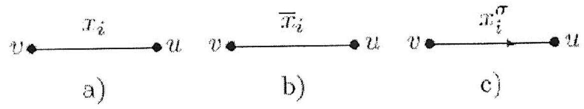
Материалы к семинару № 4 по основам кибернетики: моделирование формул и π-схем, эквивалентные преобразования контактных схем (КС)

Рассмотрим класс контактных схем, в которых реализация ФАЛ осуществляется не с помощью преобразования входных значений в выходные, как это происходит, например, в схемах из функциональных элементов (см. §4), а в результате передачи значений по ребрам графа, проводимостью которого «управляют» входные БП. Ребро или дуга графа с пометкой x_i ($\overline{x}_i$) называется *замыкающим* (соответственно *размыкающим*) контактом БП x_i (см. рис. 6.1).



Считается, что контакт вида x_i^σ, $\sigma \in \{0, 1\}$, проводит тогда и только тогда, когда $x_i = \sigma$, причем ориентированный контакт, то есть контакт, связанный с дугой, проводит только в соответствующем направлении.

Сеть Σ с входами $a_1', \ldots, a_p'$ и выходами $a_1'', \ldots, a_q''$, в которой все ребра (дуги) помечены переменными $x_1, \ldots, x_n$ или их отрицаниями $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$, называется (p, q)-*контактной схемой* (КС) *от БП* $x_1, \ldots, x_n$ и обозначается $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ или $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; a_1', \ldots, a_p'; a_1'', \ldots, a_q'')$. При этом число контактов называется *сложностью* КС Σ и обозначается через $L(\Sigma)$. На рис. 6.3a–c показаны некоторые конкретные КС от БП x_1, x_2, x_3 с входом a_1 и выходами a_2, a_3.

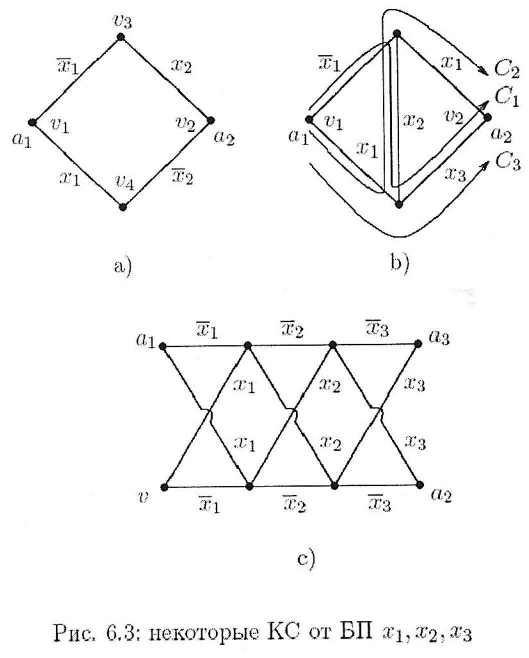


Рис. 6.3: некоторые КС от БП x_1, x_2, x_3

Пусть Σ — КС от БП $X(n)$ и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — набор из B^n. Определим сеть $\Sigma|_\alpha$ как сеть, получающуюся из Σ в результате удаления всех ребер (дуг) с пометками $x_1^{\overline{\alpha}_1}, \ldots, x_n^{\overline{\alpha}_n}$, то есть ребер, которые не проводят на наборе α, и снятия пометок с остальных ребер Σ. Для вершин v и u КС Σ введем *функцию проводимости от вершины v к вершине u* как ФАЛ $g_{v,u}(x_1, \ldots, x_n)$, которая равна 1 на наборе $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B^n$ тогда и только тогда, когда в сети $\Sigma|_\alpha$ существует $(v-u)$-цепь, то есть тогда и только тогда, когда в Σ имеется цепь из проводящих на наборе α контактов вида $x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n}$, идущая из v в u.

Рассмотрим теперь параллельно-последовательные или, иначе, π-схемы, которые являются частным случаем КС.

Простейшей π-схемой считается любая $(1,1)$-КС, которая состоит из одного контакта, соединяющего полюса (см. рис. 6.6a). Если π-схемы Σ_1 и Σ_2 уже определены, то $(1,1)$-КС Σ' (Σ''), которая получается в результате их параллельного (соответственно последовательного) соединения (см. рис. 6.6b и 6.6c) тоже является π-схемой. Заметим, что при этом вход (выход) Σ' является результатом отождествления входов (соответственно выходов) Σ_1 и Σ_2, тогда как входом Σ'' является вход Σ_1, выходом Σ'' — выход Σ_2, а выход Σ_1 отождествляется с входом Σ_2 и становится внутренней вершиной Σ''. Легко видеть, что π-схема, показанная на рис. 6.6a, реализует ФАЛ x_i^σ, а π-схемы Σ' и Σ'' (см. рис. 6.6b и 6.6c) — ФАЛ $f_1 \vee f_2$ и $f_1 \& f_2$ соответственно, где f_1 и f_2 ФАЛ, реализуемые π-схемами Σ_1 и Σ_2 соответственно.

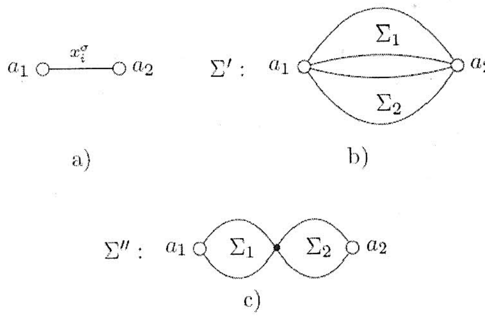


Рис. 6.6: к определению π-схемы

Лемма 6.1. *Любой π-схеме Σ можно сопоставить эквивалентную ей формулу $\mathcal{F}$ из $\mathcal{U}^\Phi$ с поднятыми отрицаниями такую, что $R(\mathcal{F}) = L(\Sigma)$ и обратно.*

На рис 6.7a показана π-схема, которая реализует ФАЛ $H(x_1, x_2, x_3)$ и соответствует формуле:

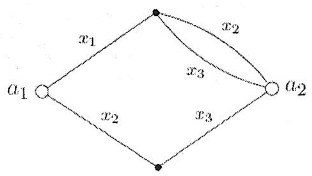
$$H(x_1, x_2, x_3) = x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2 x_3,$$

а на рис. 6.7b — π-схема, которая построена на основе контактного дерева и реализует ФАЛ μ_n — мультиплексорную

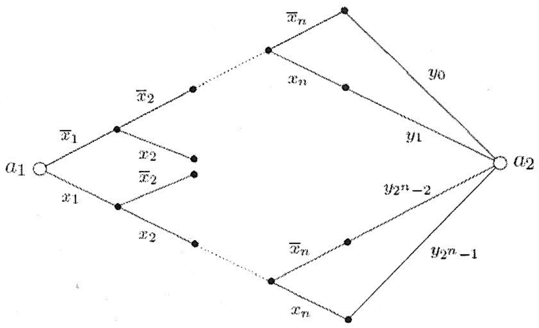
ФАЛ порядка n, — в соответствии с формулой

$$\mu_n(x_1,\ldots,x_n,y_0,\ldots,y_{2^n-1}) =$$
$$= \bigvee_{\sigma_1\in B} x_1^{\sigma_1}\left(\bigvee_{\sigma_2\in B} x_2^{\sigma_2}\left(\cdots\left(\bigvee_{\sigma_n\in B} x_n^{\sigma_n} y_{\nu(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)}\right)\cdots\right)\right).$$

Схема, моделирующая совершенную ДНФ ФАЛ f, называется *канонической* КС для этой ФАЛ.



a)



b)

Рис. 6.7: примеры π-схем

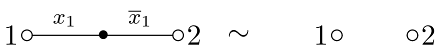
Коноводов В. А.

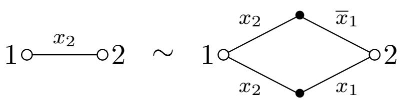
Схемы называются эквивалентными ($\Sigma_1 \sim \Sigma_2$), если реализуют одну и ту же функцию (или одни и те же функции между всеми парами полюсов).

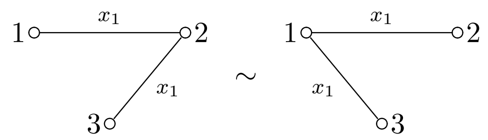
Основные тождества.

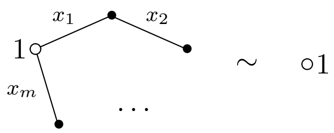
$t_1\colon\ \bullet \ \sim\ \varnothing$

$t_2\colon$ 

$t_3\colon$ 

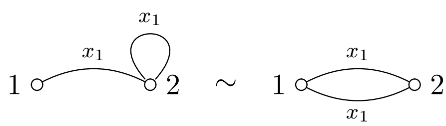
$t_4\colon$ 

$t_5\colon$ 

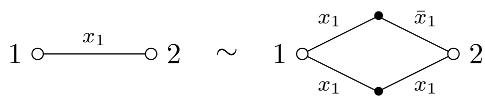
$t_6^{(m)}\colon$ 

Если задано некоторое тождество, то это означает, что вместе с ним заданы тождества, полученные из него:

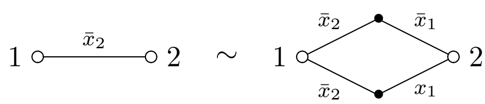
(1) одинаковой перенумерацией полюсов в обеих частях с возможным отождествлением, например, в тождестве t_5 можно отождествить полюса 2 и 3:



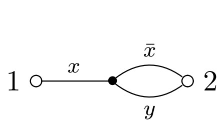
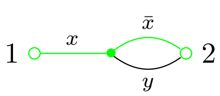
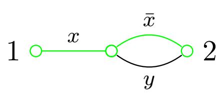
(2) переименованием переменных (в обеих частях тождества одинаковые переменные меняются на одинаковые), например, в тождестве t_4 можно x_2 заменить на x_1:



(3) заменой в обеих частях некоторых переменных на их отрицания, например, в тождестве t_4 можно заменить x_2 на $\bar{x}_2$:



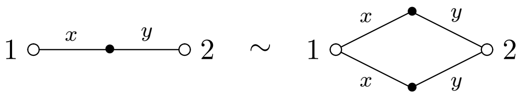
Какие подсхемы можно выделять? Подсхема – это подграф, если говорить грубо. Но важно выделять правильно полюса подсхемы. Если в схеме вершина была полюсом, то она и останется полюсом в подсхеме. Если есть ребро из некоторой вершины подсхемы, идущее вовне этой подсхемы, то есть не принадлежащее ей, то вершина должна быть объявлена полюсом. Кроме того, любую вершину подсхемы можно объявить полюсом.

Почему важно смотреть на полюса? В схеме  нельзя выделить подсхему  и применить тождество t_3, так как внутренняя вершина должна быть полюсом (из нее идет ребро, которое не принадлежит подсхеме) , а в тождестве t_3 внутренняя вершина – не полюс.

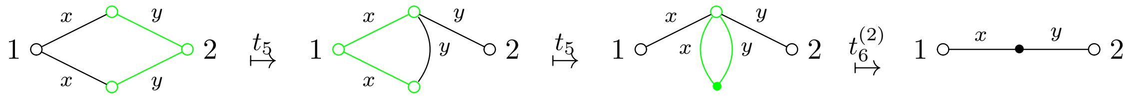
Эквивалентное преобразование состоит в применении тождеств — выделении подсхемы, соответствующей одной части тождества и замены ее на вторую часть. При этом внесенные пометки полюсов снимаются.

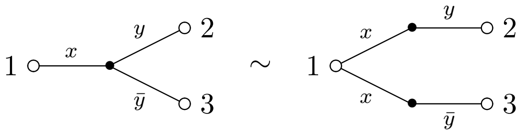
Бесконечная система тождеств $\{t_1, \ldots, t_5, t_6^{(1)}, t_6^{(2)}, \ldots, t_6^{(m)}, \ldots\}$ является полной. Это означает, что для любых двух эквивалентных схем существует преобразование на основе этой системы тождеств, переводящее одну из них в другую. При этом *конечной* полной системы тождеств не существует.

Примеры решения задач. Во всех задачах требуется построить эквивалентное преобразование на основе системы основных тождеств, переводящее одну из схем в другую.

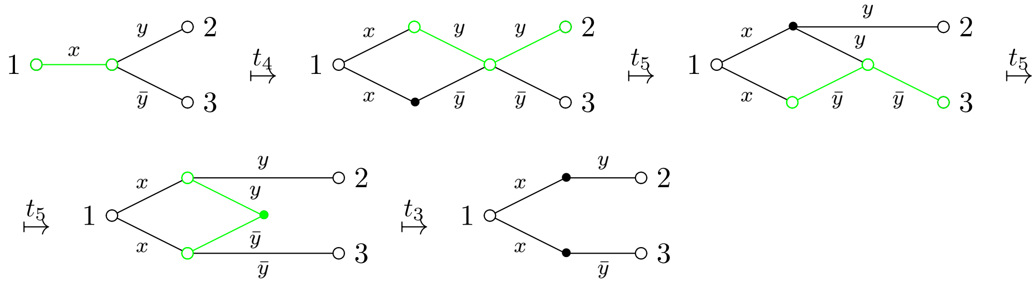
1). 

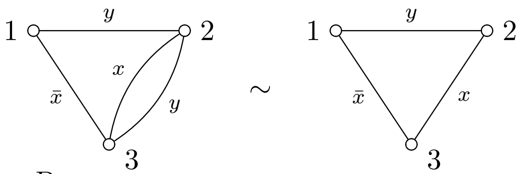
Решение:



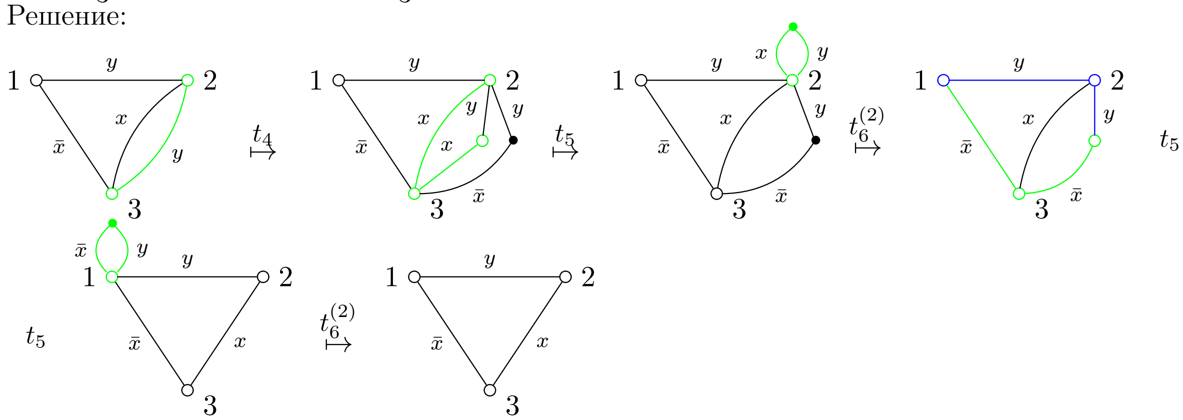
2). 

Решение:

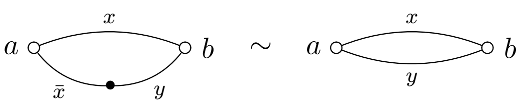


3). 

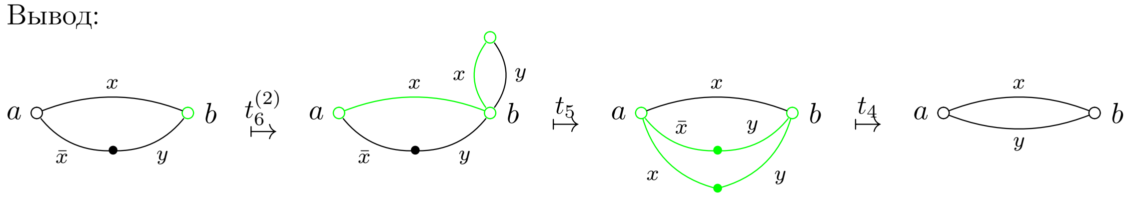
Решение:

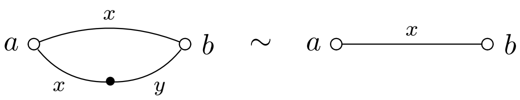


Эквивалентности, вывод которых желательно помнить.

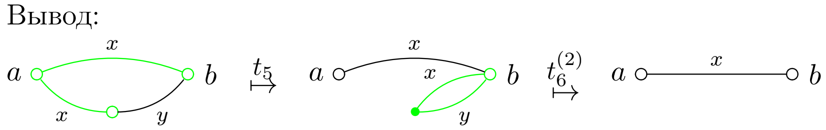
1). 

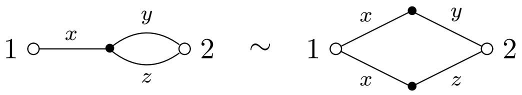
Вывод:



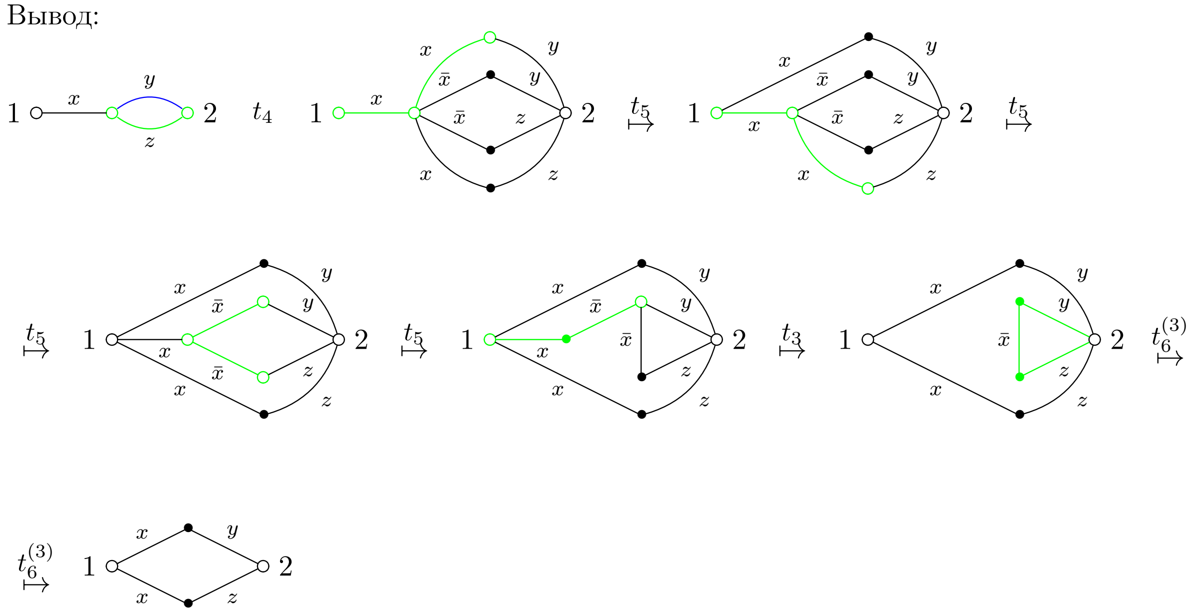
2). 

Вывод:



3). 

Вывод:



При решении сложных задач на первом этапе можно пользоваться этими эквивалентностями для нахождения нужного преобразования. Затем каждое из них расширить, подставив вывод, либо вывести их отдельно.

***Нахождение необходимых тождеств.** Справедлив следующий факт – для любых двух эквивалентных контактных схем, реализующих функции от n переменных, существует эквивалентное преобразование на основе **только** тождеств $t_1, \ldots, t_5, t_6^{(1)}, \ldots, t_6^{(n)}$.

Цикломатическим числом графа $G = (V(G), E(G))$ называется величина

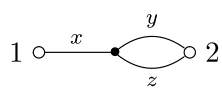
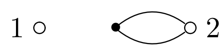
$$\theta(G) = |E(G)| - |V(G)| + |c(G)|,$$

то $|c(G)|$ – число компонент связности этого графа. Быстро считать цикломатическое число в простейших случаях помогают свойства:

(1) Цикломатическое число графа без циклов равно 0.
(2) Цикломатическое число графа с одним простым циклом равно 1.

Пусть Σ — КС, для каждого набора α значений переменных, управляющих ее контактами, определим граф $\Sigma|_\alpha$ — граф, полученный из графа Σ удалением тех ребер, которые не проводят на наборе α.

Например для набора (011) значений переменных (xyz) :

$\Sigma :$  $\Sigma|_{(011)} :$ 

Цикломатическое число схемы Σ

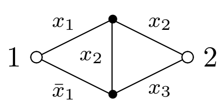
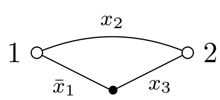
$$\theta(\Sigma) = \sum_{\alpha \in B^n} \theta(\Sigma|_\alpha).$$

Цикломатическое число схемы обладает следующими свойствами:

(1) После эквивалентного преобразования на основе тождеств $t_1 - t_5$ цикломатическое число любой КС не изменяется.
(2) Если Σ_1 и Σ_2 — две КС, реализующие функции от n переменных, таковы, что Σ_2 получается из Σ_1 эквивалентным преобразованием на основе только тождеств $t_1, \ldots, t_5, t_6^{(1)}, \ldots, t_6^{(k)}$, $k < n$, то величина $|\theta(\Sigma_1) - \theta(\Sigma_2)|$ делится на 2^{n-k}.

С помощью этих свойств решается следующая задача.

Пример. *Даны две эквивалентные КС:*

$\Sigma_1 :$  $\Sigma_2 :$ 

Указать минимальное такое i, при котором эквивалентное преобразование Σ_1 Σ_2 возможно с использованием тождеств $t_1, \ldots, t_5, t_6^{(1)}, \ldots, t_6^{(i)}$.

Так как реализуемые функции зависят от $n = 3$ переменных, то с помощью тождеств $t_1, \ldots, t_5, t_6^{(1)}, t_6^{(2)}, t_6^{(3)}$ заведомо можно произвести такое эквивалентное преобразование.

Для решения задачи найдем цикломатические числа схем.

Схема Σ_1. Если $x_1 = 1$, то контакт $\bar{x}_1$ не проводит, а потому единственный цикл возможен только на одном наборе (111), когда проводят контакты x_2 и x_3, на остальных наборахα с $x_1 = 1$ граф $\Sigma_1|_\alpha$ не содержит циклов, и потому его цикломатическое число 0. Аналогично при $x_1 = 0$ только в случае набора (011) граф содержит цикл. Получаем, что

$$\theta(\Sigma_1) = \theta(\Sigma_1|_{(111)}) + \theta(\Sigma_1|_{(011)}) = 1 + 1 = 2.$$

Схема Σ_2. При всех наборах α, кроме (011), соответствующий граф $\Sigma_2|_\alpha$ не содержит циклов, а граф $\Sigma_2|_\alpha$ состоит из единственного цикла, потому

$$\theta(\Sigma_2) = \theta(\Sigma_2|_{(011)}) = 1.$$

$|\theta(\Sigma_1) - \theta(\Sigma_2)| = 1$. Если бы эквивалентное преобразование Σ_1 Σ_2 было возможно с использованием только тождеств $t_1, \ldots, t_5, t_6^{(1)}$, то указанная величина, равная 1, делилась бы на $2^{n-1} = 4$, что неверно.

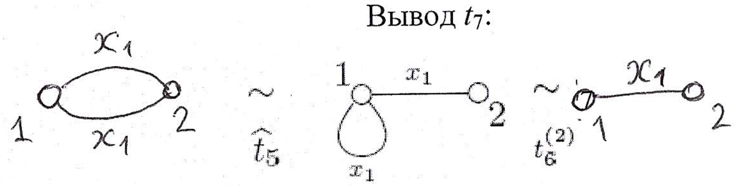
Аналогично, если бы это преобразование было возможно с использованием только тождеств $t_1, \ldots, t_5, t_6^{(1)}, t_6^{(2)}$, то эта единица делилась бы на $2^{n-2} = 2$, что тоже неверно.

Как уже было сказано, указанное преобразование можно произвести с использованием $t_1, \ldots, t_5, t_6^{(1)}, t_6^{(2)}, t_6^{(3)}$, потому ответ на задачу $i = 3$.

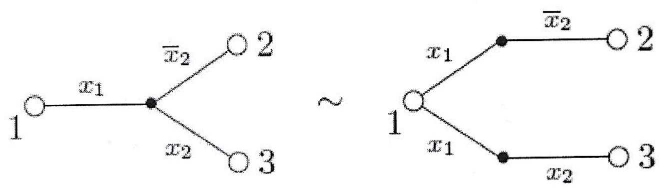
Вывод некоторых тождеств:

t_7 :

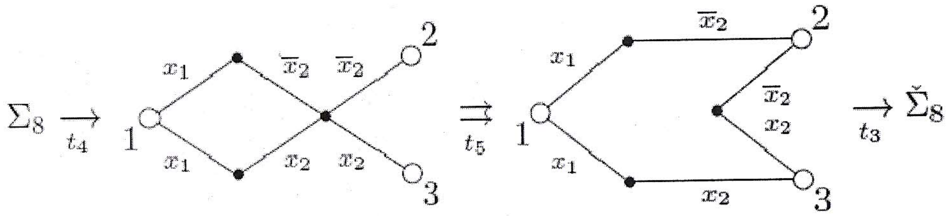
Вывод t_7:



t_8 :

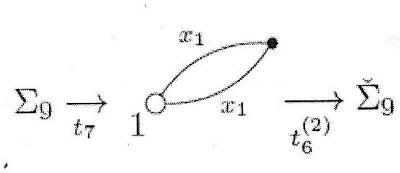


Вывод t_8:



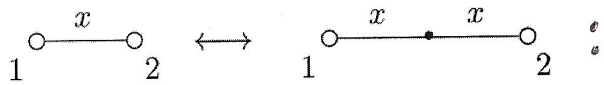
t_9 :

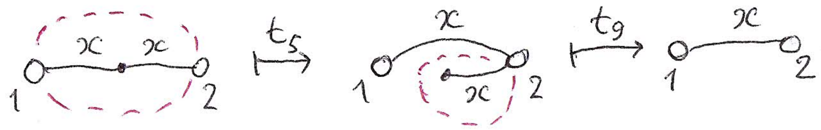
Вывод t_9:



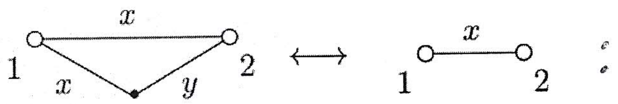
4.1. При помощи эквивалентных преобразований $t_1 - t_5, t_6^{(m)} (m = 1, 2, \ldots)$ доказать эквивалентность схем:

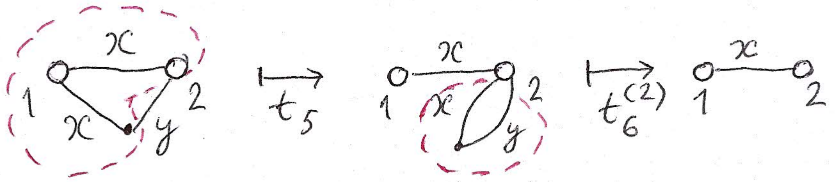
2)



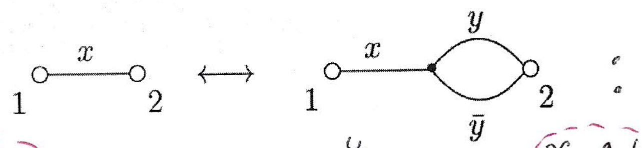


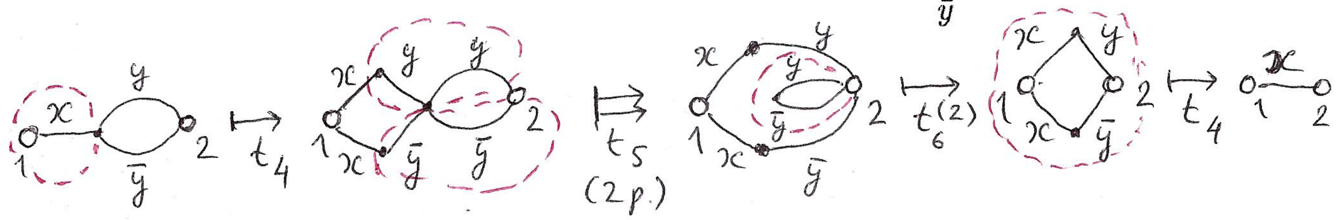
4)



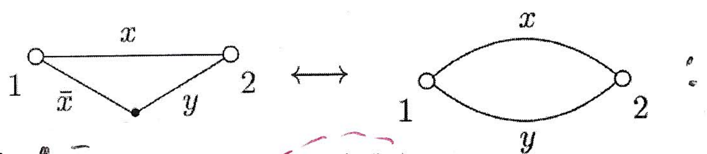


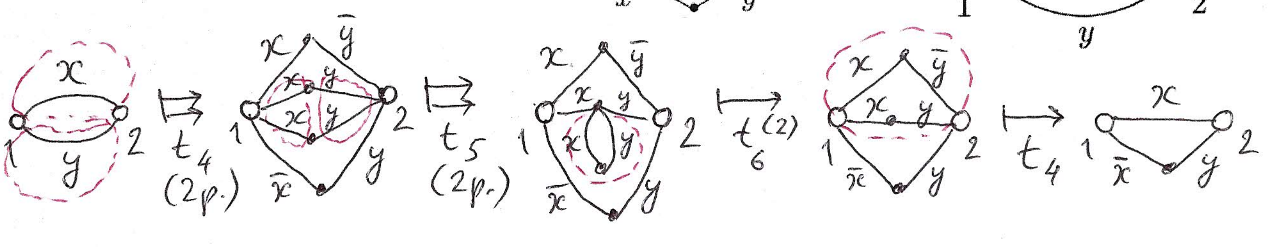
6)



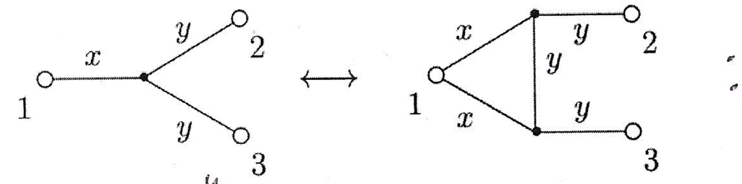


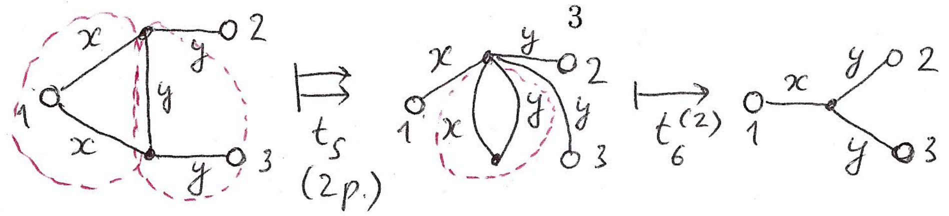
7)





8)





9) Привести к каноническому виду контактную схему