Решение задач семинара № 7 по курсу “Основы кибернетики” для групп 3-го потока 3-го курса факультета ВМК МГУ. Тема: “Тесты для таблиц, тесты для контактных схем”

На этом занятии речь пойдет о построении тестов для таблиц и контактных схем (КС). Напомним теоретический материал в соответствии с частью 4 методической разработки по курсу «Основы кибернетики».

Для управляющей системы (схемы) без памяти, функционирование которой описывается дискретной функцией или, в общем случае, вектор-функцией, может быть сформулирована следующая модель, в рамках которой обычно рассматриваются вопросы ее надежности и контроля. Предполагается, что имеется некоторый «внешний» источник неисправностей (источник помех) U, под действием которого рассматриваемая схема Σ может переходить в одно из своих «неисправных состояний» (схем), определяемых этим источником. Пусть схеме $\Sigma = \Sigma_1$, реализующей функцию $f = f_1$ от входных переменных $X(n) = (x_1, ..., x_n)$, и источнику неисправностей U соответствуют «неисправные» состояния (схемы) $\Sigma_2, ..., \Sigma_s$, где схема Σ_i, $i = 2, ..., s$, реализует функцию f_i от переменных $X(n)$. При этом все состояния (как исправное $\Sigma = \Sigma_1$, так и неисправные $\Sigma_2, ..., \Sigma_s$) разбиваются на классы (функционально) неотличимых состояний, то есть классы эквивалентности по отношению равенства реализуемых функций, и рассматриваются далее с точностью до неотличимости. В дальнейшем, говоря о ненадежной схеме Σ, будем иметь в виду пару (Σ, U) и (или) соответствующее ей множество схем вместе с теми функциями, которые они реализуют. Для простоты рассмотрения будем считать, что все переменные и функции являются булевскими, хотя многие излагаемые далее результаты без существенных изменений переносятся на случай многозначных функций, случай вектор-функций и другие более общие случаи.

Пусть (Σ, U) — указанная выше модель ненадежной схемы Σ с возможными состояниями $\Sigma = \Sigma_1, \Sigma_2, ..., \Sigma_s$, в которых реализуются БФ $f = f_1, f_2, ..., f_s$ соответственно от БП $X(n)$, определенные на множестве наборов $A = \{\alpha_1, ..., \alpha_p\} \subseteq B^n$. Рассмотрим матрицу M, $M \in B^{p,s}$, где

$$M\langle i, j\rangle = f_j(\alpha_i),$$

считая, что i-й строке (j-му столбцу) этой таблицы соответствует набор α_i (соответственно функция f_j и состояние Σ_j). Матрица, состоящая из различных столбцов (строк) называется отделимой по столбцам (соответственно строкам) матрицей. Заметим, что каждому классу неотличимых состояний модели (Σ, U) соответствует группа одинаковых столбцов матрицы M, и рассмотрим отделимую по столбцам матрицу $\hat{M}$, состоящую из всех различных столбцов матрицы M. При этом будем считать, что каждый столбец матрицы $\hat{M}$ связан с соответствующим классом неотличимости состояний модели (Σ, U), и будем называть $\hat{M}$ таблицей контроля (таблицей неисправностей) данной модели. Для простоты будем, как правило, предполагать, что все состояния модели (Σ, U) попарно отличимы, то есть, $M = \hat{M}$. Это предположение, очевидно, не ограничивает общности рассуждений.

Пусть, далее, помимо таблицы контроля M для модели (Σ, U) задана цель контроля, то есть указано множество $\mathcal{N}$, состоящее из тех неупорядоченных пар различных целых чисел отрезка $[1, s]$, для которых пары состояний (столбцов матрицы M) с соответствующими номерами необходимо отличать друг от друга, сравнивая значения, расположенные в тех или иных строках данной пары столбцов. В частности, если $\mathcal{N}$ состоит из всех пар указанного вида, то целью контроля является диагностика схемы, а если $\mathcal{N} = \{(1,2), ..., (1,s)\}$, то — проверка исправности схемы. Множество строк матрицы M с номерами из T, $T \subseteq [1,p]$, называется тестом для матрицы M относительно множества $\mathcal{N}$, или, иначе, тестом для $(M, \mathcal{N})$, если для любой пары (i,j) из $\mathcal{N}$ существует t, $t \in T$, такое, что $M\langle t,i\rangle \neq M\langle t,j\rangle$. Мощность теста называется также его длиной.

Заметим, что множество, состоящее из всех строк таблицы контроля, всегда образует тест. Тест, который перестает быть тестом при удалении любой своей строки, называется тупиковым, а тест, который имеет минимальную мощность, — минимальным. В том случае, когда целью контроля является диагностика схемы (проверка исправности схемы), тест называется диагностическим (соответственно проверяющим).

Будем говорить, что множество наборов τ, $\tau \subseteq A$, образует тест для модели (Σ, U) относительно цели контроля $\mathcal{N}$, или, иначе, тест для $(\Sigma, U, \mathcal{N})$, если соответствующие наборам из τ строки матрицы M образуют тест для $(M, \mathcal{N})$. Все введенные выше понятия, которые касаются тестов для таблиц, без изменений переносятся на случай тестов для ненадежных схем. Отметим, что, если источник неисправностей U допускает поломку не более одиного элемента (контакта) схемы S, то тест для модели (Σ, U) называется единичным; если же источник неисправностей U допускает поломку любого числа элементов (контактов) схемы S, то тест для модели (Σ, U) называется полным.

Для описания тестов можно ввести функцию, аналогичную функции покрытия. Пусть M, $M \in B^{p,s}$, — отделимая по столбцам матрица, а $\mathcal{N}$ — связанная с ней цель контроля. Сопоставим i-й строке, $i \in [1,p]$, матрицы M булеву переменную y_i, а каждому набору $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_p)$, $\beta \in B^p$, значений этих переменных $y = (y_1, ..., y_p)$ — множество строк матрицы M с номерами из множества $I = I(\beta) \subseteq [1,p]$, где $i \in I(\beta)$ тогда и только тогда, когда $\beta_i = 1$. Рассмотрим БФ $F(y)$, для которой $F(\beta) = 1$ тогда и только тогда, когда система строк матрицы M с номерами из $I(\beta)$ образует тест для $(M, \mathcal{N})$, и будем называть эту БФ функцией теста для $(M, \mathcal{N})$. Сопоставим паре $(M, \mathcal{N})$ матрицу $\mathcal{M}$ из множества $B^{p,S}$, $S = |\mathcal{N}|$, столбцы которой пронумерованы пáрами из $\mathcal{N}$, а ее столбец с номером $(i,j) \in \mathcal{N}$ получается в результате поразрядного сложения по модулю 2 столбцов с номерами i и j матрицы M. Заметим, что строки матрицы M с номерами из множества T, $T \subseteq [1,p]$, образуют тест (тупиковый тест, минимальный тест) для пары $(M, \mathcal{N})$ тогда и только тогда, когда строки матрицы M с номерами из T образуют покрытие (тупиковое покрытие, покрытие минимальной длины) матрицы $\mathcal{M}$. Отсюда вытекает, в частности, что БФ теста F для пары $(M, \mathcal{N})$ является одновременно БФ покрытия для матрицы $\mathcal{M}$ и обратно, а значит для нее, в силу леммы 6.1 главы 1, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Функция теста $F(y_1, \ldots, y_p)$ для отделимой по столбцам матрицы M, $M \in B^{p,s}$, и цели контроля $\mathcal{N}$ может быть задана с помощью КНФ*

$$F(y_1, \ldots, y_p) = \bigwedge_{(i,j) \in \mathcal{N}} \Bigg(\bigvee_{\substack{1 \leqslant t \leqslant p \\ M<t,i> \neq M<t,j>}} y_t \Bigg). \tag{1}$$

Следствие. *Каждая элементарная конъюнкция вида $y_{t_1} \cdots y_{t_r}$ сокращенной ДНФ функции $F(y_1, \ldots, y_p)$, получающаяся из КНФ (1) в результате раскрытия скобок и приведения подобных, соответствует тупиковому тесту, связанному с множеством $T = \{t_1, \ldots, t_r\}$, и обратно.*

На данной лемме основан следующий алгоритм построения всех тупиковых тестов для матрицы M относительно цели контроля $\mathcal{N}$:

1) выписываем для функции теста КНФ вида (1);

2) раскрывая в ней скобки и приводя подобные, получаем сокращенную ДНФ функции теста;

3) сопоставляем каждой элементарной конъюнкции этой сокращенной ДНФ тупиковый тест.

Лемма 1.2. *Длина любого тупикового диагностического теста для отделимой по столбцам матрицы из множества $B^{p,s}$ заключена в пределах от $\lceil \log s \rceil$ до $(s-1)$.*

5.1(1) Построить все тупиковые диагностические тесты для таблицы (матрицы)

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Цель контроля $\mathcal{N}$ для задачи диагностики матрицы M имеет вид $\mathcal{N} = \mathcal{N}^{\text{Д}} = \{(i,j) \mid 1 \le i < j \le 4\}$. Сопоставим каждой строке матрицы M свою переменную

$$M = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \end{array}$$

и построим матрицу $\mathcal{M} = \mathcal{M}(M, \mathcal{N}^{\text{Д}})$ для пары $(M, \mathcal{N})$, состоящую из покоординатных сумм (по модулю 2) пар столбцов, входящих в $\mathcal{N}$:

$$\mathcal{M} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \end{array}$$

Построим КНФ функции диагностического теста матрицы M (или, что то же самое, КНФ функции покрытия матрицы $\mathcal{M}$) в соответствии с леммой 1.1:

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_1 \vee y_3)(y_1 \vee y_2 \vee y_3 \vee y_4)(y_2 \vee y_4)(y_2 \vee y_4)(y_1 \vee y_2 \vee y_3 \vee y_4)(y_1 \vee y_3).$$

Выполним упрощение этой КНФ (избавляясь от повторов эквивалентных множителей и осуществляя конъюнктивные поглощения на основании тождества $K'(K' \vee K'') = K'$):

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_1 \vee y_3)(y_2 \vee y_4).$$

Построим сокращенную ДНФ функции F по методу Нельсона, раскрыв скобки и приведя подобные (с учетом выполнения дизъюнктивных поглощений на основании тождества $K' \vee K'K'' = K'$):

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1y_2 \vee y_1y_4 \vee y_2y_3 \vee y_3y_4.$$

Каждое слагаемое построенной сокращенной ДНФ функции F задает свой тупиковый диагностический тест для таблицы M, при этом все такие тесты учтены (ни один не пропущен).

Ответ. Все тупиковые диагностические тесты для таблицы M соответствуют следующим множествам номеров строк матрицы M: $\{1,2\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{3,4\}$.

5.1(2) Построить все тупиковые диагностические тесты для таблицы (матрицы)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Цель контроля $\mathcal{N}$ для задачи диагностики матрицы M имеет вид $\mathcal{N} = \mathcal{N}^{\text{Д}} = \{(i,j) \mid 1 \le i < j \le 6\}$. Сопоставим каждой строке матрицы M свою переменную

$$\begin{array}{cc} M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix} \end{array}$$

и построим матрицу $\mathcal{M} = \mathcal{M}(M, \mathcal{N}^{\text{Д}})$ для пары $(M, \mathcal{N})$, состоящую из покоординатных сумм (по модулю 2) пар столбцов, входящих в $\mathcal{N}$:

$$\begin{array}{cc} \mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix} \end{array}$$

Построим КНФ функции диагностического теста матрицы M (или, что то же самое, КНФ функции покрытия матрицы $\mathcal{M}$) в соответствии с леммой 1.1, сразу избавляясь от повторов эквивалентных множителей:

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_2 \vee y_3)(y_2 \vee y_4)y_1(y_1 \vee y_2 \vee y_3)(y_1 \vee y_2 \vee y_4)(y_3 \vee y_4)(y_1 \vee y_3 \vee y_4).$$

Выполним упрощение этой КНФ (осуществляя конъюнктивные поглощения на основании тождества $K'(K' \vee K'') = K'$):

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1(y_2 \vee y_3)(y_2 \vee y_4)(y_3 \vee y_4).$$

Построим сокращенную ДНФ функции F по методу Нельсона, раскрыв скобки и приведя подобные (с учетом выполнения дизъюнктивных поглощений на основании тождества $K' \vee K'K'' = K'$):

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1y_2y_3 \vee y_1y_2y_4 \vee y_1y_3y_4.$$

Каждое слагаемое построенной сокращенной ДНФ функции F задает свой тупиковый диагностический тест для таблицы M, при этом все такие тесты учтены (ни один не пропущен).

Ответ. Все тупиковые диагностические тесты для таблицы M соответствуют следующим множествам номеров строк матрицы M: $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$.

5.1(3) Построить все тупиковые проверяющие тесты для таблицы (матрицы)

$$M = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1 \\ 0&0&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1&0&0 \\ 1&1&0&0&0&1&1&1&1&0&0&1&1&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для начала избавимся от повторов одинаковых столбцов в матрице M, построив отделимую по столбцам матрицу $\hat{M}$, состоящую из всех различных столбцов матрицы M, сопоставим каждой строке матрицы $\hat{M}$ свою переменную

$$\begin{array}{cc} \hat{M} = \begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1 \\ 0&1&1&1&0&0&1&1&1&1&0&0 \\ 1&0&0&1&1&1&1&0&0&1&1&0 \\ 1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_4' \end{matrix} \end{array}$$

(предварительно все строки были разбиты на классы эквивалентности так, что в один класс входили попарно равные или попарно противоположне строки, названия переменных для строк из одного класса отличаются лишь числом штрихов). Цель контроля $\mathcal{N}$ для задачи проверки матрицы $\hat{M}$ имеет вид

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}^{\Pi} = \{(1, j) \mid 2 \leq j \leq 12\}.$$

Построим матрицу $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'(\hat{M}, \mathcal{N}^{\Pi})$ для пары $(\hat{M}, \mathcal{N})$, состоящую из покоординатных сумм (по модулю 2) пар столбцов, входящих в $\mathcal{N}$, при этом из каждого класса эквивалентности строк беря по одной строке:

$$\begin{array}{cc} \mathcal{M}' = \begin{pmatrix} 0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&1&1&1&1&0&0 \\ 1&1&0&0&0&0&1&1&0&0&1 \\ 0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix} \end{array}$$

Построим КНФ функции покрытия матрицы $\mathcal{M}'$:

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_2 \vee y_3)(y_1 \vee y_2 \vee y_3)(y_1 \vee y_2)y_1(y_1 \vee y_4)(y_1 \vee y_2 \vee y_4)\&$$
$$\&(y_1 \vee y_2 \vee y_3 \vee y_4)(y_3 \vee y_4)(y_2 \vee y_3 \vee y_4)(y_2 \vee y_4)y_4(y_3 \vee y_4).$$

Выполним упрощение этой КНФ (осуществляя конъюнктивные поглощения на основании тождества $K'(K' \vee K'') = K'$):

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1 y_4 (y_2 \vee y_3).$$

Построим сокращенную ДНФ функции F по методу Нельсона, раскрыв скобки и приведя подобные (с учетом выполнения дизъюнктивных поглощений на основании тождества $K' \vee K'K'' = K'$):

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1 y_2 y_4 \vee y_1 y_3 y_4.$$

Каждое слагаемое построенной сокращенной ДНФ функции F задает свой тупиковый проверяющий тест для таблицы M. Чтобы охватить все тупиковые проверяющие тесты для таблицы M, следует в каждом построенном тесте осуществить всевозможные замены строк на строки из того же класса эквивалентности.

Ответ. Все тупиковые проверяющие тесты для таблицы M соответствуют следующим множествам номеров строк матрицы M: $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$.

6.2. Построить все тупиковые а) проверяющие, б) диагностические тесты для контактной схемы на рис. 1. и источника неисправностей, допускающего размыкание контактов вида $\bar{z}$, z, а также замыкание контакта вида y, причем общее число неисправных контактов не может быть больше 1.

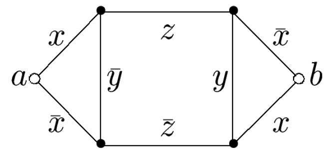

Рис. 1.

Решение. Вычислим таблицу контроля для заданных схемы и источника неисправностей (здесь $f_1 = f$ — функция, реализуемая исходной схемой в отсутствие неисправностей, $f_2 = f^{\text{р}}_{\bar{z}}$ — функция, реализуемая схемой при размыкании контакта $\bar{z}$, $f_3 = f^{\text{р}}_{z}$ — функция, реализуемая схемой при размыкании контакта z, $f_4 = f^{\text{з}}_{y}$ — функция, реализуемая схемой при замыкании контакта y):

x	y	z	$f_1 = f$	$f_2 = f^{\text{р}}_{\bar{z}}$	$f_3 = f^{\text{р}}_{z}$	$f_4 = f^{\text{з}}_{y}$	
0	0	0	0	0	0	1	y_1
0	0	1	1	1	0	1	y_2
0	1	0	1	0	1	1	y_3
0	1	1	0	0	0	0	y_4
1	0	0	1	0	1	1	y_3'
1	0	1	0	0	0	1	y_1'
1	1	0	0	0	0	0	y_4'
1	1	1	1	1	0	1	y_2'

Функциональную часть этой таблицы будем считать матрицей M. Каждой строке матрицы M сопоставлена своя переменная; предварительно все строки M (и соответствующие им входные наборы) были разбиты на классы эквивалентности так, что в один класс входили попарно равные или попарно противоположне строки, названия переменных для строк из одного класса отличаются лишь числом штрихов.

а) Цель контроля $\mathcal{N}$ для задачи проверки матрицы M имеет вид

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}^{\Pi} = \{(1, j) \mid 2 \le j \le 4\}.$$

Построим матрицу $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'(M, \mathcal{N}^{\Pi})$ для пары $(M, \mathcal{N}^{\Pi})$, состоящую из покоординатных сумм (по модулю 2) пар столбцов, входящих в $\mathcal{N}^{\Pi}$, при этом из каждого класса эквивалентности строк беря по одной строке (заметим: строки матрицы M, не содержащие неодинаковых элементов, можно было бы не включать в $\mathcal{M}'$):

$$\mathcal{M}' = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \end{array}$$

Построим КНФ функции покрытия матрицы $\mathcal{M}'$:

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1 y_2 y_3.$$

Ясно. что в правой части этого равенства находится сокращенная ДНФ функции F. Каждое слагаемое построенной сокращенной ДНФ функции F задает свой тупиковый проверяющий тест для таблицы M. Чтобы охватить все тупиковые проверяющие тесты для таблицы M, следует в каждом построенном тесте осуществить всевозможные замены входных наборов на входные наборы из того же класса эквивалентности. Все тупиковые проверяющие тесты: $\{(000),(001),(010)\}$, $\{(000),(001),(100)\}$, $\{(000),(111),(010)\}$, $\{(000),(111),(100)\}$, $\{(101),(001),(010)\}$, $\{(101),(001),(100)\}$, $\{(101),(111),(010)\}$, $\{(101),(111),(100)\}$.

б) Цель контроля $\mathcal{N}$ для задачи диагностики матрицы M имеет вид

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}^{\text{Д}} = \{(i,j) \mid 1 \le i < j \le 4\}.$$

Построим матрицу $\mathcal{M}'' = \mathcal{M}''(M, \mathcal{N}^{\text{Д}})$ для пары $(M, \mathcal{N}^{\text{Д}})$, состоящую из покоординатных сумм (по модулю 2) пар столбцов, входящих в $\mathcal{N}^{\text{Д}}$, при этом из каждого класса эквивалентности строк беря по одной строке (заметим: строки матрицы M, не содержащие неодинаковых элементов, можно было бы не включать в $\mathcal{M}''$):

$$\mathcal{M}'' = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \end{array}$$

Построим КНФ функции покрытия матрицы $\mathcal{M}''$:

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_3 y_2 y_1 (y_2 \vee y_3)(y_1 \vee y_3)(y_1 \vee y_2) = y_1 y_2 y_3.$$

Ясно. что в правой части этого равенства находится сокращенная ДНФ функции F. Каждое слагаемое построенной сокращенной ДНФ функции F задает свой тупиковый диагностический тест для таблицы M. Чтобы охватить все тупиковые диагностические тесты для таблицы M, следует в каждом построенном тесте осуществить всевозможные замены входных наборов на входные наборы из того же класса эквивалентности. Все тупиковые диагностические тесты: $\{(000),(001),(010)\}$, $\{(000),(001),(100)\}$, $\{(000),(111),(010)\}$, $\{(000),(111),(100)\}$, $\{(101),(001),(010)\}$, $\{(101),(001),(100)\}$, $\{(101),(111),(010)\}$, $\{(101),(111),(100)\}$.

Ответ. Все тупиковые (как проверяющие, так и диагностические) тесты: $\{(000),(001),(010)\}$, $\{(000),(001),(100)\}$, $\{(000),(111),(010)\}$, $\{(000),(111),(100)\}$, $\{(101),(001),(010)\}$, $\{(101),(001),(100)\}$, $\{(101),(111),(010)\}$, $\{(101),(111),(100)\}$.

6.4. Построить все тупиковые а) проверяющие, б) диагностические тесты для контактной схемы на рис. 2 и источника неисправностей, допускающего одну из следующих неисправностей: обрыв контакта $\bar{z}$, обрыв выделенного контакта z и замыкание выделенного контакта y.

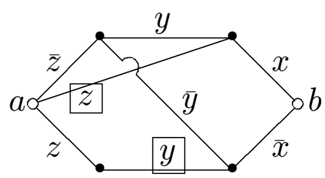

Рис. 2.

Решение. Вычислим таблицу контроля для заданных схемы и источника неисправностей (здесь $f_1 = f$ — функция, реализуемая исходной схемой в отсутствие неисправностей, $f_2 = f^{\text{р}}_{\bar{z}}$ — функция, реализуемая схемой при размыкании контакта $\bar{z}$, $f_3 = f^{\text{р}}_{z}$ — функция, реализуемая схемой при размыкании выделенного контакта z, $f_4 = f^{\text{з}}_{y}$ — функция, реализуемая схемой при замыкании выделенного контакта y):

x	y	z	$f_1 = f$	$f_2 = f^{\text{р}}_{\bar{z}}$	$f_3 = f^{\text{р}}_{z}$	$f_4 = f^{\text{з}}_{y}$	
0	0	0	1	0	1	1	y_1
0	0	1	0	0	0	1	y_2
0	1	0	0	0	0	0	y_3
0	1	1	1	1	1	1	y'_3
1	0	0	0	0	0	0	y''_3
1	0	1	1	1	0	1	y_4
1	1	0	1	0	1	1	y'_1
1	1	1	1	1	0	1	y'_4

Функциональную часть этой таблицы будем считать матрицей M. Каждой строке матрицы M сопоставлена своя переменная; предварительно все строки M (и соответствующие им входные наборы) были разбиты на классы эквивалентности так, что в один класс входили попарно равные или попарно противоположне строки, названия переменных для строк из одного класса отличаются лишь числом штрихов.

а) Цель контроля $\mathcal{N}$ для задачи проверки матрицы M имеет вид

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}^{\text{П}} = \{(1, j) \mid 2 \le j \le 4\}.$$

Построим матрицу $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'(M, \mathcal{N}^{\text{П}})$ для пары $(M, \mathcal{N}^{\text{П}})$, состоящую из покоординатных сумм (по модулю 2) пар столбцов, входящих в $\mathcal{N}^{\text{П}}$, при этом из каждого класса эквивалентности строк беря по одной строке (заметим: строки матрицы M, не содержащие неодинаковых элементов, можно было бы не включать в $\mathcal{M}'$):

$$\mathcal{M}' = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array}$$

Построим КНФ функции покрытия матрицы $\mathcal{M}'$:

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1 y_2 y_4.$$

Ясно. что в правой части этого равенства находится сокращенная ДНФ функции F. Каждое слагаемое построенной сокращенной ДНФ функции F задает свой тупиковый проверяющий тест для таблицы M. Чтобы охватить все тупиковые проверяющие тесты для таблицы M, следует в каждом построенном тесте осуществить всевозможные замены входных наборов на входные наборы из того же класса эквивалентности. Все тупиковые проверяющие тесты: $\{(000),(001),(101)\}$, $\{(000),(001),(111)\}$, $\{(110),(001),(101)\}$, $\{(110),(001),(111)\}$.

б) Цель контроля $\mathcal{N}$ для задачи диагностики матрицы M имеет вид

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}^{\text{Д}} = \{(i,j) \mid 1 \le i < j \le 4\}.$$

Построим матрицу $\mathcal{M}'' = \mathcal{M}''(M,\mathcal{N}^{\text{Д}})$ для пары $(M,\mathcal{N}^{\text{Д}})$, состоящую из покоординатных сумм (по модулю 2) пар столбцов, входящих в $\mathcal{N}^{\text{Д}}$, при этом из каждого класса эквивалентности строк беря по одной строке (заметим: строки матрицы M, не содержащие неодинаковых элементов, можно было бы не включать в $\mathcal{M}''$):

$$\mathcal{M}'' = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array}$$

Построим КНФ функции покрытия матрицы $\mathcal{M}''$:

$$F(y_1,y_2,y_3,y_4) = y_1 y_4 y_2 (y_1 \vee y_4)(y_1 \vee y_2)(y_2 \vee y_4) = y_1 y_2 y_4.$$

Ясно. что в правой части этого равенства находится сокращенная ДНФ функции F. Каждое слагаемое построенной сокращенной ДНФ функции F задает свой тупиковый диагностический тест для таблицы M. Чтобы охватить все тупиковые диагностические тесты для таблицы M, следует в каждом построенном тесте осуществить всевозможные замены входных наборов на входные наборы из того же класса эквивалентности. Все тупиковые диагностические тесты: $\{(000),(001),(101)\}$, $\{(000),(001),(111)\}$, $\{(110),(001),(101)\}$, $\{(110),(001),(111)\}$.

Ответ. Все тупиковые (как проверяющие, так и диагностические) тесты: $\{(000),(001),(101)\}$, $\{(000),(001),(111)\}$, $\{(110),(001),(101)\}$, $\{(110),(001),(111)\}$.

6.11. Найти длину минимального единичного проверяющего теста относительно размыканий контактов в контактной схеме на рис. 3.

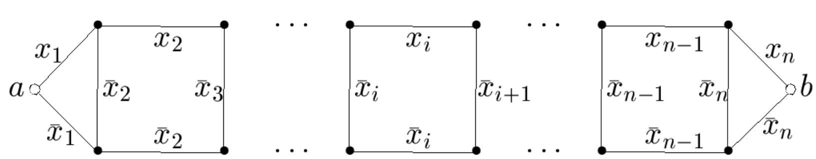

Рис. 3.

Решение. Заметим: через контакты $\bar{x}_1$, x_n и «вертикальные» контакты $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$, ..., $\bar{x}_n$ проходит по одной простой проводящей цепи, соединяющей полюсы схемы, и при этом эти цепи проводят на попарно различных наборах. Значит, чтобы обнаружить одиночные размыкания указанных контактов, в единичный проверяющий тест необходимо включить упомянутые $n+1$ наборов. Остается заметить, что на этих же наборах обнаруживаются одиночные размыкания всех контактов схемы.

Ответ. $n+1$.

Литература

1. Алексеев В. Б., Вороненко А. А., Ложкин С. А., Романов Д. С., Сапоженко А. А., Селезнева С. Н. Задачи по курсу «Основы кибернетики». М.: МАКС Пресс, 2011.