Семинар 8

Асимптотически наилучшие методы синтеза схем для функций из специальных классов

Напомним, что для булевой функции f, $f \in P_2(n)$, её сложностью в некотором классе управляющих систем называется минимальная сложность её реализации в нём. Таким образом, сложность $L^K(f)$ в классе контактных схем (КС) определяется как

$$L^K(f) = \min_{\Sigma \text{ -- КС для } f} L(\Sigma),$$

а в классе схем из функциональных элементов (СФЭ)[1]:

$$L^C(f) = \min_{\Sigma \text{ -- СФЭ для } f} L(\Sigma).$$

Далее будем рассматривать функции из различных специальных классов. Пусть $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q} \subseteq P_2$, — некоторый класс булевых функций. Пусть, далее, $\mathcal{Q}(n) = \mathcal{Q} \cap P_2(n)$. Функцией Шеннона сложности схем для класса $\mathcal{Q}(n)$ называется сложность самой сложной функции в нем:

$$L^K(\mathcal{Q}(n)) = \max_{f \in \mathcal{Q}(n)} L^K(f);$$

$$L^C(\mathcal{Q}(n)) = \max_{f \in \mathcal{Q}(n)} L^C(f).$$

Напомним, что при $\mathcal{Q}(n) = P_2(n)$ соответствующие функции Шеннона обозначаются $L^K(n)$ и $L^C(n)$; и при $n \to \infty$

$$L^K(n) \sim \frac{2^n}{n}; \quad L^C(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

Утверждение 1. 1. *Для класса функций $\mathcal{Q}(n)$ такого, что*

$$\log n = o\left(\log\log|\mathcal{Q}(n)|\right), \tag{1}$$

выполняется асимптотическое неравенство

$$L^K(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{\log|\mathcal{Q}(n)|}{\log\log|\mathcal{Q}(n)|}.$$

2. *Для класса функций $\mathcal{Q}(n)$ такого, что*

$$n = o\left(\frac{\log|\mathcal{Q}(n)|}{\log\log|\mathcal{Q}(n)|}\right), \tag{2}$$

выполняется асимптотическое неравенство

$$L^C(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{\log|\mathcal{Q}(n)|}{\log\log|\mathcal{Q}(n)|}.$$

Утверждение 1 будет использоваться для доказательства нижних оценок функции Шеннона. Для установления верхней оценки, как правило, необходимо свести задачу синтеза СФЭ или КС для любой функции из $\mathcal{Q}(n)$ к задаче синтеза соответствующей схемы для нескольких произвольных функций от меньшего числа переменных, и воспользоваться следующим утверждением:

Утверждение 2. *Для любой функции f, $f \in P_2(n)$ существуют реализующие её КС Σ_1 и СФЭ Σ_2 такие, что*

$$L(\Sigma_1) \lesssim \frac{2^n}{n}; \quad L(\Sigma_2) \lesssim \frac{2^n}{n}.$$

Задача 1. Установить асимптотику функции Шеннона для сложности класса всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, равных 1 при $x_1 = 1$, в КС.

---

[1] СФЭ рассматриваются в стандартном базисе $\{\&, \vee, \neg\}$.

Решение. В нашем случае требуется установить поведение $L^K(\mathcal{Q}(n))$ для

$$\mathcal{Q}(n) = \{f(x_1, \ldots, x_n) \,:\, f(1, x_2, \ldots, x_n) = 1\}.$$

1. **Нижняя оценка.** Найдем $|\mathcal{Q}(n)|$. Очевидно, что каждая функция однозначно определяется значениями на всех наборах вида $(0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \{0, 1\}$. Таких наборов в точности 2^{n-1}. Следовательно, $|\mathcal{Q}(n)| = 2^{2^{n-1}}$. Условие (1) выглядит так:

$$\log n = o\left(\log\log|\mathcal{Q}(n)|\right) = o(n-1)$$

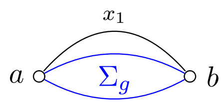
и остается справедливым, поэтому можно применить утверждение 1:

$$L^K(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{\log|\mathcal{Q}(n)|}{\log\log|\mathcal{Q}(n)|} = \frac{2^{n-1}}{n-1} \sim \frac{2^{n-1}}{n}.$$

2. **Верхняя оценка.** Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f \in \mathcal{Q}(n)$. Разложим функцию f по переменной x_1 :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{x}_1 f(0, x_2, \ldots, x_n) \vee x_1 f(1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{x}_1 f(0, x_2, \ldots, x_n) \vee x_1 = x_1 \vee f(0, x_2, \ldots, x_n).$$

Функция $g(x_2, \ldots, x_n) = f(0, x_2, \ldots x_n)$ зависит от $n-1$ переменных, а значит, по утверждению 2, может быть реализована КС Σ_g со сложностью $L(\Sigma_g) \lesssim \dfrac{2^{n-1}}{n-1} \sim \dfrac{2^{n-1}}{n}$. Схему Σ_f для функции f можно построить согласно разложению $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \vee g(, x_2, \ldots x_n)$:



При этом $L(\Sigma_f) = L(\Sigma_g) + 1 \lesssim \dfrac{2^{n-1}}{n}$.

Сопоставляя верхнюю и нижнюю оценки, получаем $L^K(\mathcal{Q}(n)) \sim \dfrac{2^{n-1}}{n}$.

Задача 2. Установить асимптотику функции Шеннона для сложности класса $S(n)$ всех самодвойственных функций в СФЭ.

Решение. Напомним, что функция f самодвойственная, если $f(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}$.

1. **Нижняя оценка.** Поскольку каждая функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in S(n)$ взаимно однозначно определяется половиной своего столбца значений (который имеет вид $(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{2^{n-1}}\bar{\alpha}_{2^{n-1}} \ldots \bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_1)$, то $|S(n)| = 2^{2^{n-1}}$. Это означает выполнение условия (2), и, следовательно,

$$L^C(S(n)) \gtrsim \frac{\log|S(n)|}{\log\log|S(n)|} \sim \frac{2^{n-1}}{n}.$$

2. **Верхняя оценка.** Для доказательства верхней оценки рассмотрим произвольную функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in S(n)$. Её столбец значений имеет вид

$$(\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{2^{n-1}} \quad \bar{\alpha}_{2^{n-1}} \ldots \bar{\alpha}_2\, \bar{\alpha}_1).$$

Рассмотрим функцию $g(x_2, \ldots, x_n)$, столбец значений которой имеет вид $(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{2^{n-1}})$. Справедливо следующее представление:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \oplus g(x_1 \oplus x_2, x_1 \oplus x_3, \ldots, x_1 \oplus x_n).$$

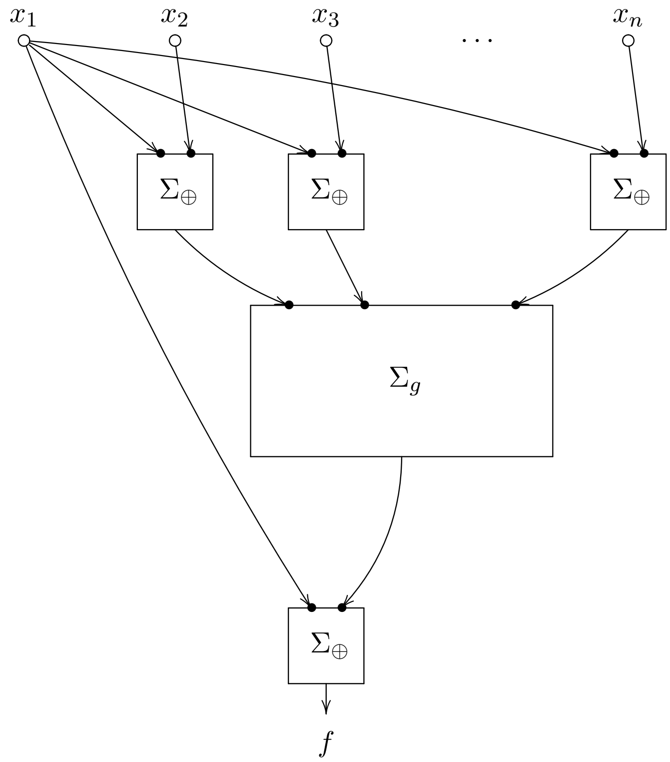
Действительно, при $x_1 = 0$ имеем $f(0, x_2, \ldots, x_n) = g(x_2, \ldots, x_n)$ и совпадение столбцов значений, а при $x_1 = 1 : f(1, x_2, \ldots, x_n) = 1 \oplus g(x_2 \oplus 1, \ldots, x_n \oplus 1) = \overline{g(\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)} = \overline{f(0, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)}$.

Поскольку $g \in P_2(n-1)$, то существует реализующая её СФЭ Σ_g, сложность которой

$$L(\Sigma_g) \lesssim \frac{2^{n-1}}{n}.$$

Можно построить схему Σ_f следующим образом:

Σ_f :



Здесь $\Sigma_\oplus$ — схема, реализующая сложение $a \oplus b$. Такая схема, очевидно, может быть реализована с константной сложностью.

$$L(\Sigma_f) \leqslant n \cdot L\left(\Sigma_\oplus\right) + L\left(\Sigma_g\right) \leqslant L\left(\Sigma_g\right) + O(n) \lesssim \frac{2^{n-1}}{n}.$$

Имеем в результате $L^C(S(n)) \sim \dfrac{2^{n-1}}{n}$.

Задача 3. Установить асимптотику функции Шеннона для сложности класса $\mathcal{Q}(n)$ всех функций, симметричных по первым трем БП, в КС.

Решение. Указанный класс функций можно определить следующим образом. Если $f \in \mathcal{Q}(n)$, то для любых $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in B$, и любой перестановки π индексов $(1, 2, 3)$ справедливо:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, x_4, \ldots, x_n) = f(\sigma_{\pi(1)}, \sigma_{\pi(2)}, \sigma_{\pi(3)}, x_4, \ldots, x_n).$$

Любая функция с таким свойством принадлежит классу $\mathcal{Q}(n)$.

1. **Нижняя оценка.** Любая функция $f \in \mathcal{Q}(n)$ определяется однозначно четырьмя функциями:

   $$\begin{aligned}
   &g_0(x_4, \ldots, x_n) = f(0,0,0,x_4,\ldots,x_n),\\
   &g_1(x_4, \ldots, x_n) = f(0,0,1,x_4,\ldots,x_n) = f(0,1,0,x_4,\ldots,x_n) = f(1,0,0,x_4,\ldots,x_n),\\
   &g_2(x_4, \ldots, x_n) = f(0,1,1,x_4,\ldots,x_n) = f(1,0,1,x_4,\ldots,x_n) = f(1,1,0,x_4,\ldots,x_n),\\
   &g_3(x_4, \ldots, x_n) = f(1,1,1,x_4,\ldots,x_n),
   \end{aligned}$$

   каждая из которых зависит от $(n-3)$ БП. Поэтому

   $$|\mathcal{Q}(n)| = |P_2(n-3)|^4 = \left(2^{2^{n-3}}\right)^4 = 2^{2^{n-1}},$$

   и, аналогично предыдущим задачам, условие (1) выполняется и

   $$L^K(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{2^{n-1}}{n}.$$

2. **Верхняя оценка.** Разложим произвольную функцию $f \in \mathcal{Q}(n)$ по переменным x_1, x_2, x_3:

   $$\begin{aligned}
   f(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n) = {}& \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 f(0,0,0,x_4,\ldots,x_n) \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 f(0,0,1,x_4,\ldots,x_n) \vee\\
   &\vee \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 f(0,1,0,x_4,\ldots,x_n) \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 f(0,1,1,x_4,\ldots,x_n) \vee\\
   &\vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 f(1,0,0,x_4,\ldots,x_n) \vee x_1\bar{x}_2 x_3 f(1,0,1,x_4,\ldots,x_n) \vee\\
   &\vee x_1 x_2\bar{x}_3 f(1,1,0,x_4,\ldots,x_n) \vee x_1 x_2 x_3 f(1,1,1,x_4,\ldots,x_n).
   \end{aligned}$$

Преобразуем это разложение, используя обозначенные выше функции g_0, g_1, g_2, g_3 :

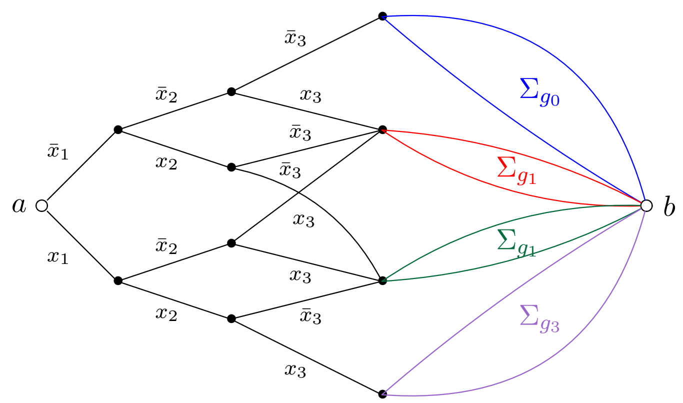
$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \cdot g_0(x_4, \ldots, x_n) \vee \\ \vee (\bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3) \cdot g_1(x_4, \ldots, x_n) \vee \\ \vee (\bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1\bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3) \cdot g_2(x_4, \ldots, x_n) \vee \\ \vee x_1 x_2 x_3 \cdot g_3(x_4, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Согласно утверждению 2, для функций $g_0, g_1, g_2, g_3 \in P_2(n-3)$ существуют реализующие их КС $\Sigma_{g_1}, \Sigma_{g_2}, \Sigma_{g_3}, \Sigma_{g_4}$ соответственно, сложность которых

$$L(\Sigma_{g_i}) \lesssim \frac{2^{n-3}}{n}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

КС Σ_f для f может быть построена исходя из разложения выше:

Σ_f :



При этом:

$$L(\Sigma_f) = 14 + L(\Sigma_{g_1}) + L(\Sigma_{g_2}) + L(\Sigma_{g_3}) + L(\Sigma_{g_4}) \lesssim 4 \cdot \frac{2^{n-3}}{n} = \frac{2^{n-1}}{n}.$$

Имеем в результате $L^K(\mathcal{Q}(n)) \sim \dfrac{2^{n-1}}{n}$.

Синтез самокорректирующихся КС

Будем рассматривать два вида неисправностей в классе КС, которые могут произойти с одним контактом:

(1) Обрыв контакта. Соответствующее ребро удаляется из схемы.
(2) Замыкание контакта. Контакт проводит при любом значении переменной. Можно представлять это как замену контакта проводником (ребром без пометки)

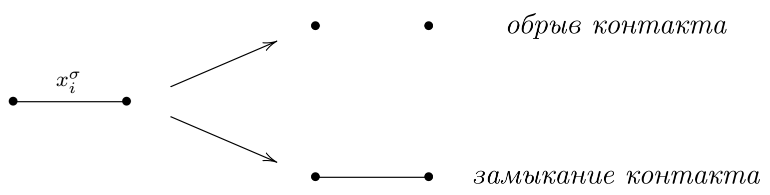
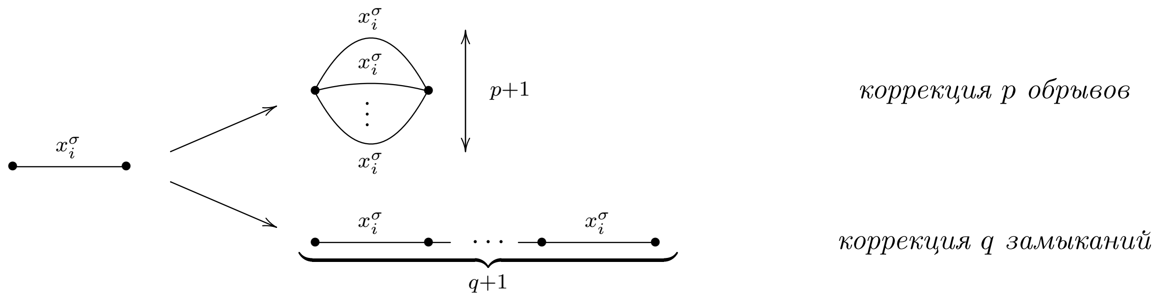


Схема Σ называется (p, q)-самокорректирующейся, $p, q \geqslant 0$, если любая схема Σ', полученная из Σ обрывом не более p контактов и замыканием не более q контактов, эквивалентна Σ.

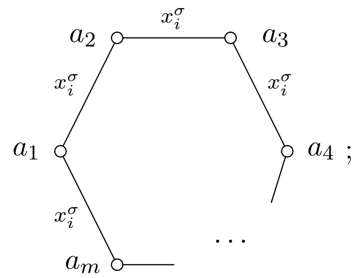
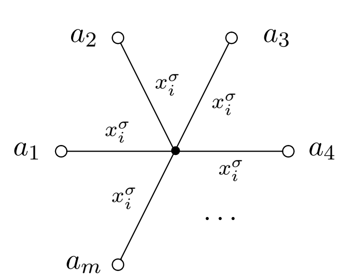
Тривиальным способом построения самокорректирующейся схемы является дублирование контактов. Для коррекции p обрывов можно заменить каждый контакт на $p+1$ параллельных одинаковых ему, а для коррекции q замыканий — на $q+1$ последовательных.



Кроме такого способа для решения задач пригодится метод нетривиальной коррекции одного обрыва или одного замыкания в т. н. однородных подсхемах.

Будем называть однородной любую связную КС с неразделенными полюсами, состоящую из контактов одного и того же типа. В любой такой КС, состоящей из контактов вида x_i^σ, функция проводимости между любыми двумя полюсами равна x_i^σ.

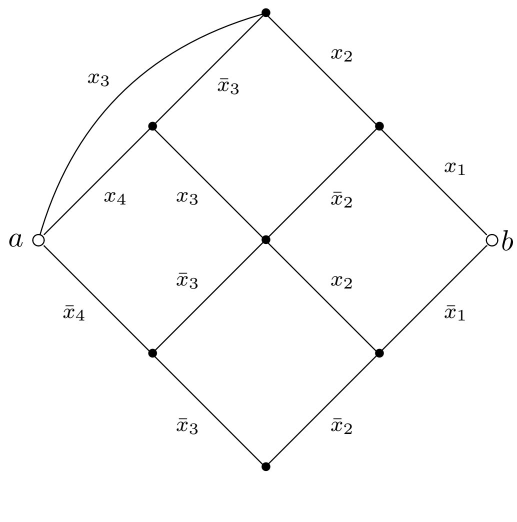
Пусть S — однородная КС, состоящая из контактов x_i^σ, с полюсами $a_1, \ldots, a_m$. Тогда она эквивалентна (1,0)-самокорректирующейся схеме $C_m(x_i^\sigma)$ и (0,1)-самокорректирующейся схеме $Z_m(x_i^\sigma)$:

$C_m(x_i^\sigma)$:  ; $Z_m(x_i^\sigma)$: 

При этом $L(C_m(x_i^\sigma)) = L(Z_m(x_i^\sigma)) = m$.

Представление КС Σ в виде объединения ее однородных подсхем без общих контактов будем называть однородным разбиением КС Σ, а минимальное число подсхем в таких разбиениях будем обозначать через $\zeta(\Sigma)$. Если $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_\zeta$ — однородное разбиение КС Σ, а эквивалентная ей КС Σ' получается из Σ в результате замены каждой подсхемы Σ_i на эквивалентную ей Σ_i', то $\Sigma \sim \Sigma'$. Если при этом все замены производились на схемы вида C_m, то Σ' корректирует 1 обрыв, если же на Z_m, то одно замыкание. Заметим, что при этом $L(\Sigma') \leqslant L(\Sigma) + \zeta$.

Задача 1. Построить по КС Σ :

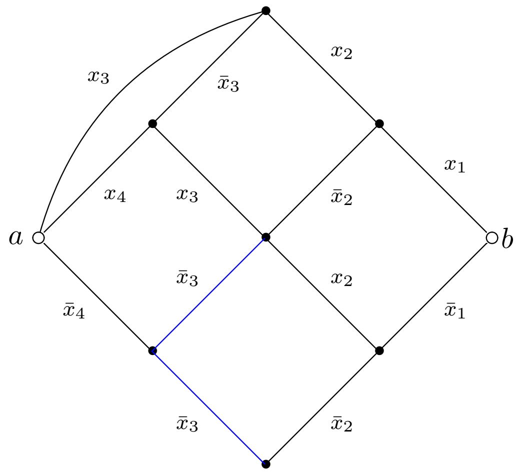


эквивалентную ей КС, корректирующую

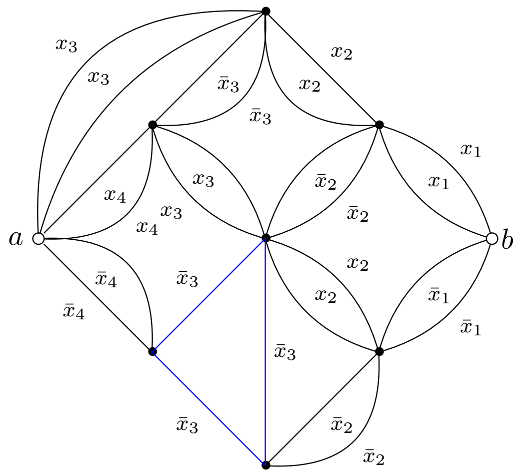
1) один обрыв,
2) одно замыкание

и имеющую сложность не более 25.

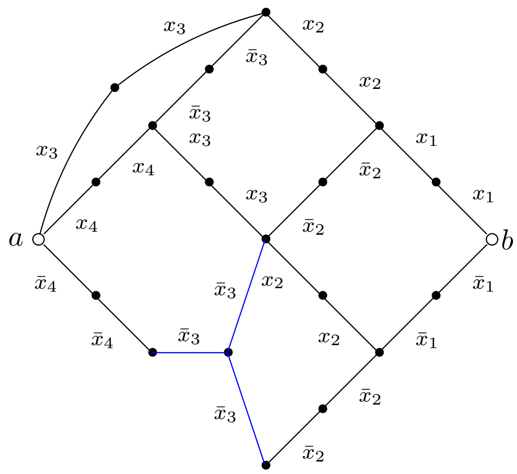
Решение. $L(\Sigma) = 13$, поэтому если воспользоваться методом дублирования каждого контакта, то полученная схема будет иметь сложность 26, что не удовлетворяет условию задачи. Заметим, что в схеме Σ можно найти одну однородную подсхему Σ' из более одного контакта:



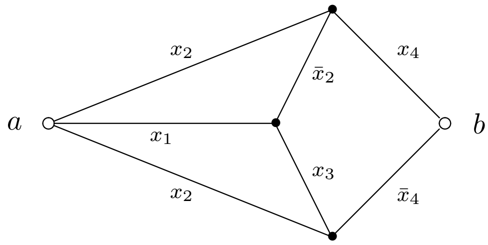
Для случая коррекции одного обрыва все остальные контакты продублируем параллельно, а подсхему Σ' заменим на цикл $C_3(x_3)$:



В полученной схеме 25 контактов и она $(1,0)$-самокорректирующаяся. Для случая коррекции одного замыкания все остальные контакты продублируем последовательно, а подсхему Σ' заменим на схему $Z_3(x_3)$:

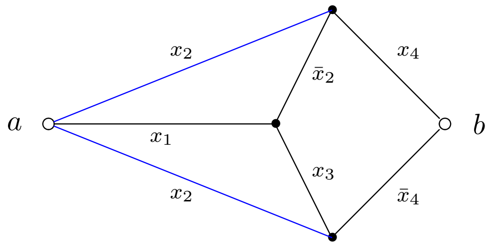


Задача 2. Построить по КС Σ :

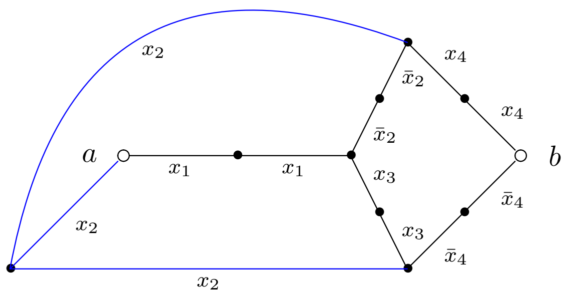


эквивалентную ей КС, корректирующую 1 замыкание, и имеющую сложность не более 13.

Решение. В схеме Σ можно найти одну однородную подсхему Σ' из более одного контакта:

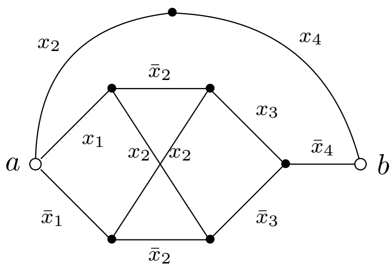


Для случая коррекции одного замыкания все остальные контакты продублируем последовательно, а подсхему Σ' заменим на звезду $Z_3(x_2)$:



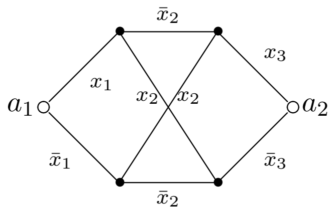
В полученной схеме 13 контактов и она $(0, 1)$-самокорректирующаяся.

Задача 3. Построить по КС Σ :

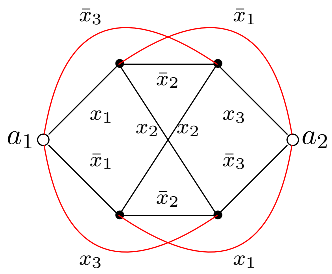


эквивалентную ей КС, корректирующую 1 обрыв, и имеющую сложность не более 18.

Решение. Рассмотрим следующую подсхему в Σ :

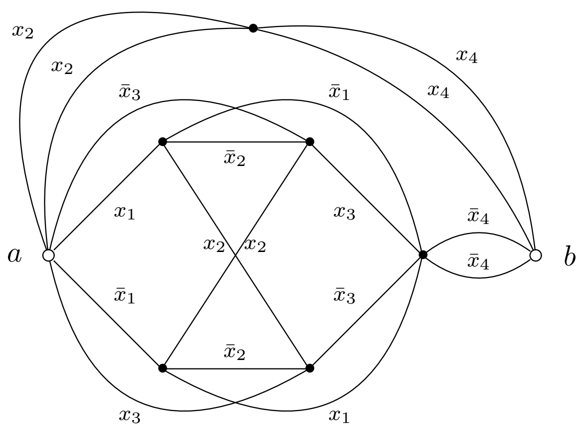


Это схема Кардо и она реализует линейную функцию $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1$. Эквивалентную ей схему, корректирующую 1 обрыв, можно построить добавлением всего 4 контактов, не влияющих на её проводимость:



Нетрудно убедиться, что такая схема корректирует 1 обрыв.

Для коррекции 1 обрыва в исходной схеме Σ заменим подсхему Кардо на построенную выше схему с добавлением четырех контактов, а остальные три контакта продублируем:



Полученная (1,0)-самокорректирующаяся схема имеет сложность 18.