«Основы кибернетики (3-й поток)»

Лектор —
доцент, д.ф.-м.н. Д. С. Романов

Информационная поддержка курса:
https://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_(3-й_поток)

Семинар 1. Представление функций алгебры логики (ФАЛ) с помощью дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ), импликанты и простые импликанты ФАЛ. Сокращённая ДНФ и методы её построения.

1. Единичный куб и табличные способы задания ФАЛ.

Пусть $B = \{0,1\}$ и $B^n = B \times \cdots (\text{n раз}) \cdots \times B = \{\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) : \beta_i \in B\}$ - *единичный* n*-мерный куб*, для которого $|B^n| = 2^n$. Примеры:
$B = B^1 = \{0,1\}$, $B^2 = \{(00), (01), (10), (11)\}$,
$B^3 = \{(000), (001), (010), (011), (100), (101), (110), (111)\}$ и т.д. Наборы $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ из B^n упорядочиваются, как правило, в соответствии с их *лексикографическими номерами* $\nu(\beta) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i 2^{n-i}$, задающими взаимно-однозначное соответствие $B^n \overset{\nu}{\longleftrightarrow} [0, 2^n)$, которое определяет на B^n отношение *лексикографического* (полного или линейного) *порядка*.

Будем считать, что $B^n = B^n(x_1, \ldots, x_n)$, где $\mathfrak{X} = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ - упорядоченный счетный алфавит (входных) булевых переменных (БП). При этом под ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ от БП $X(n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ будем понимать отображение $B^n \xrightarrow{f} B$ и будем задавать её либо *столбцом значений* $\widetilde{\alpha_f} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{2^n-1}) \in B^{2^n}$, где $f(\beta) = \alpha_{\nu(\beta)}$, который, обычно, размещается в линейной или прямоугольной *таблице значений* f, либо *характеристическим множеством* $N_f = \{\beta \in B^n : f(\beta) = 1\}$ или его дополнением $\overline{N_f} = B^n \backslash N_f$.

x_1	0	$\overline{x}_1$	x_1	1
0	0	1	0	1
1	0	0	1	1

a)

x_1	x_2	$\&$	$\vee$	$\oplus$	$\sim$	$\rightarrow$	$\mid$	$\downarrow$
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0

b)

$\widetilde{\alpha}_f$	название функции f
(00)	— "0" (константа нуль)
(11)	— "1" (константа единица)
(01)	— тождественная функция
(10)	— отрицание
(0001)	— конъюнкция (умножение)
(0111)	— дизъюнкция
(0110)	— сумма по модулю 2
(1001)	— эквивалентность
(1101)	— импликация
(1110)	— штрих Шеффера
(1000)	— стрелка Пирса

c)

Рис. 2.2: $P_2(1)$ и «основные» ФАЛ из $P_2(2)$

x_1	x_2	x_3	H
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

a)

x_1	x_2 \ x_3	0	1
0	0	0	0
0	1	0	1
1	1	1	1

x_2	0	0	1	1
x_1 \ x_3	0	1	0	1
0	0	0	0	1
1	0	1	1	1

b)

$$N_H = \{(011), (101), (110), (111)\}$$
$$\overline{N}_H = \{(000), (001), (010), (100)\}$$

c)

Рис. 2.3: функция голосования

Некоторые функционалы и отношения на кубе B^n, характеристические функции некоторых его подмножеств.

Для набора $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in B^n$ число $||\beta|| = \beta_1 + \cdots + \beta_n$ будем считать его *весом*, а затем для $i = 0, 1, \ldots, n$ множество $B_i^n = \{\beta \in B^n : ||\beta|| = i\}$ определим как *i-й слой* куба B^n, для которого, очевидно, $|B_i^n| = C_n^i$.

Заметим, что ФАЛ $f, f \in P_2(n)$, *симметрична* $\Leftrightarrow$ её характеристическое множество N_f представляет собой объединение слоёв куба B^n.

Напомним, что для наборов $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ и $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ из B^n:

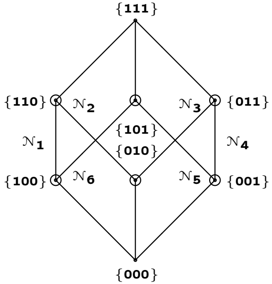
- выполнено неравенство $\beta \geqslant \gamma \Leftrightarrow \beta_i \geqslant \gamma_i$ при всех $i, i \in [1, n]$;

- величина $\rho(\beta, \gamma)$ - т.н. *расстояние Хэмминга* между β и γ, - равна числу тех разрядов $i, i \in [1, n]$, для которых $\beta_i \neq \gamma_i$ и что в случае, когда $\rho(\beta, \gamma) = 1$, эти наборы называются *соседними*.

При этом отношение $\beta \geqslant \gamma$ задаёт на B^n отношение *монотонного* (частичного) *порядка*.

Куб B^n при $n \leqslant 4$ удобно задавать в «геометрическом» варианте в виде графа с 2^n расположенными по слоям вершинами и $n2^{n-1}$ рёбрами, которые соединяют соседние вершины куба, лежащие, очевидно, в соседних слоях.

$$g\{x_1, x_2, x_3\} = \underbrace{x_1\overline{x}_3}_{K_1} \vee \underbrace{x_2\overline{x}_3}_{K_2} \vee \underbrace{\overline{x}_1 x_2}_{K_3} \vee \underbrace{\overline{x}_1 x_3}_{K_4} \vee \underbrace{\overline{x}_2 x_3}_{K_5} \vee \underbrace{x_1\overline{x}_2}_{K_6}.$$



$$\overline{N}_g = \{\{000\}, \{111\}\},$$

$$\mathfrak{A}_1 = K_1 \vee K_3 \vee K_5,$$

$$\mathfrak{A}_2 = K_2 \vee K_4 \vee K_6,$$

$$\mathfrak{A}_3 = K_1 \vee K_2 \vee, K_4 \vee K_5,$$

$$\mathfrak{A}_4 = K_2 \vee K_3 \vee K_5 \vee K_6,$$

$$\mathfrak{A}_5 = K_3 \vee K_4 \vee K_6 \vee K_1.$$

Важнейшее семейство подмножеств куба B^n составляют его грани. Для набора натуральных чисел $I = (i_1, \ldots, i_r)$, где $1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_r \leqslant n$, и двоичного набора $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_r) \in B^r$ определим связанную с ними *грань ранга r* или, иначе, размерности $(n - r)$ куба B^n как множество

$$B_\sigma^{n,I} = \{\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in B^n : \beta_{i_1} = \sigma_1, \ldots, \beta_{i_r} = \sigma_r\},$$

мощность которого равна 2^{n-r}. Данную грань можно однозначно задать троичным набором $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \{0, 1, 2\}^n$, где $\gamma_i = \beta_i$, если $i \in I$, и $\gamma_i = 2$ в остальных случаях.

При этом сам куб B^n считается гранью размерности n, его наборы - гранями размерности 0, а рёбра - гранями размерности 1. Заметим, что, число граней ранга r в кубе B^n равно $C_n^r 2^{n-r}$, а число всех граней - 3^n.
Заметим также, что в силу свойств ФАЛ $x_1 \cdot x_2$ характеристическая ФАЛ указанной выше грани задаётся т.н. *элементарной конъюнкцией ранга r от БП $X(n)$* вида $K = x_{i_1}^{\sigma_1} \bullet \cdots \bullet x_{i_r}^{\sigma_r}$, где, как обычно, $x^0 = \overline{x}$ и $x^1 = x$.

Из свойств ФАЛ $x_1 \vee x_2$, в свою очередь, следует, что формула вида $\mathfrak{A} = K_1 \vee \dots \vee K_s$, где K_j - ЭК ранга r_j от БП $X(n)$ и $K_i \neq K_j$ при $i \neq j$, которая называется *дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ) от множества БП $X(n)$, задаёт характеристическую ФАЛ f множества $N_f = N_{K_1} \vee \dots \vee N_{K_s}$. При этом число s задаёт т.н. *длину* $\lambda(\mathfrak{A})$, а число $r_1 + \dots + r_s$ - т.н. *ранг* $R(\mathfrak{A})$ ДНФ $\mathfrak{A}$. В том случае, когда $R(\mathfrak{A}) = n|N_f|$, то есть ранги всех ЭК ДНФ $\mathfrak{A}$ равны n, она называется *совершенной* ДНФ.

Для любой ФАЛ $f, f \in P_2(n), f \not\equiv 0$, её совершенная ДНФ имеет вид

$$\mathfrak{A}(f) = \bigvee_{(\sigma_1,\dots,\sigma_n)\in N_f} x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}.$$

Задача 1. (гл. I, №2.3(3))
Построить совершенную ДНФ для ФАЛ $f, f \in P_2(3)$, для которой $\widetilde{\alpha_f} = (01010001)$.

Решение:

1. построим таблицу ФАЛ f;
2. находим наборы из $N_f = \{(001), (011), (111)\}$;
3. выписываем $\mathfrak{A}_{\text{сов.}}(f) = \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_3$.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

2. Сокращённая ДНФ и способы её построения

Если для ЭК K от БП $X(n)$ и ФАЛ f из $P_2(n)$ имеет место включение $N_K \subseteq N_f$, то K называется *импликантой*, а множество N_K - гранью f. Если же при этом, кроме того, нет такой ЭК K' от БП $X(n)$, для которой $N_K \subset N_{K'} \subseteq N_f$, то K считается *простой импликантой* ФАЛ f, а грань N_K - её *максимальной гранью*. При этом сокращённая ДНФ ФАЛ f определяется как дизъюнкция всех её простых импликант (ПИ), которая соответствует покрытию множества N_f всеми максимальными гранями ФАЛ f.

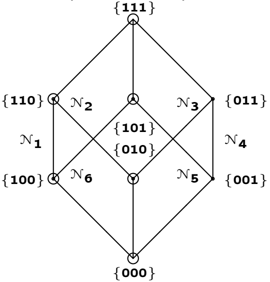
«Геометрический» способ построения сокращённой ДНФ основан на её определении и использовании геометрии граней единичного куба.

Задача 2. (гл. IX, №2.1(1, 2)) Из заданного множества ЭК выделить ПИ ФАЛ f, а затем построить её сокращённую ДНФ геометрическим способом.

1) $A = \{x_1, \overline{x}_3, x_1x_2, x_2\overline{x}_3\}$

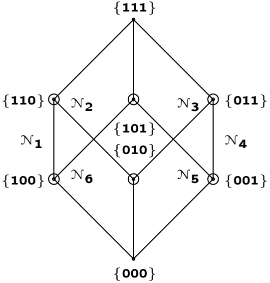
$N_f = \{(000), (010), (100), (101), (110), (111)\}$

$\alpha_f = (01101111)$



2) $A = \{x_1\overline{x}_2, x_2x_3, x_1x_2x_3\}$

$\alpha_f = (01111110)$

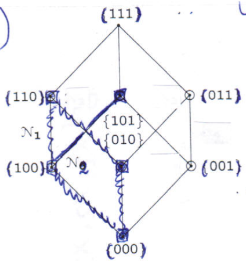


Ответ: $x_1, \overline{x}_3$. $\mathfrak{A} = x_1 \vee \overline{x}_3$

Задача 3 (гл. IX, 2.5(1,5)). Построить геометрически сокращенную ДНФ ФАЛ f, где: 1) $\tilde{\alpha}_f=(11110100)$; 5) $\tilde{\alpha}_f=(1111100001001100)$

Решение

1)

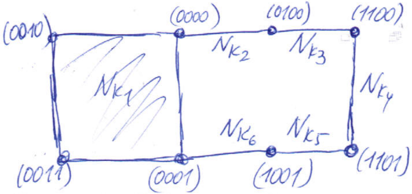


$K_1=\bar{x}_1$, $K_2=\bar{x}_2 x_3$, $\mathfrak{A}_{сокр}(f)=K_1\vee K_2$

$N_1=N_{K_1}=\{(000),(001),(010),(011)\}$

$N_2=N_{K_2}=\{(100),(101)\}$

5) $K_1=\bar{x}_1\bar{x}_2$, $K_2=\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4$, $K_3=x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$, $K_4=x_1x_2\bar{x}_3$, $K_5=x_1\bar{x}_3x_4$, $K_6=\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$



Задача 4. (гл. IX, №2.6(1, 5)) Найти сокр. ДНФ ФАЛ f с помощью минимизирующей карты Карно:

1) $\widetilde{\alpha_f} = (01010111)$

2) $\widetilde{\alpha_f} = (0001101111011111)$

1)

x_1 \ $x_2 x_3$	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	1	1	1

$\mathfrak{A}_{сокр}(f) = x_3 \vee x_1 x_2$

5)

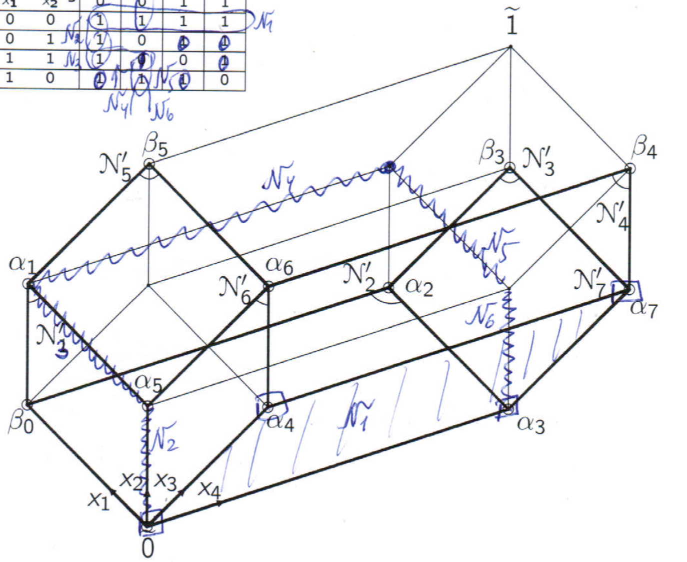
$x_1 x_2$ \ $x_3 x_4$	00	01	11	10
0 0	0	0	1	0
0 1	1	0	1	1
1 1	1	1	1	1
1 0	1	1	1	0

K_1, K_5, K_6, K_2, K_3, K_4

$$\mathfrak{A}_{сокр}(f) = \underbrace{x_2 \bar{x}_4}_{K_1} \vee \underbrace{x_1 \bar{x}_3}_{K_2} \vee \underbrace{x_1 x_4}_{K_3} \vee \underbrace{x_3 x_4}_{K_4} \vee \underbrace{x_2 x_3}_{K_5} \vee \underbrace{x_1 x_2}_{K_6}$$

x_1	x_2	x_4: 0, x_3: 0	x_4: 1, x_3: 0	x_4: 1, x_3: 1	x_4: 0, x_3: 1
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0

N_1 N_2 N_3 N_4 N_5 N_6



Тождество поглощения $t^{\Pi}: x_1 = x_1 \vee x_1 x_2$ используется при построении сокращённой ДНФ из КНФ в соответствии со следующим Утверждением.

Утверждение 2.1. Пусть $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}''$ — сокращенные ДНФ ФАЛ f' и f'' соответственно, а ДНФ $\mathfrak{A}$ без поглощений ЭК получается из формулы $\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{A}''$ в результате раскрытия скобок и приведения подобных. Тогда $\mathfrak{A}$ — сокращенная ДНФ ФАЛ $f = f' \cdot f''$.

Следствие. Если ДНФ $\mathfrak{A}$ без поглощений ЭК получается из КНФ $\mathfrak{B}$ ФАЛ f в результате раскрытия скобок и приведения подобных, то $\mathfrak{A}$ — сокращенная ДНФ ФАЛ f.

Задача 5. (гл. IX, №2.3(1, 2))

Построить сокращённую ДНФ из заданной КНФ.

1) $(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \cdot (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \cdot (\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$

2) $(x_1 \vee \overline{x}_2) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3$

Решение:

1) $(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \cdot (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \cdot (\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) = (x_2 \vee x_1 x_3 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_3) \cdot (\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) =$

$= x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 \overline{x}_2 x_3 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_3$

2) $(x_1 \vee \overline{x}_2) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) = x_1 \vee \overline{x}_2 \overline{x}_3$

Тождество обобщённого склеивания $t^{\text{ОС}} : \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 x_3 = \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$ используется при построении сокращённой ДНФ из ДНФ в соответствии со следующим утверждением.

Утверждение 2.2. ДНФ без поглощений ЭК является сокращенной ДНФ тогда и только тогда, когда она не имеет строгих расширений.

Следствие. Из любой ДНФ $\mathfrak{A}$ ФАЛ f можно получить сокращенную ДНФ этой ФАЛ в результате построения последовательных строгих расширений и приведения подобных до получения ДНФ без поглощений ЭК, не имеющей строгих расширений.

Задача 6. (гл. IX, №2.2(1, 2))

Построить сокращённую ДНФ ФАЛ f по её ДНФ:

1) $\mathfrak{A} = \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_2x_4 \vee x_2\overline{x}_3x_4$

2) $\mathfrak{A} = x_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2x_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4$

Решение:

1) $\overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_2x_4 \vee x_2\overline{x}_3x_4 \mapsto \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_2x_4 \vee x_2\overline{x}_3x_4 \mapsto$

$\mapsto \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_2x_4 \vee x_2\overline{x}_3x_4 \mapsto \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_2x_4 \vee \overline{x}_3x_4$

2) $x_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2x_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \mapsto x_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2x_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_4 \mapsto$

$\mapsto x_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2x_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3\overline{x}_4$

Задача 7. (гл. IX, №2.9(1, 3)) Найти длину сокращённой ДНФ ФАЛ f:

1) $f = x_1 \oplus \cdots \oplus x_n$

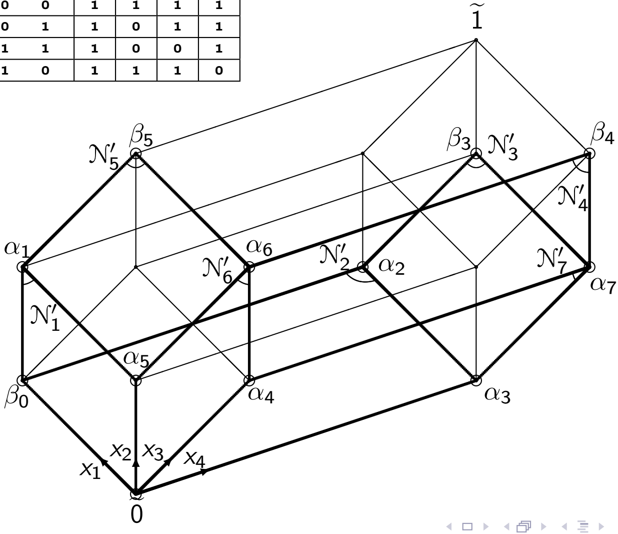
3) $f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)(x_1 \oplus \cdots \oplus x_n)$

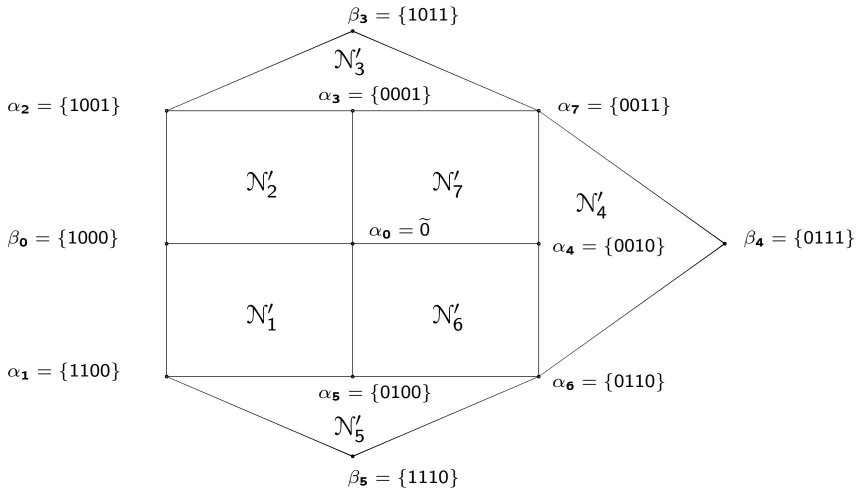
Решение:

1) Сов. ДНФ длины 2^{n-1} является единственной ДНФ ФАЛ f от БП $X(n)$.

3) Представим ФАЛ f в виде $f = g(x_1, x_2, x_3) \cdot l_{n-3}(x_1, \ldots, x_n)$ и воспользуемся тем, что сокращённая ДНФ ФАЛ g состоит из 6 рёбер куба $B^3(x_1, x_2, x_3)$, а сокращённая ДНФ ФАЛ $l_{n-3}(x_4, \ldots, x_n)$ совпадает с её совершенной ДНФ и состоит из 2^{n-5} наборов куба $B^{n-4}(x_4, \ldots, x_n)$, имеющих нечётное число единиц. Следовательно, по утверждению 3.1 сокращённая ДНФ ФАЛ f будет состоять из $6 \cdot 2^{n-5}$ граней ранга 3.

	x_4	0	1	1	0
x_1	x_2 x_3	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0





$$\mathfrak{A}'_1 = K'_1 \vee K'_3 \vee K'_4 \vee K'_5, \quad \mathfrak{A}'_2 = K'_2 \vee K'_3 \vee K'_4 \vee K'_5.$$