Решение задач семинара №6 по курсу “Основы кибернетики”
для групп 3-го потока 3-го курса факультета ВМК МГУ.
Каскадные КС и СФЭ. Метод каскадов для КС и СФЭ.

Задача №2.13(1)

Построить методом каскадов контактную схему (КС) для функции $f(\tilde{x}^3) = x_1x_2x_3 \oplus x_2x_3 \oplus 1$.

Решение:

Руководствуясь естественным порядком переменных, разложим по Шеннону сначала саму ФАЛ f по её первой переменной, и далее продолжим раскладывать её подфункции по последующим переменным. Пусть $G_1 = \widehat{G}_1 = \{f\}$ — исходное множество функций, для которых методом каскадов нужно построить схемы. Разложение Шеннона функции f по переменной x_1 выглядит так:

$$f(\tilde{x}^3) = \overline{x}_1 \cdot f(0, x_2, x_3) \vee x_1 \cdot f(1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 \cdot (x_2x_3 \oplus 1) \vee x_1 \cdot 1$$

Введём удобные обозначения. Пусть k и n натуральные числа, $k \leqslant n$, функция g — ФАЛ из $P_2(n)$, $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ — двоичный набор длины k. Будем далее обозначать функцию $g(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$, через $g_{\sigma_1,\ldots,\sigma_k}(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ или даже через $g_{\sigma_1,\ldots,\sigma_k}$, когда число n ясно из контекста. Заметим, что ФАЛ $g_{\sigma_1,\ldots,\sigma_k}$ *зависит* в точности от переменных $x_{k+1}, \ldots, x_n$, при этом, возможно, от некоторых из них *зависимость фиктивная*. В нашем случае $f_0(x_2, x_3) = x_2x_3 \oplus 1$, $f_1(x_2, x_3) = 1$ и эти две ФАЛ составляют множество $G_2 = \{f_0, f_1\}$. На следующем шаге мы имеем целью разложить функции множества G_2 по переменной x_2 и таким способом построить множество функций G_3. Для дальнейшего не имеет смысла раскладывать ФАЛ по переменной, если зависимость от этой переменной фиктивная (проверьте, что в этом случае полученные подфункции *совпадают* между собой и *равны*[1] исходной ФАЛ). Поэтому выделим из множества G_2 его подмножество $\widehat{G}_2 = \{f_0\}$ тех функций, которые существенно зависят от переменной x_2, и выпишем разложения Шеннона этих функций (в рассматриваемом примере функция одна):

$$f_0 = \overline{x}_2 \cdot f_{00} \vee x_2 \cdot f_{01}, \qquad \text{где} \quad f_{00} = 1, \quad f_{01} = x_3 \oplus 1 = \overline{x}_3.$$

Далее планируется раскладывать полученные функции по переменной x_3, но в этом месте нельзя забыть про функции множества $G_2 \setminus \widehat{G}_2$, которые были временно «отложены» как не зависящие существенно от переменной x_2, но в общем случае могут зависеть от переменной x_3: $G_3 = \{f_{00}, f_{01}\} \cup (G_2 \setminus \widehat{G}_2) = \{1, \overline{x}_3\}$, $\widehat{G}_3 = \{f_{01}\} = \{\overline{x}_3\}$. Раскладываем функцию f_{01} по переменной x_3:

$$f_{01} = \overline{x}_3 \cdot f_{010} \vee x_3 \cdot f_{011}, \qquad \text{где} \quad f_{010} = 1, \quad f_{011} = 0.$$

Таким образом, $G_4 = \{f_{010}, f_{011}\} \cup (G_3 \setminus \widehat{G}_3) = \{0, 1\}$. Будем считать, что $\widehat{G}_4 = G_4$.

[1]В этом месте очень тонкий момент. Равенство ФАЛ определяется с точностью до фиктивных переменных, тем не менее, например, функция-константа как функция двух переменных требует иного количества входных данных, чем та же самая функция, но рассматриваемая с зависимостью лишь от одной переменной — у этих функций не совпадают области определения. Поэтому как за математическими объектами за такими функциями приходится признать *несовпадение*, однако в синтезной проблематике их существо едино: с точки зрения результата — самого закона управления — безразлично, присутствует ли в управляющей конструкции элемент управления фиктивного параметра системы. Поэтому удобно говорить про *равенство* таких функции.

Здесь уместно напомнить, что извлекая закон управления по описанию управляющей системы, по определению считается, что он зависит (не обязательно существенно!) от тех и только тех параметров, которые в этом описании присутствуют. Например, заданная формулой $(x \cdot \overline{x} \vee y)$ функция зависит от двух переменных, а формула $(y \cdot \overline{y} \vee y)$ задаёт функцию одной переменной.

Результатом данного процесса явилось разбиение $(\widehat{G}_2, \widehat{G}_3, \widehat{G}_4)$ множества всех подфункций функций из G_1 на непересекающиеся классы. При этом для любого j, $1 \leqslant j \leqslant 3$, любая ФАЛ h из G_j либо является некоторой ФАЛ множества $H_j = \bigcup_{s=j+1}^{4} \widehat{G}_s$ «следующих» классов разбиения, либо для некоторых ФАЛ $h', h'' \in H_j$ представима в виде $h = \overline{x}_j \cdot h' \vee x_j \cdot h''$. Каскадная схема строится итеративно, начиная с «последнего» множества разбиения. Схема, полученная на предыдущей итерации, «надстравивается» элементами, моделирующими указанное представление ФАЛ h.

Процесс построения $(2,1)-$ полной каскадной контактной схемы Σ, реализующей матрицу (в нашем случае — вектор-столбец) проводимости $(f, \overline{f})^{\intercal}$, изображён на рис. 1. Каскадная КС Σ_f для ФАЛ f получается из схемы Σ удалением входного полюса 0 вместе со всеми инцидентными ему контактами, а инверсная к ней каскадная КС $\Sigma_{\overline{f}}$ для ФАЛ $\overline{f}$ — удалением входного полюса 1.

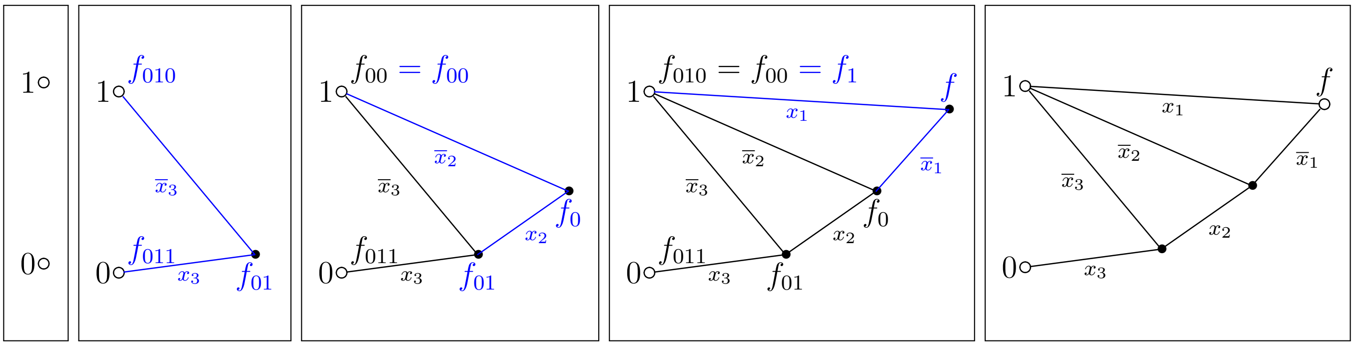

Рис. 1. Построение полной каскадной КС

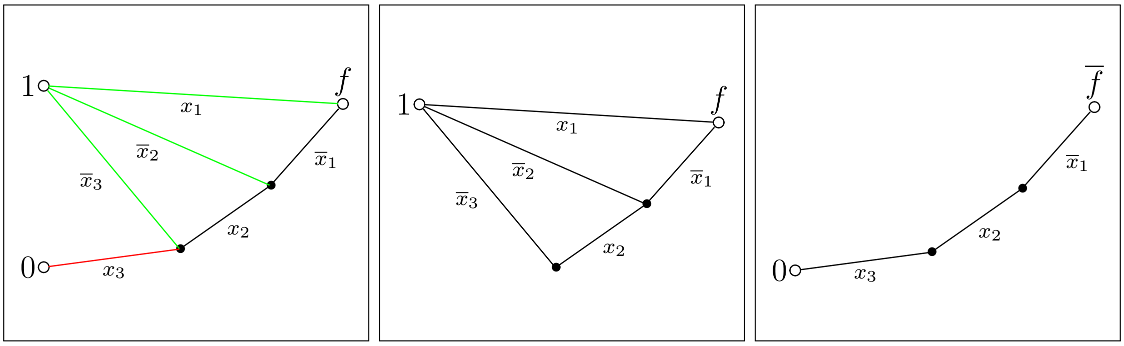

Рис. 2. Каскадная КС Σ_f, реализующая ФАЛ f и инверсная к ней схема $\Sigma_{\overline{f}}$

Задача №2.13(7)

Построить методом каскадов контактную схему для функции $f(\tilde{x}^3) = (0000\,0001\,0111\,1111)$.

Решение:

По аналогии с разобраным примером, построим разложения функции f:

$$G_1 : \Big\{ f = \overline{x}_1 \cdot f_0 \vee x_1 \cdot f_1, \qquad f_0 = (0000\,0001), \qquad f_1 = (0111\,1111); \qquad \widehat{G}_1 = G_1,$$

$$G_2 : \begin{cases} f_0 = \overline{x}_2 \cdot f_{00} \vee x_1 \cdot f_{01}, & f_{00} = (0000) = 0, \quad f_{01} = (0001), \\ f_1 = \overline{x}_2 \cdot f_{10} \vee x_1 \cdot f_{11}, & f_{10} = (0111), \quad f_{11} = (1111) = 1; \end{cases} \qquad \widehat{G}_2 = G_2,$$

$$G_3 : \begin{cases} f_{01} = \overline{x}_3 \cdot f_{010} \vee x_3 \cdot f_{011}, & f_{010} = (00) = 0, \quad f_{011} = (01) = x_4, \\ f_{10} = \overline{x}_3 \cdot f_{100} \vee x_3 \cdot f_{101}, & f_{100} = (01) = x_4, \quad f_{101} = (11) = 1, \\ f_{011} = f_{100} = \overline{x}_4 \cdot 0 \vee x_4 \cdot 1. \end{cases} \qquad \widehat{G}_3 = G_3 \setminus \{f_{00}, f_{11}\}.$$

Процесс построения полной каскадной КС изображён на рис. 4. На рис. 4 изображена каскадная КС для ФАЛ f и инверсная схема, а также показаны цветом те контакты полной каскадной КС, удаление которых приводит к этим схемам.

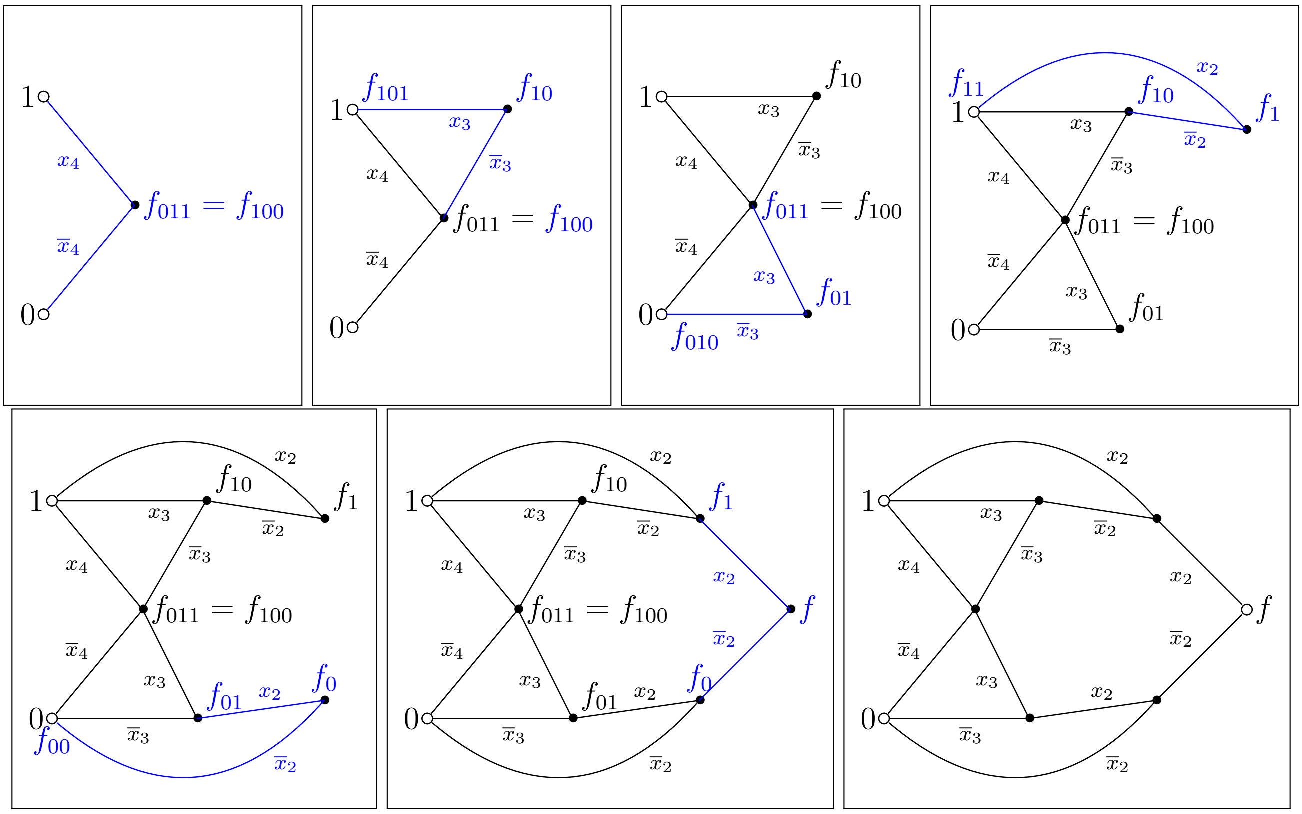

Рис. 3. Построение полной каскадной КС

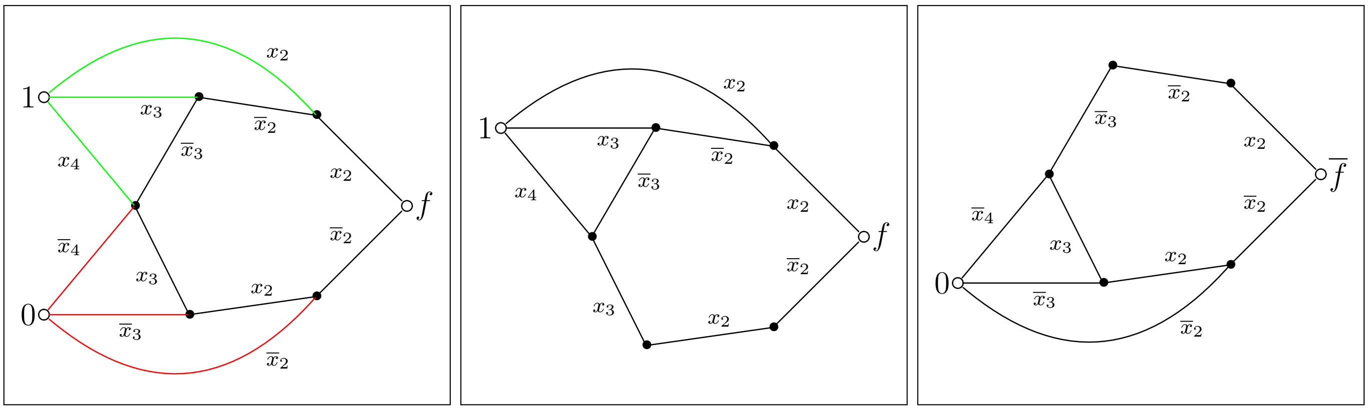

Рис. 4. Получение каскадной КС для f и инверсной КС из полной каскадной КС

Задача №2.14(1)

Построить методом каскадов контактную схему для системы функций $\Phi = \{f, g\}$, $f = x \cdot y$, $g = x \vee y$.

Решение:

Построим разложения функций f, g:

$$\Phi = G_1 : \begin{cases} f = \overline{x} \cdot f_0 \vee x \cdot f_1, & f_0 = 0, \quad f_1 = y, \\ g = \overline{x} \cdot g_0 \vee x \cdot g_1, & g_0 = y, \quad g_1 = 1; \end{cases} \qquad \widehat{G}_1 = G_1,$$

$$G_2 : \begin{cases} f_1 = g_0 = y = \overline{y} \cdot 0 \vee y \cdot 1, \\ \qquad f_0 = 0, \quad g_1 = 1; \end{cases} \qquad \widehat{G}_2 = \{y\}.$$

Процесс построения полной каскадной КС изображён на рис. 5. На рис. 6 изображена каскадная КС для системы ФАЛ Φ и инверсная схема.

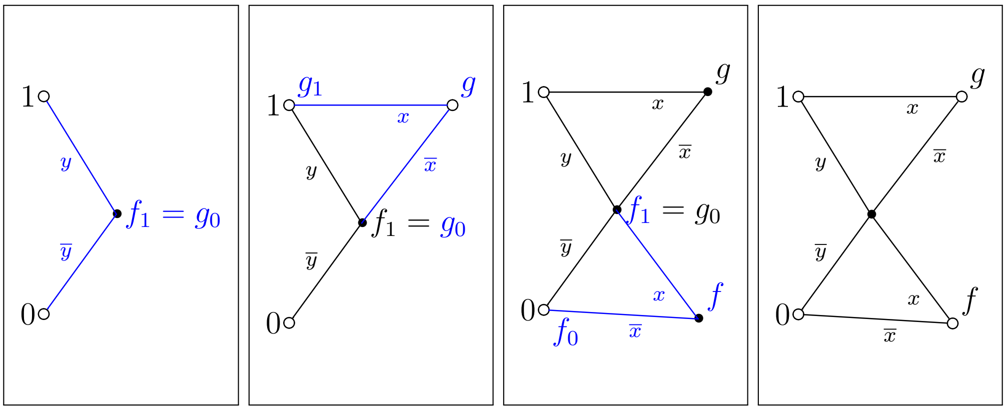

Рис. 5. Построение полной каскадной КС

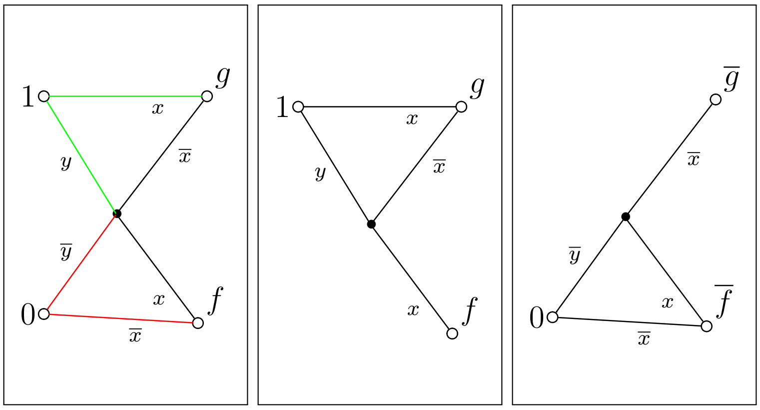

Рис. 6. Получение каскадной КС для системы Φ и инверсной к ней КС из полной каскадной КС

Задача №2.14(5)

Построить методом каскадов контактную схему для системы функций $\Phi = \{f, g\}$, $f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$, $g = (x_1 \vee x_2)x_3 \vee x_1x_2$.

Решение:

Построим разложения функций f, g:

$$\Phi = G_1 : \begin{cases} f = \overline{x_1} \cdot f_0 \vee x_1 \cdot f_1, & f_0 = x_2 \oplus x_3, & f_1 = 1 \oplus x_2 \oplus x_3, \\ g = \overline{x_1} \cdot g_0 \vee x_1 \cdot g_1, & g_0 = x_2x_3, & g_1 = x_3 \vee x_2; \end{cases} \qquad \widehat{G}_1 = G_1,$$

$$G_2 : \begin{cases} f_0 = \overline{x_2} \cdot f_{00} \vee x_2 \cdot f_{01}, & f_{00} = x_3, & f_{01} = 1 \oplus x_3 = \overline{x}_3, \\ f_1 = \overline{x_2} \cdot f_{10} \vee x_2 \cdot f_{11}, & f_{10} = \overline{x}_3 = f_{01}, & f_{11} = x_3, \\ g_0 = \overline{x_2} \cdot g_{00} \vee x_2 \cdot g_{01}, & g_{00} = 0, & g_{01} = x_3, \\ g_1 = \overline{x_2} \cdot g_{10} \vee x_2 \cdot g_{11}, & g_{10} = x_3, & g_{11} = 1; \end{cases} \qquad \widehat{G}_2 = G_2,$$

$$G_3 : \begin{cases} g_{01} = g_{10} = f_{00} = f_{11} = \overline{x_3} \cdot 0 \vee x_3 \cdot 1, \\ f_{01} = f_{10} = \overline{x_3} \cdot 1 \vee x_3 \cdot 0, \\ g_{00} = 0, \quad g_{11} = 1; \end{cases} \qquad \widehat{G}_3 = \{\overline{x}_3, x_3\}.$$

Процесс построения полной каскадной КС для системы Φ изображён на рис. 7. На рис. 8 изображена каскадная КС для системы Φ и инверсная схема, а также показаны цветом те контакты полной каскадной

КС, удаление которых приводит к этим схемам. Построение схемы из функциональных элементов методом каскадов для системы Ф проиллюстрированно на рисунках 9, 10.

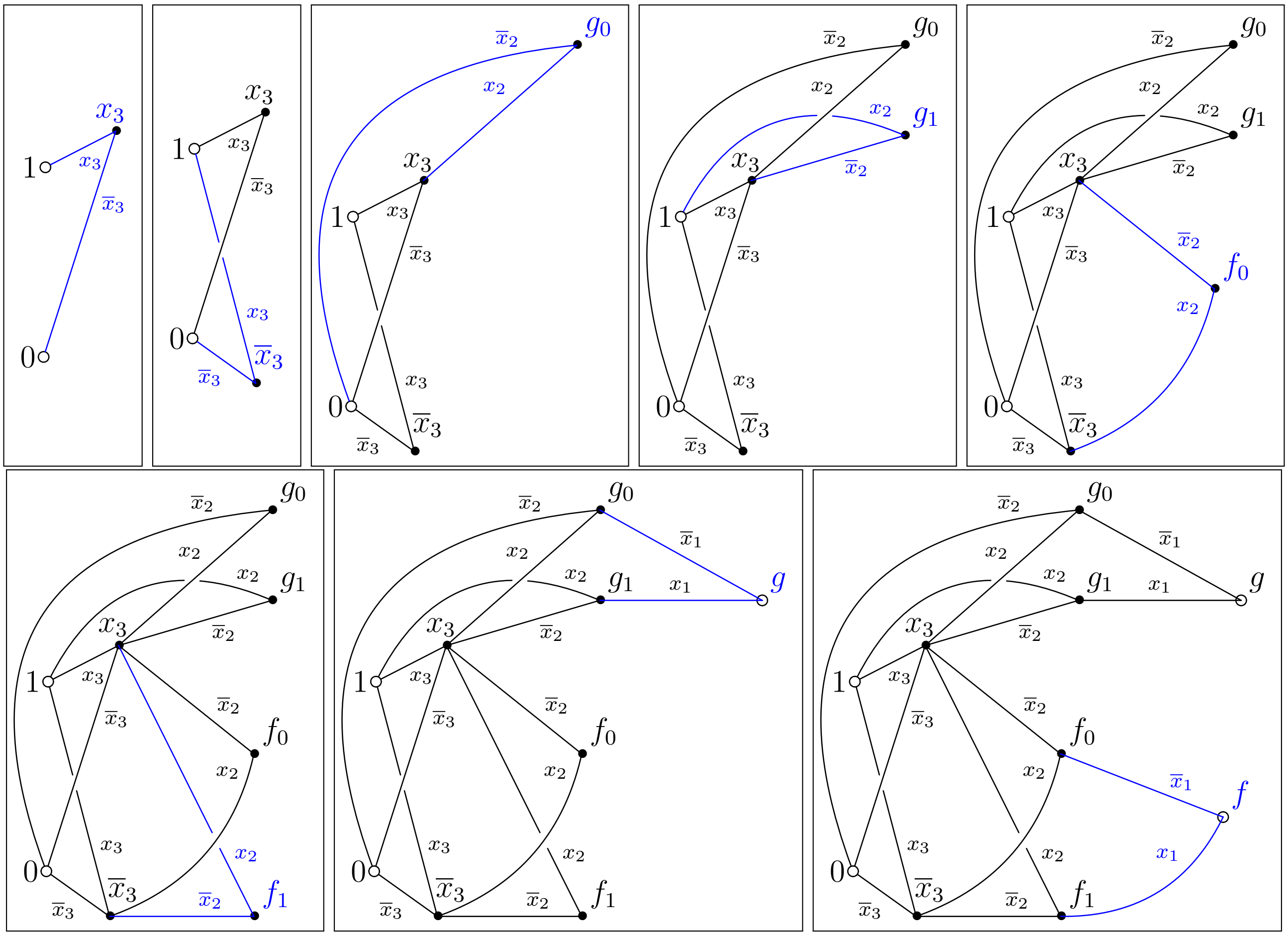

Рис. 7. Построение полной каскадной КС

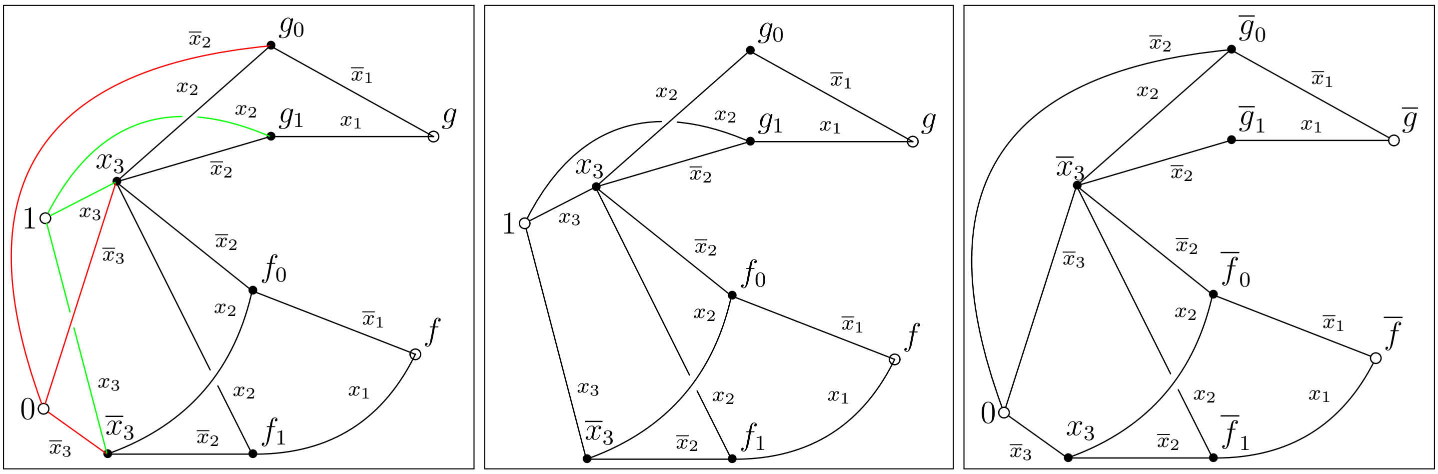

Рис. 8. Получение каскадной КС для системы Ф и инверсной к ней КС из полной каскадной КС

Список литературы

[1] Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004.

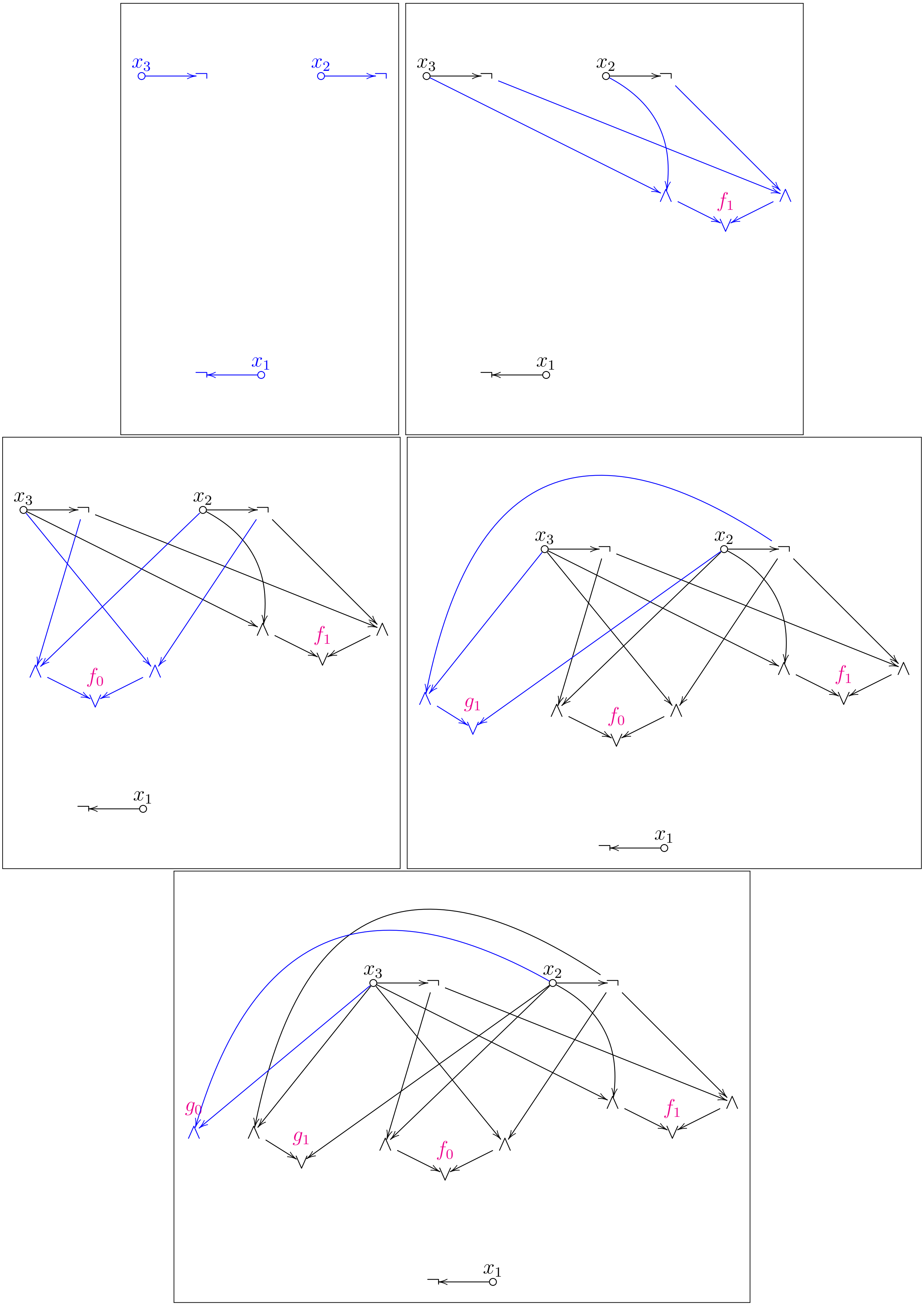

Рис. 9. Построение СФЭ методом каскадов

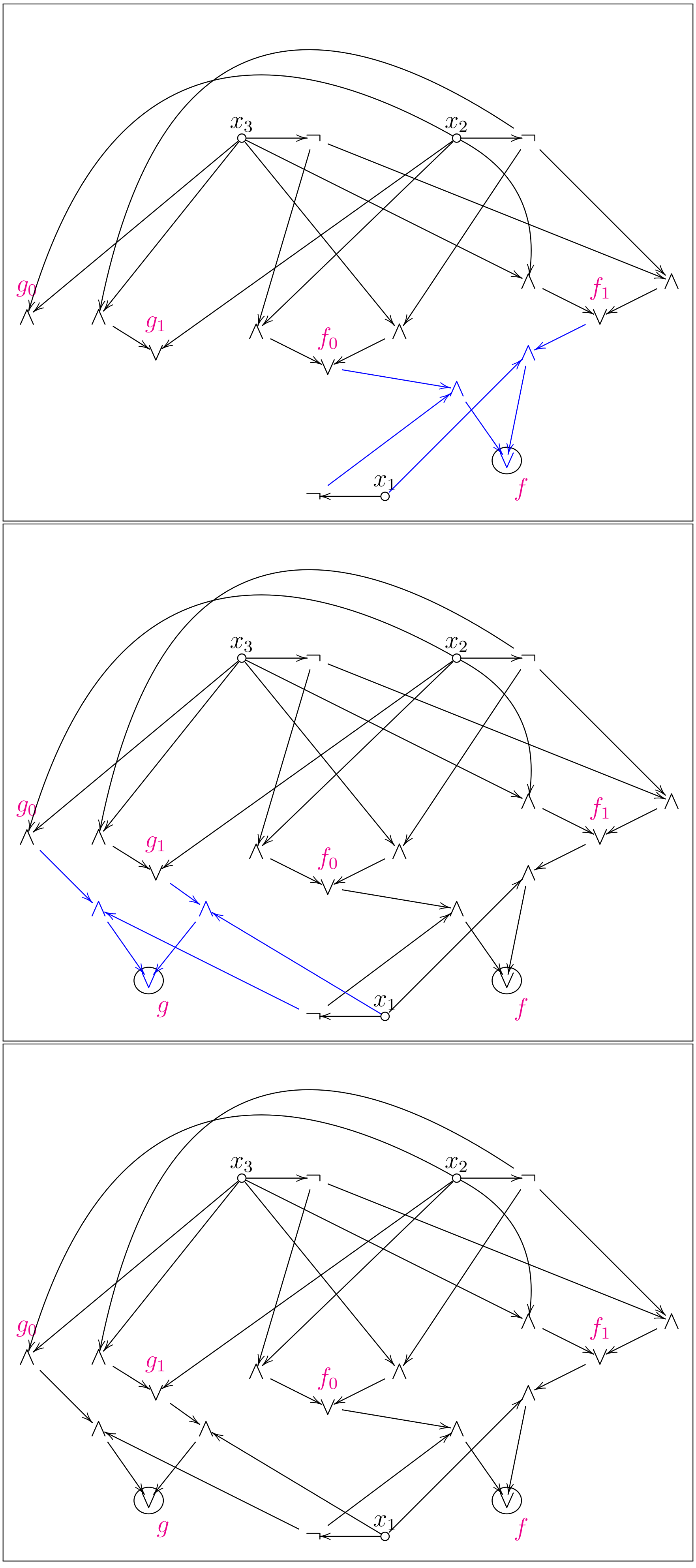

Рис. 10. Построение СФЭ методом каскадов (продолжение)