x \vee z})} \overset{t^{\text{M}}_{\vee}, t^{\text{M}}_{\neg}}{\rightrightarrows}$$

$$\overset{t^{\text{M}}_{\vee}, t^{\text{M}}_{\neg}}{\rightrightarrows} \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee (x \vee y)\&(x \vee z) \overset{t^{\text{K}}_{\&}, t^{\text{D}}_{\&,\vee}}{\rightrightarrows} \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee (xx \vee yx \vee xz \vee yz) \overset{t^{\text{ОП}}_{\&}, t^{\text{K}}_{\&}, t^{\text{A}}_{\&}, t^{\text{D}}_{\&,\vee}, t^{\text{A}}_{\vee}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee ((x \vee x(y \vee z)) \vee yz) \overset{t^{\text{П}}}{\mapsto} \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee (x \vee yz) \overset{t^{\text{K}}_{\vee}, t^{\text{A}}_{\vee}, t^{\text{A}}_{\&}}{\rightrightarrows} (x \vee \bar{x}(\bar{y}\bar{z})) \vee yz \overset{t^*}{\mapsto}$$

$$\mapsto (x \vee \bar{y}\bar{z}) \vee yz \overset{t^{\text{K}}_{\vee}, t^{\text{A}}_{\vee}}{\rightrightarrows} x \vee yz \vee \bar{y}\bar{z} = F_1.$$

Эквивалентное преобразование построено.

3.8 (2). Построить эквивалентное преобразование при помощи расширенной системы тождеств $\tilde{\tau}^{\text{осн}}$ для формул F_1 и F_2, где

$$F_1 = \overline{(xy \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y)} \vee \bar{x} \cdot (y \vee z \vee (x \vee \bar{z})y),$$

$$F_2 = (\bar{x} \vee \bar{y})(z \vee x) \vee \overline{(\bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{z}) \vee x\bar{y}\bar{z}} \cdot (\bar{x} \vee \bar{y}).$$

Решение. Преобразуем F_1.

$$F_1 = \overline{(xy \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y)} \vee \bar{x} \cdot (y \vee z \vee (x \vee \bar{z})y) \overset{t^{\text{M}}_{\&}, t^{\text{K}}_{\&}, t^{\text{A}}_{\vee}, t^{\text{K}}_{\vee}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows \overline{(xy \vee \bar{z})} \vee \overline{(\bar{x} \vee y)} \vee \bar{x} \cdot ((y \vee y(x \vee \bar{z})) \vee z) \overset{t^{\text{M}}_{\vee}, t^{\text{П}}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows (\overline{(xy)}\&\bar{\bar{z}}) \vee (\bar{\bar{x}}\&\bar{y}) \vee \bar{x} \cdot (y \vee z) \overset{t^{\text{M}}_{\&}, t^{\text{M}}_{\neg}, t^{\text{D}}_{\&,\vee}}{\rightrightarrows} ((\bar{x} \vee \bar{y})\&z) \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y \vee \bar{x}z \overset{t^{\text{K}}_{\&}, t^{\text{D}}_{\&,\vee}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows (\bar{x}z \vee \bar{y}z) \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y \vee \bar{x}z \overset{t^{\text{K}}_{\vee}, t^{\text{A}}_{\vee}}{\rightrightarrows} (\bar{x}z \vee \bar{x}z) \vee \bar{y}z \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y \overset{t^{\text{ОП}}_{\vee}}{\mapsto} \bar{x}z \vee \bar{y}z \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y.$$

Преобразуем F_2.

$$F_2 = (\bar{x} \vee \bar{y})(z \vee x) \vee \overline{(\bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{z}) \vee x\bar{y}\bar{z}} \cdot (\bar{x} \vee \bar{y}) \overset{t^{\text{M}}_{\vee}, t^{\text{K}}_{\&}, t^{\text{D}}_{\&,\vee}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows (\bar{x}z \vee \bar{y}z \vee \bar{x}x \vee \bar{y}x) \vee \overline{(\bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{z})} \cdot \overline{(x\bar{y}\bar{z})} \cdot (\bar{x} \vee \bar{y}) \overset{t^{\text{A}}_{\vee}, t^{\text{K}}_{\vee}, t^{\text{K}}_{\&}, t^{\text{M}}_{\&}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows ((\bar{x}z \vee \bar{y}z \vee x\bar{y}) \vee x\bar{x}) \vee (\overline{(\bar{y} \vee z)} \vee \overline{(\bar{x} \vee \bar{z})}) \cdot (\bar{x} \vee \bar{\bar{y}} \vee \bar{\bar{z}}) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y}) \overset{t^{\text{ПК}}_{0,\vee}, t^{\text{M}}_{\vee}, t^{\text{M}}_{\neg}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows (\bar{x}z \vee \bar{y}z \vee x\bar{y}) \vee (\bar{\bar{y}}\bar{z} \vee \bar{\bar{x}}\bar{\bar{z}}) \cdot (\bar{x} \vee y \vee z) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y}) \overset{t_{\neg}^{M}, t_{\&}^{A}, t_{\vee}^{A}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows (\bar{x}z \vee \bar{y}z \vee x\bar{y}) \vee (y\bar{z} \vee xz) \cdot ((\bar{x} \vee (y \vee z)) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y})) \overset{t_{\vee,\&}^{D}}{\mapsto}$$

$$\mapsto (\bar{x}z \vee \bar{y}z \vee x\bar{y}) \vee (y\bar{z} \vee xz) \cdot (\bar{x} \vee (y \vee z) \cdot \bar{y}) \overset{t_{\&}^{K}, t_{\&,\vee}^{D}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows (\bar{x}z \vee \bar{y}z \vee x\bar{y}) \vee (y\bar{z} \vee xz) \cdot (\bar{x} \vee (y\bar{y} \vee \bar{y}z)) \overset{t_{\vee}^{K}, t_{0,\vee}^{\text{ПК}}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows (\bar{x}z \vee \bar{y}z \vee x\bar{y}) \vee (y\bar{z} \vee xz) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y}z) \overset{t_{\&}^{K}, t_{\&,\vee}^{\mathrm{D}}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows (\bar{x}z \vee \bar{y}z \vee x\bar{y}) \vee (y\bar{z}\bar{x} \vee xz\bar{x} \vee y\bar{z}\bar{y}z \vee xz\bar{y}z) \overset{t_{\&}^{\mathrm{K}}, t_{\&}^{\mathrm{A}}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows (\bar{x}z \vee \bar{y}z \vee x\bar{y}) \vee (\bar{x}y\bar{z} \vee z(x\bar{x}) \vee (y\bar{y})(z\bar{z}) \vee x\bar{y}(zz)) \overset{t_{0,\&}^{\text{ПК}}, t_{\&}^{\text{ОП}}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows (\bar{x}z \vee \bar{y}z \vee x\bar{y}) \vee (\bar{x}y\bar{z} \vee (x\bar{x}) \vee (z\bar{z}) \vee x\bar{y}z) \overset{t_{\vee}^{\mathrm{K}}, t_{\vee}^{\mathrm{A}}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows (\bar{x}z \vee \bar{y}z \vee x\bar{y}) \vee (((\bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z) \vee (x\bar{x})) \vee (z\bar{z})) \overset{t_{0,\vee}^{\text{ПК}}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows (\bar{x}z \vee \bar{y}z \vee x\bar{y}) \vee (\bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z) \overset{t_{\vee}^{\mathrm{K}}, t_{\vee}^{\mathrm{A}}}{\rightrightarrows} (\bar{x}z \vee \bar{x}y\bar{z}) \vee \bar{y}z \vee (x\bar{y} \vee (x\bar{y})z) \overset{t_{\&,\vee}^{\mathrm{D}}, t^{\text{П}}, t_{\vee}^{\mathrm{K}}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows \bar{x}(z \vee \bar{z}y) \vee \bar{y}z \vee x\bar{y} \overset{t^{*}}{\mapsto} \bar{x}(z \vee y) \vee \bar{y}z \vee x\bar{y} \overset{t_{\&,\vee}^{\mathrm{D}}}{\mapsto} (\bar{x}z \vee \bar{x}y) \vee \bar{y}z \vee x\bar{y} \overset{t_{\vee}^{\mathrm{K}}, t_{\vee}^{\mathrm{A}}}{\rightrightarrows} \bar{x}z \vee \bar{y}z \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y.$$

Таким образом, F_1 и F_2 эквивалентными преобразованиями приведены к одному и тому же виду, что и доказывает эквивалентность этих формул.

3.8 (3). Построить эквивалентное преобразование при помощи расширенной системы тождеств $\tilde{\tau}^{\text{осн}}$ для формул F_1 и F_2, где

$$F_1 = \overline{(x \vee \bar{y}) \vee ((x \vee \bar{y} \vee z) \cdot \overline{(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})})}, \quad F_2 = \overline{(\bar{y} \vee x \vee z)} \vee \bar{x}y.$$

Решение. Преобразуем F_1.

$$F_1 = \overline{(x \vee \bar{y}) \vee ((x \vee \bar{y} \vee z) \cdot \overline{(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})})} \overset{t_{\vee}^{\mathrm{M}}}{\rightrightarrows} \overline{(x \vee \bar{y})} \cdot \overline{((x \vee \bar{y} \vee z) \cdot \overline{(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})})} \overset{t_{\vee}^{\mathrm{M}}, t_{\&}^{\mathrm{M}}, t_{\neg}^{\mathrm{M}}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows (\bar{x}y) \cdot (\overline{(x \vee \bar{y} \vee z)} \vee (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})) \overset{t_{\vee}^{\mathrm{M}}, t_{\neg}^{\mathrm{M}}}{\rightrightarrows} (\bar{x}y) \cdot (\bar{x}y\bar{z} \vee (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})) \overset{t_{\vee}^{\mathrm{K}}, t_{\vee}^{\mathrm{A}}, t_{\&}^{\mathrm{A}}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows (\bar{x}y) \cdot ((\bar{x} \vee \bar{x}(y\bar{z})) \vee y \vee \bar{z}) \overset{t^{\text{П}}}{\mapsto} (\bar{x}y) \cdot (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \overset{t_{\&,\vee}^{\mathrm{D}}}{\rightrightarrows} (\bar{x}y)\bar{x} \vee (\bar{x}y)y \vee (\bar{x}y)\bar{z} \overset{t_{\&}^{\mathrm{K}}, t_{\&}^{\mathrm{A}}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows (\bar{x}\bar{x})y \vee \bar{x}(yy) \vee \bar{x}y\bar{z} \overset{t_{\&}^{\text{ОП}}}{\rightrightarrows} ((\bar{x}y) \vee (\bar{x}y)) \vee \bar{x}y\bar{z} \overset{t_{\vee}^{\text{ОП}}}{\mapsto} \bar{x}y \vee (\bar{x}y)\bar{z} \overset{t^{\text{П}}}{\mapsto} \bar{x}y.$$

Преобразуем F_2.

$$F_2 = \overline{(\bar{y} \vee x \vee z)} \vee \bar{x}y \overset{t_{\vee}^{\mathrm{M}}, t_{\neg}^{\mathrm{M}}}{\rightrightarrows} y\bar{x}\bar{z} \vee \bar{x}y \overset{t_{\vee}^{\mathrm{K}}, t_{\&}^{\mathrm{K}}, t_{\&}^{\mathrm{A}}}{\rightrightarrows} (\bar{x}y) \vee (\bar{x}y)\bar{z} \overset{t^{\text{П}}}{\mapsto} \bar{x}y.$$

Таким образом, F_1 и F_2 эквивалентными преобразованиями приведены к одному и тому же виду, что и доказывает эквивалентность этих формул.

3.9 (1). Построить конечную полную систему тождеств для класса формул над базисом B, если $B = \{xy, x \oplus y, 1\}$.

Решение. Конечно, можно было бы воспользоваться теоремой 5.2 (теоремой перехода), изложенной на страницах 47–48 части 2 методических материалов по курсу «Основы кибкрнетики». Однако, мы предложим более короткое, хотя и более специальное решение данной задачи. Монотонной конъюнкцией называется формула, имеющая либо вид константы 1, либо вид элементарной конъюнкции булевых переменных. Полиномом Жегалкина называется формула над базисом B, имеющая либо вид $1 \oplus 1$, либо вид суммы по модулю 2 попарно неэквивалентных монотонных конъюнкций. Напомним, что у каждой булевой функции имеется, и притом ровно один (с точностью до порядка слагаемых и множителей в слагаемых) реализующий ее полином Жегалкина. Это позволяет считать полиномы Жегалкина каноническим видом в эквивалентных преобразованиях формул над базисом B, и строить полную систему тождеств, исходя из возможности использования тождеств на том или ином этапе приведения формул к каноническому виду. Опишем эти этапы для произвольной формулы над базисом B.

Этап 1. Раскрытие скобок (приведение формулы к виду суммы по модулю 2 конъюнкций переменных и констант 1). На этом этапе понадобятся такие тождества:

$$t^{\text{D}}_{\&,\oplus}: \; x_1 \cdot (x_2 \oplus x_3) = x_1x_2 \oplus x_1x_3, \quad t^{\text{K}}_{\&}: \; x_1x_2 = x_2x_1$$

(второе тождество нужно для получения дистрибутивности, связанной с умножением справа суммы на переменную; в дальнейшем, если тождество содержится в системе $\tilde{\tau}^{\text{осн}}$, то мы будем упоминать лишь его название).

Этап 2. Приведение слагаемых к виду монотонных конъюнкций. На этом этапе понадобятся такие тождества:

$$t^{\text{K}}_{\&}, \; t^{\text{A}}_{\&}, \; t^{\text{ОП}}_{\&}, \; \hat{t}^{\text{ПК}}_{1,\&}: \; x_1 \cdot 1 = x_1.$$

Этап 3. Приведение суммы слагаемых к виду полинома Жегалкина. На этом этапе понадобятся такие тождества:

$$t^{\text{K}}_{\oplus}: \; x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1, \; t^{\text{A}}_{\oplus}: x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3,$$

$$t^{\text{ОП}}_{\oplus}: \; x_1 \oplus x_1 = 1 \oplus 1, \; t^{\text{ПК}}_{0,\oplus}: \; x_1 \oplus (1 \oplus 1) = x_1.$$

Из приведенных построений с очевидностью следует, что система тождеств $\tau_B = \{t^{\text{D}}_{\&,\oplus}, \; t^{\text{K}}_{\&}, \; t^{\text{A}}_{\&}, \; t^{\text{ОП}}_{\&}, \; \hat{t}^{\text{ПК}}_{1,\&}, \; t^{\text{K}}_{\oplus}, \; t^{\text{A}}_{\oplus}, \; t^{\text{ОП}}_{\oplus}, \; t^{\text{ПК}}_{0,\oplus}\}$ и является искомой конечной полной системой тождеств для формул над базисом B.

Литература

1. Ложкин С.А. Лекции по основам кибернетики. — М.: МГУ, 2004. (Электронные версии лекций последних лет можно найти по адресу: `http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_(3-й_поток)`)

2. Алексеев В.Б., Вороненко А.А., Ложкин С.А., Романов Д.С., Сапоженко А.А., Селезнева С.Н. Задачи по курсу «Основы кибернетики». — М.: МГУ, 2011.