Решение задач семинара № 5 по курсу “Основы кибернетики” для групп 3-го потока 3-го курса факультета ВМК МГУ. Тема: “Сложность булевых функций и методы синтеза схем на основе ДНФ”

На этом занятии речь пойдет о построении схем из функциональных элементов (СФЭ) и контактных схем (КС), реализующих булевы функции.

Напомним, что сложностью СФЭ S' называется число $L(S')$ функциональных элементов в ней, а сложностью КС S'' называется число $L(S'')$ контактов в ней.

Под сложностью реализации системы булевых функций F в классе СФЭ над базисом B понимается величина

$$L_B^{\mathrm{C}}(F) = \min_{\text{СФЭ } S \text{ над } B, \text{ реализ. } F} L(S).$$

Если $B = \{xy, x \vee y, \bar{x}\}$, то нижний индекс в $L_B^{\mathrm{C}}(F)$ не пишется.

Аналогично, под сложностью реализации системы булевых функций F в классе КС понимается величина

$$L^{\text{КС}}(F) = \min_{\text{КС } S, \text{ реализ. } F} L(S).$$

В основе построения схем, изучаемых на этом занятии, лежат формульные представления функций в виде ДНФ или КНФ, которые, возможно, подверглись дальнейшим преобразованиям.

Для получения нижних оценок сложности схем могут оказаться полезными следующие утверждения.

Утверждение 16.1 *Если булева функция (БФ) $f(x_1, \ldots, x_n)$ существенно зависит от всех своих БП, то*

$$L^{\mathrm{C}}(f) \geq n - 1, \qquad L^{\mathrm{K}}(f) \geq n.$$

Если при этом БФ f не является монотонной БФ (каждая БП x_i, $i \in \{1, \ldots, k\}$, не является ни монотонной, ни инмонотонной БП БФ f), то

$$L^{\mathrm{C}}(f) \geq n \qquad (\textit{соответственно } L^{\mathrm{K}}(f) \geq n + k).$$

Утверждение 16.2 *Для системы $F = (f_1, \ldots, f_m)$, состоящей из попарно различных БФ, отличных от констант (от переменных), справедливо неравенство*

$$L^{\mathrm{K}}(F) \geq m \qquad (\textit{соответственно } L_B^{\mathrm{C}}(F) \geq m).$$

Утверждение 16.3 *Если для существенной БП x_n БФ f, $f \in P_2(n)$, и для любого (некоторого) σ, $\sigma \in B$, БФ $f|_{x_n=\sigma} = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, \sigma) \not\equiv 0, 1$, то*

$$L_{\&,\vee}^{C}(f) \geq \min\{L_{\&,\vee}^{C}(f|_{x_n=0}), L_{\&,\vee}^{C}(f|_{x_n=1})\} + 2$$
$$\Big(\textit{соответственно } L_{\&,\vee}^{C}(f) \geq L_{\&,\vee}^{C}(f|_{x_n=\sigma}) + 1\Big).$$

Утверждение 16.4 *Если система БФ $F = (f_1, \ldots, f_m)$ состоит из попарно различных БФ от БП $X(n)$, отличных от 0 и 1, то*

$$L^{\text{К}}(F) \geqslant 2^{1-n} \sum_{j=1}^{m} |N_{f_j}|.$$

Пронумерованные задачи взяты (в ряде случаев — с незначительными модификациями) из главы X задачника [1].

1.1(2). Для булевой функции $x \sim y$ построить схему из функциональных элементов (СФЭ) сложности 4 в базисе $B = \{xy, x \vee y, \bar{x}\}$ и контактную схему (КС) сложности 4. Доказать минимальность построенных схем.

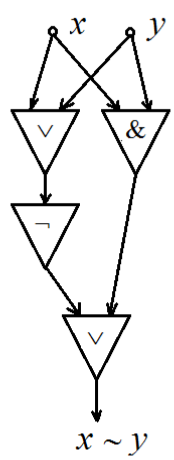

Рис. 1.

Решение. 1) СФЭ сложности 4 в базисе $B = \{xy, x \vee y, \bar{x}\}$, реализующая функцию $x \sim y$, приведена на рис. 1 и моделирует последнюю формулу в цепочке равенств:

$$x \sim y = \bar{x}\bar{y} \vee xy = \overline{(x \vee y)} \vee xy$$

(некоторая экономия достигается за счет применения правила де Моргана).

Докажем минимальность этой схемы, т. е. докажем, что $L^{\text{С}}(x \sim y) \geq 4$.

I способ. Очевидно, в любой минимальной СФЭ S в базисе $B = \{xy, x \vee y, \bar{x}\}$, реализующей $x \sim y$, найдется двухвходовый функциональный элемент E, к которому от каждого входа схемы ведет либо дуга, либо ориентированный путь длины 2, промежуточная вершина которого есть инвертор.

Покажем, что в S найдется по крайней мере 3 различных двухвходовых элемента.

Заметим: в S найдется отличный от E двухвходовый функциональный элемент E', к которому от входа y схемы ведет либо дуга, либо ориентированный путь длины 2, промежуточная вершина которого есть инвертор (иначе можно так подобрать значение x, чтобы значение на выходе элемента E, и, следовательно, значение на выходе всей схемы не зависело от значения y, но это противоречило бы тому, что схема реализует функцию $x \sim y$).

Аналогично (в силу симметричности БФ $x \sim y$), в S найдется отличный от E двухвходовый функциональный элемент E'' (возможно, совпадающий с E'), к которому от входа x схемы ведет либо дуга, либо ориентированный путь длины 2, промежуточная вершина которого есть инвертор.

Таким образом, в построенной части схемы S или уже́ имеется 3 двухвходовых элемента (E, E', E''), или имеется 2 двухвходовых элемента (E, E'), ко всем входам которых ведут дуги в этой части схемы. В последнем случае надлежит добавить еще хотя бы один двухвходовый элемент, чтобы в схеме имелся ориентированный путь от каждого элемента E, E' к выходу схемы.

Значит, в S найдется по крайней мере 3 различных двухвходовых элемента.

Вспоминая, что функция $x \sim y$ не является монотонной, заключаем: кроме трех двухвходовых элементов, в S должен быть и по крайней мере один инвертор.

Следовательно, $L^{\mathrm{C}}(x \sim y) \geq 4$, ч. т. д.

II способ. Заметим, что в силу принципа двойственности:

$$L^{\mathrm{C}}(x \oplus y) = L^{\mathrm{C}}(x \sim y), \tag{1}$$

ибо $x \oplus y = (x \sim y)^*$. Предположим, что $L^{\mathrm{C}}(x \sim y) \leq 3$, и пусть S — минимальная схема, реализующая одну из функций $x \oplus y$, $x \sim y$. Заметим: выходной элемент схемы S в силу ее минимальности не может быть инвертором, так как иначе на выходе элемента, выход которого подается на вход этого инвертора, реализуется другая из функций $x \oplus y$, $x \sim y$ (поскольку $x \oplus y = \overline{(x \sim y)})$, — противоречие с равенством (1). Значит, выходной элемент E схемы S — двухвходовый. С учетом принципа двойственности можно, не ограничивая общности, считать, что E — конъюнктор. Невозможно, чтобы на какой-то вход E подавалась бы дуга, ведущая от входа схемы: допустим, ко входу E ведет дуга от входа x, тогда, полагая $x = 0$, получаем, что, независимо от значения y, на выходе S возникает 0, но тогда S не может реализовать ни $x \oplus y$, ни $x \sim y$. Также невозможен (в силу минимальности S) случай подачи на входы E дуг, ведущих от одного функционального элемента. Значит, ко входам E ведут дуги от разных элементов E', E''. Но тогда в S уже имеется 3 элемента. Заметим: обе функции $x \oplus y$, $x \sim y$ — немонотонные. Поэтому хотя бы один из элементов E', E'' — инвертор, и к его входу ведет дуга от входа схемы, — допустим, от входа x. Тогда, полагая $x = 1$, увидим: независимо от значения y, на выходе S возникает 0, но в этом случае S не может реализовать ни $x \oplus y$, ни $x \sim y$. Противоречие. Значит, $L^{\mathrm{C}}(x \sim y) \geq 4$, ч. т. д.

2) КС сложности 4, реализующая функцию $x \sim y$, приведена на рис. 2 и моделирует формулу $\bar{x}\bar{y} \vee xy$.

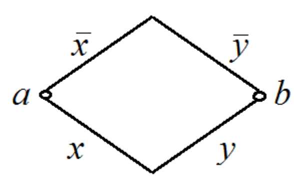

Рис. 2.

Минимальность этой схемы легко устанавливается на основании следующего утверждения (см. утв. 16.1): *если у булевой функции f имеется n существенных переменных, и среди них есть k переменных, по каждой из которых эта функция немонотонна и не инмонотонна (т. е. не антимонотонна), то $L^{\mathrm{KC}}(f) \geq n + k$.*

Заметим: у функции $x \sim y$ имеется 2 существенных переменных, по каждой из которых эта функция немонотонна и не инмонотонна, значит, $L^{\mathrm{KC}}(x \sim y) \geq 2 + 2 = 4$, ч. т. д.

1.1(3). Для булевой функции $m(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ построить СФЭ сложности 4 в базисе $B = \{xy, x \vee y, \bar{x}\}$ и КС сложности 5. Доказать минимальность построенных схем.

Решение. 1) СФЭ сложности 4 в базисе $B = \{xy, x \vee y, \bar{x}\}$, реализующая функцию $m(x_1, x_2, x_3)$, моделирует последнюю формулу в цепочке равенств:

$$m(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3 = x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2x_3$$

(некоторая экономия достигается за счет применения тождества дистрибутивности).

Докажем минимальность этой схемы, т. е. докажем, что $L^{\mathrm{C}}(m) \geq 4$.

Предположим, что $L^{\mathrm{C}}(m) \leq 3$, и пусть S — минимальная схема, реализующая функцию m.

Пусть E — ближайший к выходу схемы двухвходовый элемент схемы S (т. е. либо E — выходной элемент, либо от E к выходу схемы ведет цепочка инверторов). С учетом принципа двойственности, а также самодвойственности функции m можно, не ограничивая общности, считать, что E — конъюнктор.

Невозможно, чтобы на какой-то вход E подавалась бы дуга, ведущая от входа схемы: допустим, ко входу E ведет дуга от входа x_i, тогда, полагая $x_i = 0$, получаем, что, независимо от значений двух других переменных, на выходе S возникает одно и то же значение, но тогда S не может реализовывать $m(x_1, x_2, x_3)$.

Также невозможен (в силу минимальности S) случай подачи на входы E дуг, ведущих от одного функционального элемента.

Значит, ко входам E ведут дуги от разных элементов E', E''. Но тогда в S уже имеется 3 элемента E, E', E''. Это означает, что других элементов в схеме нет, а элемент E — выходной элемент схемы.

Ни один из элементов E', E'' не может быть инвертором. Действительно, пусть, не ограничивая общности, E' — инвертор, на вход которого подается переменная x_i. Тогда, полагая $x_i = 1$, заметим: значение на выходе схемы S равно 0 независимо от значений остальных переменных. Но такая схема S не может реализовывать функцию m.

Ни один из элементов E', E'' не может быть конъюнктором. Действительно, пусть, не ограничивая общности, E' — конъюнктор, на один из входов которого подается переменная x_i. Тогда, полагая $x_i = 0$, заметим: значение на выходе схемы S равно 0 независимо от значений остальных переменных. Но такая схема S не может реализовывать функцию m.

Значит, оба элемента E', E'' — дизъюнкторы. У этих элементов в совокупности имеется 4 входа, а булева функция m зависит от 3 переменных. Следовательно, по крайней мере одна переменная, — скажем, x_i, — подается по крайней мере на 2 из 4 входов элементов E', E''. Если среди таких входов имеются два входа одного элемента, то этот элемент выполняет роль тождественной функции, и его можно было бы удалить из схемы, что противоречит минимальности схемы S. Если же имеет место иная ситуация, то, полагая $x_i = 1$, получим на выходе схемы значение 1 независимо от значений других переменных. Но в этом случае S не может реализовывать функцию m. Противоречие. Значит, $L^{\mathrm{C}}(m) \geq 4$, ч. т. д.

2) КС сложности 5, реализующая функцию m, моделирует формулу $x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2x_3$.

Установим минимальность этой схемы. Предположим, что $L^{\mathrm{KC}}(m) \leq 4$, и пусть S — минимальная двухполюсная КС, реализующая функцию m.

Оказывается, никакой контакт в S не может соединять два полюса схемы. Действительно, если бы такой контакт x_i^{σ} ($i \in \{1, 2, 3\}$, $\sigma \in \{0, 1\}$) нашелся бы, то схема проводила бы всякий раз, когда $x_i = \sigma$, но в этом случае она не могла бы реализовывать функцию m.

Аналогично, в S нет полюса, которому был бы инцидентен ровно один контакт. Действительно, если бы такой полюс существовал и ему был бы инцидентен контакт

x_i^σ ($i \in \{1,2,3\}$, $\sigma \in \{0,1\}$), то схема не проводила бы всякий раз, когда $x_i = \bar{\sigma}$, но в этом случае она не могла бы реализовывать функцию m.

Теперь ясно, что, в силу предположения $L(S) \le 4$, схема S моделирует либо формулу $x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \vee x_{i_3}^{\sigma_3} x_{i_4}^{\sigma_4}$ (рис. 3), либо формулу $(x_{i_1}^{\sigma_1} \vee x_{i_2}^{\sigma_2})(x_{i_3}^{\sigma_3} \vee x_{i_4}^{\sigma_4})$ (рис. 4), $i_j \in \{1,2,3\}$, $\sigma_j \in \{0,1\}$, $j = \overline{1,3}$.

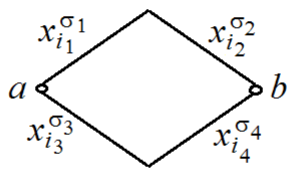

Рис. 3.

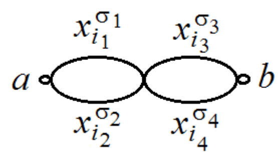

Рис. 4.

Рассмотрим сначала случай моделирования схемой S формулы $x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \vee x_{i_3}^{\sigma_3} x_{i_4}^{\sigma_4}$. В силу минимальности этой схемы $i_1 \ne i_2$, $i_3 \ne i_4$.

Если бы существовало число j, $j \in \{1,2,3\}$, такое, что $\sigma_j = 0$, то схема S не могла бы реализовывать функцию m. Действительно, пусть, например, $j = 1$ и $\sigma_1 = 0$. Тогда схема проводит всякий раз, когда $x_{i_1} = 0$ и $x_{i_2} = \sigma_2$, что невозможно.

Следовательно, схема S моделирует формулу $x_{i_1} x_{i_2} \vee x_{i_3} x_{i_4}$. Поскольку $m(x_1, x_2, x_3)$ существенно зависит ровно от 3 переменных, имеем: найдутся неравные друг другу k, l (лежащие в множестве $\{1,2,3\}$) такие, что $i_k = i_l$. Но тогда при $x_{i_k} = 0$ схема S не проводит, и, значит, не реализует функцию m.

Остается рассмотреть случай моделирования схемой S формулы $(x_{i_1}^{\sigma_1} \vee x_{i_2}^{\sigma_2})(x_{i_3}^{\sigma_3} \vee x_{i_4}^{\sigma_4})$. В силу минимальности этой схемы $i_1 \ne i_2$, $i_3 \ne i_4$.

Если бы существовало число j, $j \in \{1,2,3\}$, такое, что $\sigma_j = 0$, то схема S не могла бы реализовывать функцию m. Действительно, пусть, например, $j = 1$ и $\sigma_1 = 0$. Тогда схема не проводит всякий раз, когда $x_{i_1} = 1$ и $x_{i_2} = \bar{\sigma}_2$, что невозможно.

Следовательно, схема S моделирует формулу $(x_{i_1} \vee x_{i_2})(x_{i_3} \vee x_{i_4})$. Поскольку $m(x_1, x_2, x_3)$ существенно зависит ровно от 3 переменных, имеем: найдутся неравные друг другу k, l (лежащие в множестве $\{1,2,3\}$) такие, что $i_k = i_l$. Но тогда при $x_{i_k} = 1$ схема S проводит, и, значит, не реализует функцию m.

Итак: схема S сложности не более 4 не может реализовывать функцию m, поэтому $L^{\text{КС}}(m) \ge 4$, ч. т. д.

1.1(4). Для булевой функции $f(x_1, x_2, x_3) = (01111110)$ построить СФЭ сложности 6 в базисе $B = \{xy, x \vee y, \bar{x}\}$ и КС сложности 6. Доказать минимальность построенной КС.

Решение. 1) СФЭ сложности 6 в базисе $B = \{xy, x \vee y, \bar{x}\}$, реализующая функцию $f(x_1, x_2, x_3)$, моделирует последнюю формулу в цепочке равенств:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)\overline{(x_1 x_2 x_3)}$$

(некоторая экономия достигается за счет применения правила де Моргана).

2) КС сложности 6, реализующая функцию $f(x_1, x_2, x_3)$, моделирует формулу $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$.

Минимальность этой схемы легко устанавливается на основании уже́ упоминавшегося утверждения (см. утв. 16.1): *если у булевой функции f имеется n существенных переменных, и среди них есть k переменных, по каждой из которых эта функция немонотонна и не инмонотонна (т. е. не антимонотонна), то $L^{\text{КС}}(f) \ge n + k$.*

Заметим: у функции f имеется 3 существенных переменных, по каждой из которых эта функция не монотонна и не инмонотонна. В силу симметричности функции f этот факт достаточно установить для переменной x_1. Поскольку $f(0,0,0) = 0$ и

$f(1,0,0)=1$, функция f не инмонотонна по переменной x_1. Поскольку $f(1,1,1)=0$ и $f(0,1,1)=1$, функция f не монотонна по переменной x_1. Значит, $L^{\text{КС}}(f)\geq 3+3=6$, ч. т. д.

Задача. Для мультиплексорной функции порядка 1 $\mu_1(x_1,y_0,y_1)=\bar{x}_1y_0\vee x_1y_1$ построить минимальную СФЭ в базисе $B=\{xy,x\vee y,\bar{x}\}$ и минимальную КС. Обосновать минимальность построенных схем.

Решение. 1) СФЭ сложности 4 в базисе $B=\{xy,x\vee y,\bar{x}\}$, реализующая функцию $\mu_1(x_1,y_0,y_1)$, моделирует формулу $\bar{x}_1y_0\vee x_1y_1$.

Докажем минимальность этой схемы, т. е. докажем, что $L^{\text{С}}(\mu_1)\geq 4$.

I способ. Заметим:

$$\mu_1|_{y_0=0}=\mu_1(x_1,0,y_1)=x_1y_1\not\equiv\text{const},\ \ \mu_1|_{y_0=1}=\mu_1(x_1,1,y_1)=\bar{x}_1\vee y_1\not\equiv\text{const}.$$

Значит, по утв. 16.3:

$$L^{\text{С}}_{\&,\vee}(\mu_1)\geq\min\{L^{\text{С}}_{\&,\vee}(\mu_1|_{y_0=0}),L^{\text{С}}_{\&,\vee}(\mu_1|_{y_0=1})\}+2\geq 3,$$

откуда с учетом немонотонности функции μ_1 и необходимости добавления инвертора и вытекает нижняя оценка $L^{\text{С}}(\mu_1)\geq 4$.

II способ. Предположим, что $L^{\text{С}}(\mu_1)\leq 3$, и пусть S — минимальная схема, реализующая функцию μ_1.

Пусть E — ближайший к выходу схемы двухвходовый элемент схемы S (т. е. либо E — выходной элемент, либо от E к выходу схемы ведет цепочка инверторов).

Невозможно, чтобы на какой-то вход E подавалась бы дуга, ведущая от входа схемы: допустим, ко входу E ведет дуга от входа x_i, тогда, полагая $x_i=0$ для случая, когда E — конъюнктор, и полагая $x_i=1$ для случая, когда E — дизъюнктор, получаем, что на выходе S возникает одно и то же значение независимо от значений двух других переменных, но тогда S не может реализовывать μ_1.

Также невозможен (в силу минимальности S) случай подачи на входы E дуг, ведущих от одного функционального элемента.

Значит, ко входам E ведут дуги от разных элементов E', E''. Но тогда в S уже имеется 3 элемента E, E', E''. Это означает, что других элементов в схеме нет, а элемент E — выходной элемент схемы.

Ни один из элементов E', E'' не может быть инвертором. Действительно, пусть, не ограничивая общности, E' — инвертор, на вход которого подается переменная x_i. Тогда, полагая $x_i=1$ для случая, когда E — конъюнктор, и полагая $x_i=0$ для случая, когда E — дизъюнктор, заметим: значение на выходе схемы S фиксировано независимо от значений остальных переменных. Но такая схема S не может реализовывать функцию μ_1.

Но в этом случае получаем, что функция, реализуемая схемой S, — монотонная, в отличие от μ_1. (Немонотонность μ_1 следует из того, что $\mu_1(0,1,0)=1$ и $\mu_1(1,1,0)=0$). Противоречие. Значит, $L^{\text{С}}(\mu_1)\geq 4$, ч. т. д.

2) КС сложности 4, реализующая функцию $f(x_1,x_2,x_3)$, моделирует формулу $\bar{x}_1y_0\vee x_1y_1$.

Заметим: у функции μ_1 имеется 3 существенных переменных, по одной из которых (x_1) эта функция не монотонна и не инмонотонна. (Поскольку $\mu_1(0,1,0)=1$ и $\mu_1(1,1,0)=0$, функция μ_1 не монотонна по переменной x_1. Поскольку $\mu_1(0,0,1)=0$ и $\mu_1(1,0,1)=1$, функция μ_1 не инмонотонна по переменной x_1). Значит, по утв. 16.1: $L^{\text{КС}}(\mu_1)\geq 3+1=4$, ч. т. д.

Задача. Для функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2)x_3 \vee (\bar{x}_1 \vee x_2)x_4$ построить минимальную КС. Обосновать минимальность этой схемы.

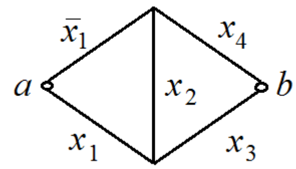

Рис. 5.

Решение. КС сложности 5, реализующая функцию $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, приведена на рис. 5.

Заметим: у функции f имеется 4 существенных переменных, по одной из которых (x_1) эта функция не монотонна и не инмонотонна. (Поскольку $f(0,0,0,1) = 1$ и $f(1,0,0,1) = 0$, функция f не монотонна по переменной x_1. Поскольку $f(0,0,1,0) = 0$ и $f(1,0,1,0) = 1$, функция f не инмонотонна по переменной x_1). Значит, по утв. 16.1: $L^{\text{КС}}(f) \geq 4 + 1 = 5$, ч. т. д.

2.4(1). Для функции $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2x_3$ построить минимальную КС. Обосновать минимальность этой схемы.

Решение. КС сложности 6, реализующая функцию $f(x_1, x_2, x_3)$, моделирует последнюю формулу в цепочке равенств:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2x_3 = \bar{x}_1(x_2x_3) \vee x_1\overline{(x_2x_3)} = \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3).$$

Заметим: у функции f имеется 3 существенных переменных, по каждой из которых эта функция не монотонна и не инмонотонна. (Поскольку $f(0,0,0) = 0$ и $f(1,0,0) = 1$, функция f не инмонотонна по переменной x_1. Поскольку $f(0,1,1) = 1$ и $f(1,1,1) = 0$, функция f не монотонна по переменной x_1. Поскольку $f(0,0,1) = 0$ и $f(0,1,1) = 1$, функция f не инмонотонна по переменной x_2. Поскольку $f(1,0,1) = 1$ и $f(1,1,1) = 0$, функция f не монотонна по переменной x_2. Поскольку $f(0,1,0) = 0$ и $f(0,1,1) = 1$, функция f не инмонотонна по переменной x_3. Поскольку $f(1,1,0) = 1$ и $f(1,1,1) = 0$, функция f не монотонна по переменной x_3). Значит, по утв. 16.1: $L^{\text{КС}}(f) \geq 3 + 3 = 6$, ч. т. д.

Литература

1. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004.