Лекция 17. Конечные автоматы. Способы их представления. Схемы из функциональных элементов с задержками и представление конечных автоматов ими.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

Факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте https://mk.cs.msu.ru

Конечный автомат

Конечным автоматом называется набор

$$\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_*),$$

в котором:

1) A — **входной алфавит** (являющийся конечным непустым множеством),

2) B — **выходной алфавит** (являющийся конечным непустым множеством),

3) Q — **множество состояний** (являющееся конечным непустым множеством),

4) $\varphi : A \times Q \to B$ — **функция выходов**,

5) $\psi : A \times Q \to Q$ — **функция переходов**,

6) $q_* \in Q$ — **начальное состояние**.

Конечные автоматы

Такие конечные автоматы называются также *автоматами с выходом*, или *автоматами-преобразователями*.

Рассматриваются также конечные *автоматы без выхода*, или *автоматы-распознаватели*.

Конечные автоматы

Пример. Конечный автомат:

$$\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_*),$$

где $A = B = \{0, 1\}$, $Q = \{0, 1, 2\}$, $q_* = 0$ и функции выходов φ и переходов ψ задаются таблицей:

$q \in Q$	$a \in A$	$\varphi(q, a) \in B$	$\psi(q, a) \in Q$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	2
2	0	1	2
2	1	1	2

Функционирование конечного автомата

Функционирование конечного автомата

$$\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_*)$$

на *входном слове* $x = x(1)x(2)\dots x(m) \in A^*$ описывается системой **канонических уравнений**:

$$\begin{cases} y(t) = \varphi(x(t), q(t-1)), & 1 \leqslant t \leqslant m, \\ q(t) = \psi(x(t), q(t-1)), & 1 \leqslant t \leqslant m, \\ q(0) = q_*. \end{cases}$$

При этом говорят, что конечный автомат $\mathcal{A}$ входное слово $x = x(1)x(2)\dots x(m) \in A^*$ преобразует в *выходное слово* $y = y(1)y(2)\dots y(m) \in B^*$.

Отметим, что длины входного и соответствующего выходного слова равны.

Функционирование конечного автомата

Пример. Рассмотрим функционирование конечного автомата $\mathcal{A}$ из предыдущего примера на слове $\alpha = 0010 \in A^*$.

Функционирование конечного автомата

Пример (продолжение). Итак, $\alpha = 0010$ и $q_* = 0$.

$q \in Q$	$a \in A$	$\varphi(q, a) \in B$	$\psi(q, a) \in Q$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	2
2	0	1	2
2	1	1	2

Получаем:

$$|q_*|0010 = |0|0010 \to 0|1|010 \to 00|1|10 \to 001|2|0 \to 0011|2|.$$

Значит, конечный автомат $\mathcal{A}$ входное слово $\alpha = 0010 \in A^*$ преобразует в выходное слово $\beta = 0011 \in B^*$.

Бесконечные слова

Пусть A — конечный алфавит.

Бесконечным словом (или **сверхсловом**) в алфавите A назовем бесконечную последовательность букв этого алфавита.

Множество всех сверхслов в алфавите A обозначим A^{∞}.

Если $\alpha \in A^{\infty}$, то $\alpha(t)$ обозначает t-ю букву сверхслова α, $t = 1, 2, \ldots$.

Т. е. $\alpha = \alpha(1)\alpha(2)\ldots\alpha(t)\ldots \in A^{\infty}$.

Функционирование конечного автомата

Функционирование конечного автомата

$$\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_*)$$

на *входном сверхслове* $x = x(1)x(2)\ldots x(t)\ldots \in A^\infty$ описывается системой **канонических уравнений**:

$$\begin{cases} y(t) = \varphi(x(t), q(t-1)), & t \geqslant 1, \\ q(t) = \psi(x(t), q(t-1)), & t \geqslant 1, \\ q(0) = q_*. \end{cases}$$

При этом говорят, что конечный автомат $\mathcal{A}$ входное сверхслово $x \in A^\infty$ преобразует в *выходное сверхслово* $y \in B^\infty$.

Отображение, которое осуществляет автомат

Конечный автомат $\mathcal{A}$ каждое сверхслово $x \in A^\infty$ преобразует в однозначно определенное сверхслово $y \in B^\infty$.

Значит, конечный автомат $\mathcal{A}$ определяет некоторую функцию

$$f_\mathcal{A} : A^\infty \to B^\infty,$$

которую назовем **отображением, которое осуществляет автомат $\mathcal{A}$**.

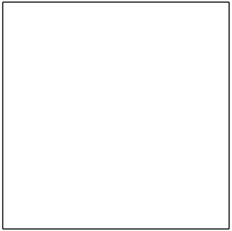
Устройства с конечной памятью

Конечный автомат $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_*)$ можно рассматривать как дискретный преобразователь с конечной памятью:

Устройства с конечной памятью

Конечный автомат $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_*)$ можно рассматривать как дискретный преобразователь с конечной памятью:

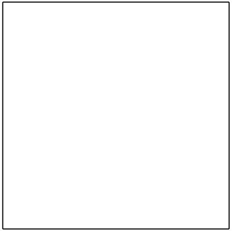
$\mathcal{A}$:



Устройства с конечной памятью

Конечный автомат $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_*)$ можно рассматривать как дискретный преобразователь с конечной памятью:

$\mathcal{A}$:



Дискретное время:
$t = 1, 2, \ldots$

Устройства с конечной памятью

Конечный автомат $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_*)$ можно рассматривать как дискретный преобразователь с конечной памятью:

$$\mathcal{A} : \boxed{\begin{array}{l} q(t-1) \in Q, \\ q(0) = q_* \end{array}}$$

Дискретное время:
$t = 1, 2, \ldots$

Устройства с конечной памятью

Конечный автомат $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_*)$ можно рассматривать как дискретный преобразователь с конечной памятью:

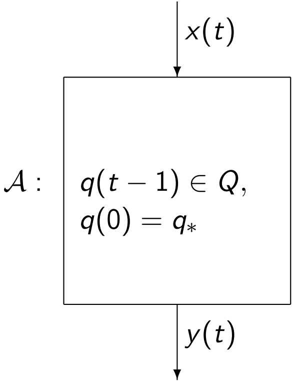
$x(t)$

$\mathcal{A}$: $\boxed{\begin{array}{l} q(t-1) \in Q, \\ q(0) = q_* \end{array}}$

Дискретное время:
$t = 1, 2, \ldots$

Устройства с конечной памятью

Конечный автомат $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_*)$ можно рассматривать как дискретный преобразователь с конечной памятью:



Дискретное время:
$t = 1, 2, \ldots$

Устройства с конечной памятью

Конечный автомат $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_*)$ можно рассматривать как дискретный преобразователь с конечной памятью:

$$\downarrow x(t)$$

$$\mathcal{A}: \boxed{\begin{array}{l} q(t-1) \in Q, \\ q(0) = q_* \end{array}}$$

$$\downarrow y(t)$$

Дискретное время:
$t = 1, 2, \ldots$

Кроме того,

$$y(1)y(2)\ldots y(t)\ldots = f_{\mathcal{A}}(x(1)x(2)\ldots x(t)\ldots).$$

Автоматная функция

Пусть A и B — конечные алфавиты и

$$f : A^\infty \to B^\infty.$$

Функция f называется **автоматной**, если найдется такой конечный автомат

$$\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_*),$$

что $f_\mathcal{A} = f$.

Пример неавтоматной функции

Пример. Пусть $A = B = \{0, 1\}$ и $f : A^\infty \to B^\infty$, где

$$f(x) = \begin{cases} 00\ldots0\ldots, & x = 00\ldots0\ldots, \\ 11\ldots1\ldots, & x \neq 00\ldots0\ldots. \end{cases}$$

Покажем от обратного, что функция f не является автоматной.

Предположим, что найдется конечный автомат

$$\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_*),$$

осуществляющий отображение f.

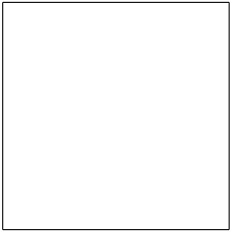
Пример неавтоматной функции

Пример (продолжение). Рассмотрим $t = 1$ и пусть $x(1) = 0$:

Пример неавтоматной функции

Пример (продолжение). Рассмотрим $t = 1$ и пусть $x(1) = 0$:

$\mathcal{A}$:



Пример неавтоматной функции

Пример (продолжение). Рассмотрим $t = 1$ и пусть $x(1) = 0$:

$\mathcal{A}$:

$t = 1$

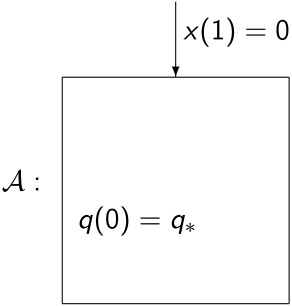
Пример неавтоматной функции

Пример (продолжение). Рассмотрим $t = 1$ и пусть $x(1) = 0$:

$$\mathcal{A}: \boxed{q(0) = q_*} \qquad t = 1$$

Пример неавтоматной функции

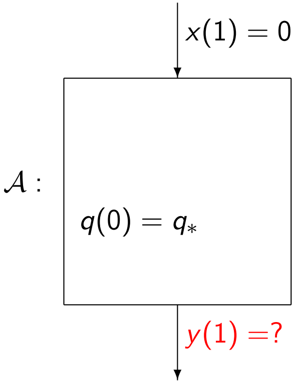
Пример (продолжение). Рассмотрим $t = 1$ и пусть $x(1) = 0$:



$t = 1$

Пример неавтоматной функции

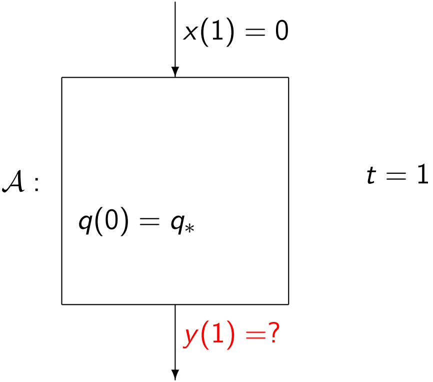
Пример (продолжение). Рассмотрим $t = 1$ и пусть $x(1) = 0$:



$t = 1$

Пример неавтоматной функции

Пример (продолжение). Рассмотрим $t = 1$ и пусть $x(1) = 0$:



Противоречие: автомат «не знает», как выдать $y(1)$: если все сверхслово x состоит только из нулей, то $y(1) = 0$; а если в x встречается хотя бы одна единица, то $y(1) = 1$.

Значит, f — неавтоматная функция.

Способы представления

Рассмотрим способы представления конечных автоматов и соответствующих автоматных функций.

Канонические уравнения

1. *Канонические уравнения*.
Конечный автомат $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_*)$ (и автоматную функцию $f_{\mathcal{A}}$) можно задавать **каноническими уравнениями**:

$$\begin{cases} y(t) = \varphi(x(t), q(t-1)), \\ q(t) = \psi(x(t), q(t-1)), \\ q(0) = q_*. \end{cases}$$

При этом часто удобно, чтобы в правых частях находились функции алгебры логики.

Для этого элементы множеств A, B, Q кодируют однозначным алфавитным равномерным кодом в алфавите $\{0, 1\}$.

А затем переписывают функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ в соответствии с этим кодированием.

Канонические уравнения

Пример. Найдем канонические уравнения конечного автомата $\mathcal{A}$ из предыдущих примеров: $A = B = \{0, 1\}$, $Q = \{0, 1, 2\}$, $q_* = 0$ и φ и ψ задаются таблицей:

$q \in Q$	$a \in A$	$\varphi(q, a) \in B$	$\psi(q, a) \in Q$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	2
2	0	1	2
2	1	1	2

Закодируем состояния $q \in Q$, например, так:

$$0 - 00, \quad 1 - 01, \quad 2 - 10.$$

Канонические уравнения

Пример (продолжение). Получаем:

$q_1(t-1)$	$q_2(t-1)$	$x(t)$	$y(t)$	$q_1(t)$	$q_2(t)$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	–	–	–
1	1	1	–	–	–

Теперь:

$$\begin{cases} y(t) = x(t)q_2(t-1) \vee q_1(t-1), \\ q_1(t) = x(t)q_2(t-1) \vee q_1(t-1), \\ q_2(t) = (\bar{x}(t) \vee \bar{q}_2(t-1)) \cdot \bar{q}_1(t-1), \\ q_1(0) = q_2(0) = 0. \end{cases}$$

Диаграмма Мура

2. *Диаграмма Мура.*

Диаграммой Мура (или **диаграммой переходов**) конечного автомата $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_*)$ (и автоматной функции $f_{\mathcal{A}}$) называется ориентированный граф с пометками

$$D_{\mathcal{A}} = (V_{\mathcal{A}}, E_{\mathcal{A}}),$$

в котором:

$V_{\mathcal{A}} = Q,$

$E_{\mathcal{A}} = \{(q, \psi(a, q)) \mid a \in A, q \in Q\},$

причем

дуге $(q, \psi(a, q)) \in E_{\mathcal{A}}$ приписана пометка $a(\varphi(a, q))$,

вершина $q_* \in V_{\mathcal{A}}$ помечена звездочкой $*$.

Диаграмма Мура

Пример. Найдем диаграмму Мура конечного автомата $\mathcal{A}$ из предыдущих примеров: $A = B = \{0, 1\}$, $Q = \{0, 1, 2\}$, $q_* = 0$ и φ и ψ задаются таблицей:

$q \in Q$	$a \in A$	$\varphi(q, a) \in B$	$\psi(q, a) \in Q$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	2
2	0	1	2
2	1	1	2

Диаграмма Мура

Пример (продолжение). Итак, $q_* = 0$ и

q	a	φ	ψ		q	a	φ	ψ
0	0	0	1		0	1	0	1
1	0	0	1		1	1	1	2
2	0	1	2		2	1	1	2

Диаграмма Мура

Пример (продолжение). Итак, $q_* = 0$ и

q	a	φ	ψ		q	a	φ	ψ
0	0	0	1		0	1	0	1
1	0	0	1		1	1	1	2
2	0	1	2		2	1	1	2

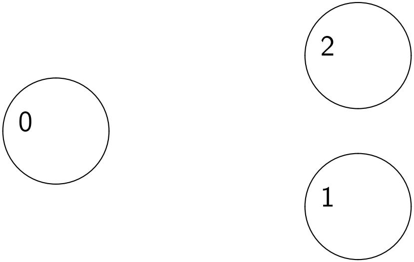


Диаграмма Мура

Пример (продолжение). Итак, $q_* = 0$ и

q	a	φ	ψ		q	a	φ	ψ
0	0	0	1		0	1	0	1
1	0	0	1		1	1	1	2
2	0	1	2		2	1	1	2

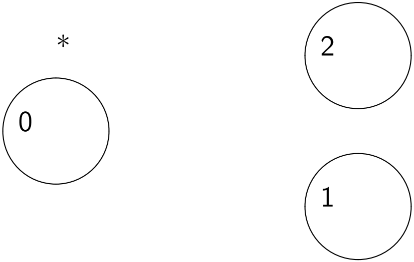


Диаграмма Мура

Пример (продолжение). Итак, $q_* = 0$ и

q	a	φ	ψ		q	a	φ	ψ
0	0	0	1		0	1	0	1
1	0	0	1		1	1	1	2
2	0	1	2		2	1	1	2

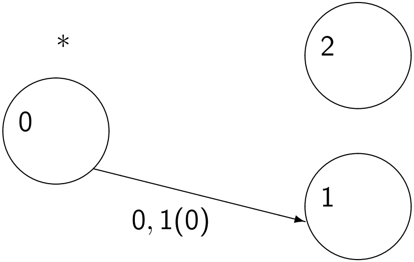


Диаграмма Мура

Пример (продолжение). Итак, $q_* = 0$ и

q	a	φ	ψ		q	a	φ	ψ
0	0	0	1		0	1	0	1
1	0	0	1		1	1	1	2
2	0	1	2		2	1	1	2

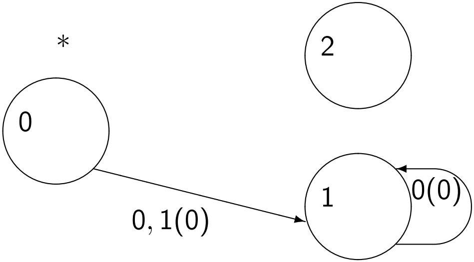


Диаграмма Мура

Пример (продолжение). Итак, $q_* = 0$ и

q	a	φ	ψ		q	a	φ	ψ
0	0	0	1		0	1	0	1
1	0	0	1		1	1	1	2
2	0	1	2		2	1	1	2

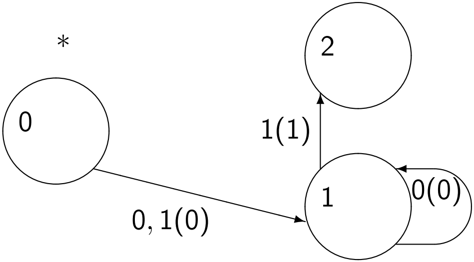


Диаграмма Мура

Пример (продолжение). Итак, $q_* = 0$ и

q	a	φ	ψ		q	a	φ	ψ
0	0	0	1		0	1	0	1
1	0	0	1		1	1	1	2
2	0	1	2		2	1	1	2

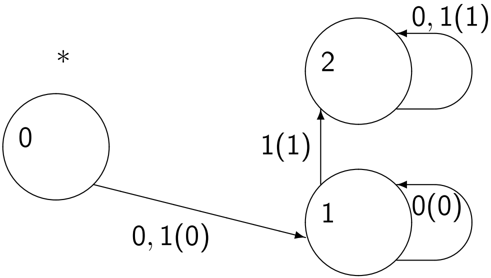
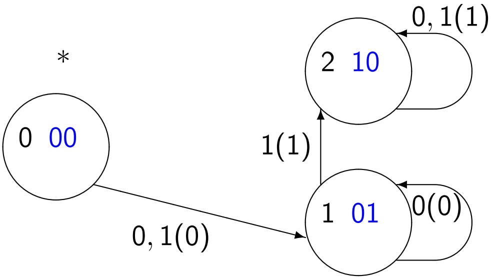


Диаграмма Мура

Пример (продолжение). Итак, $q_* = 0$ и

q	a	φ	ψ		q	a	φ	ψ
0	0	0	1		0	1	0	1
1	0	0	1		1	1	1	2
2	0	1	2		2	1	1	2



Функция единичной задержки

Пусть $A = B = \{0, 1\}$ и $z : A^\infty \to B^\infty$, где

$$z(x(1)x(2)x(3)\dots x(t)\dots) = 0x(1)x(2)\dots x(t-1)\dots.$$

Она называется **функцией единичной задержки**.

Содержательно, она приписывает 0 слева к входному слову.

Покажем, что z — автоматная функция.

Функция единичной задержки

Отображение z осуществляется конечным автоматом

$$\mathcal{A} = (A, B, Q = \{0, 1\}, \varphi, \psi, q_* = 0),$$

где состояние $q = 0$ означает «в предыдущий момент времени на входе был 0»; состояние $q = 1$ означает «в предыдущий момент времени на входе была 1».

Найдем таблицы функций φ, ψ и канонические уравнения:

$q \in Q$	$a \in A$	φ	ψ
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	1

и

$$\begin{cases} y(t) = q(t-1), \\ q(t) = x(t), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

В первый момент времени всегда выдается 0, поэтому $q_* = 0$.

Диаграмма Мура единичной задержки

Построим диаграмму Мура функции z:

$q \in Q$	$a \in A$	φ	ψ
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	1

и $q_* = 0$

Диаграмма Мура единичной задержки

Построим диаграмму Мура функции z:

$q \in Q$	$a \in A$	φ	ψ
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	1

и $q_* = 0$

Диаграмма Мура единичной задержки

Построим диаграмму Мура функции z:

$q \in Q$	$a \in A$	φ	ψ
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	1

и $q_* = 0$

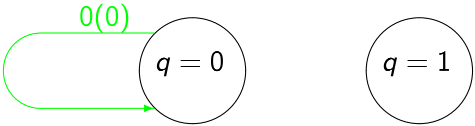


Диаграмма Мура единичной задержки

Построим диаграмму Мура функции z:

$q \in Q$	$a \in A$	φ	ψ
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	1

и $q_* = 0$

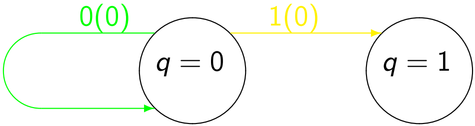


Диаграмма Мура единичной задержки

Построим диаграмму Мура функции z:

$q \in Q$	$a \in A$	φ	ψ
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	1

и $q_* = 0$

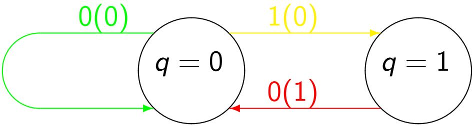


Диаграмма Мура единичной задержки

Построим диаграмму Мура функции z:

$q \in Q$	$a \in A$	φ	ψ
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	1

и $q_* = 0$

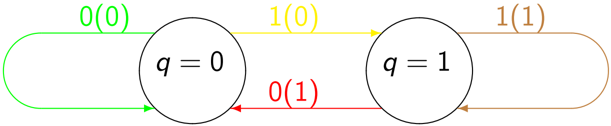
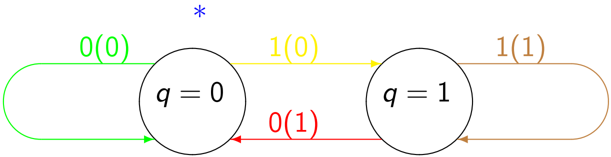


Диаграмма Мура единичной задержки

Построим диаграмму Мура функции z:

$q \in Q$	$a \in A$	φ	ψ
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	1

и $q_* = 0$



Пример

Пример. Пусть $A = B = \{0, 1\}$ и $f : A^\infty \to B^\infty$, где

$$f(x(1)x(2)x(3)\dots x(t)\dots) = y(1)y(2)\dots y(t)\dots,$$

причем

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1, \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geqslant 2. \end{cases}$$

Докажем, что f — автоматная функция.

Пример

Пример (продолжение). Для доказательства предложим диаграмму Мура функции f, где

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1, \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geqslant 2. \end{cases}$$

Пример

Пример (продолжение). Для доказательства предложим диаграмму Мура функции f, где

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1, \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geqslant 2. \end{cases}$$

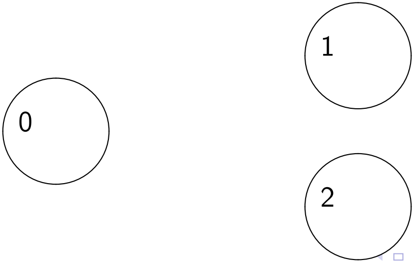
Введем 3 состояния: $q = 0$ — момент времени $t = 1$, $q = 1$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 0$ и $q = 2$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 1$:

Пример

Пример (продолжение). Для доказательства предложим диаграмму Мура функции f, где

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1, \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geqslant 2. \end{cases}$$

Введем 3 состояния: $q = 0$ — момент времени $t = 1$, $q = 1$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 0$ и $q = 2$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 1$:

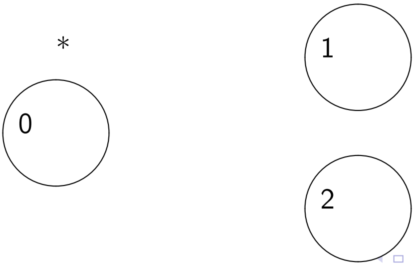


Пример

Пример (продолжение). Для доказательства предложим диаграмму Мура функции f, где

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1, \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geqslant 2. \end{cases}$$

Введем 3 состояния: $q = 0$ — момент времени $t = 1$, $q = 1$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 0$ и $q = 2$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 1$:

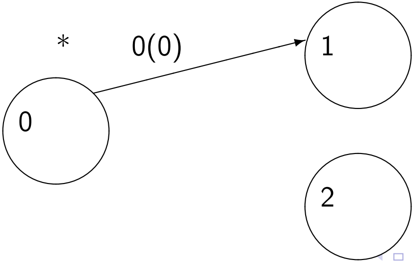


Пример

Пример (продолжение). Для доказательства предложим диаграмму Мура функции f, где

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1, \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geqslant 2. \end{cases}$$

Введем 3 состояния: $q = 0$ — момент времени $t = 1$, $q = 1$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 0$ и $q = 2$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 1$:

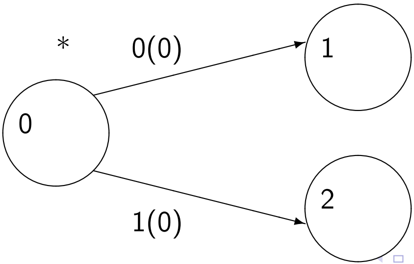


Пример

Пример (продолжение). Для доказательства предложим диаграмму Мура функции f, где

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1, \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geqslant 2. \end{cases}$$

Введем 3 состояния: $q = 0$ — момент времени $t = 1$, $q = 1$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 0$ и $q = 2$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 1$:

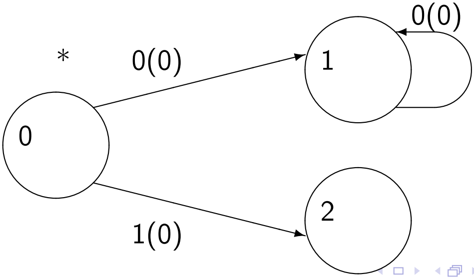


Пример

Пример (продолжение). Для доказательства предложим диаграмму Мура функции f, где

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1, \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geqslant 2. \end{cases}$$

Введем 3 состояния: $q = 0$ — момент времени $t = 1$, $q = 1$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 0$ и $q = 2$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 1$:

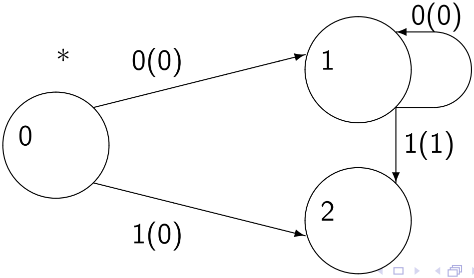


Пример

Пример (продолжение). Для доказательства предложим диаграмму Мура функции f, где

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1, \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geqslant 2. \end{cases}$$

Введем 3 состояния: $q = 0$ — момент времени $t = 1$, $q = 1$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 0$ и $q = 2$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 1$:

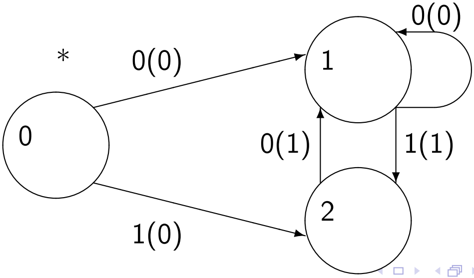


Пример

Пример (продолжение). Для доказательства предложим диаграмму Мура функции f, где

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1, \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geqslant 2. \end{cases}$$

Введем 3 состояния: $q = 0$ — момент времени $t = 1$, $q = 1$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 0$ и $q = 2$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 1$:

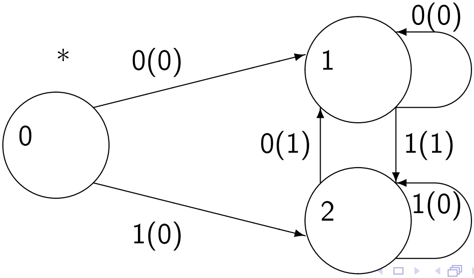


Пример

Пример (продолжение). Для доказательства предложим диаграмму Мура функции f, где

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1, \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geqslant 2. \end{cases}$$

Введем 3 состояния: $q = 0$ — момент времени $t = 1$, $q = 1$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 0$ и $q = 2$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 1$:

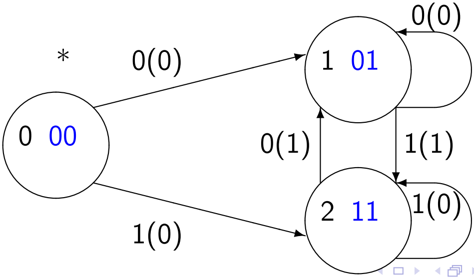


Пример

Пример (продолжение). Для доказательства предложим диаграмму Мура функции f, где

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t = 1, \\ x(t-1) \oplus x(t), & t \geqslant 2. \end{cases}$$

Введем 3 состояния: $q = 0$ — момент времени $t = 1$, $q = 1$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 0$ и $q = 2$ — момент времени $t \geqslant 2$ и $x(t-1) = 1$:



Пример

Пример (продолжение). Найдем канонические уравнения функции f:

$q_1(t-1)$	$q_2(t-1)$	$x(t)$	$y(t)$	$q_1(t)$	$q_2(t)$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	–	–	–
1	0	1	–	–	–
1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	1	1

$$\begin{cases} y(t) = (x(t) \oplus q_1(t-1)) \cdot q_2(t-1), \\ q_1(t) = x(t), \\ q_2(t) = 1, \\ q_1(0) = q_2(0) = 0. \end{cases}$$

СФЭ с задержками

Схемой из функциональных элементов с задержками (СФЭЗ)

$$S(x_1(t), \ldots, x_n(t); y_1(t), \ldots, y_m(t))$$

в базисе $B = \{x \& y, x \vee y, \bar{x}\} \cup \{z\}$ называется

1) ориентированный граф $G = (V, E)$ с возможными ориентированными циклами, причем в графе G полустепень захода любой его вершины не превосходит двух;

2) любая вершина графа G с полустепенью захода, равной нулю, называется входной (или входом) и ей приписывается какая-то входная переменная $x_i(t)$;

СФЭ с задержками

3) любой вершине графа G с полустепенью захода, равной единице, приписывается либо единичная задержка z, либо отрицание $\bar{\ }$;

4) в любом ориентированном цикле графа G должна быть хотя бы одна вершина с приписанной ей единичной задержкой;

5) любой вершине графа G с полустепью захода, равной двум, приписывается либо конъюнкция $\&$, либо дизъюнкция $\vee$;

6) некоторые (в том числе и входные) вершины графа G называются выходными (или выходами) и им приписываются (различные) выходные переменные $y_1(t), \ldots, y_m(t)$.

СФЭ с задержками

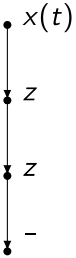
Пример. Рассмотрим пример СФЭЗ:

СФЭ с задержками

Пример. Рассмотрим пример СФЭЗ:

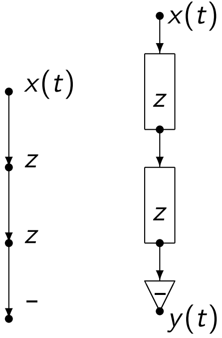
СФЭ с задержками

Пример. Рассмотрим пример СФЭЗ:



СФЭ с задержками

Пример. Рассмотрим пример СФЭЗ:



Автоматность отображения СФЭЗ

Теорема 17.1. *Каждая СФЭЗ*

$$S(x_1(t), \dots, x_n(t); y_1(t), \dots, y_m(t))$$

осуществляет автоматное отображение входов $x_1(t), \dots, x_n(t)$ в выходы $y_1(t), \dots, y_m(t)$.

Автоматность отображения СФЭЗ

Доказательство. Рассмотрим граф $G = (V, E)$ СФЭЗ S.

Пусть $v_1, \ldots, v_k \in V$ — все вершины, которым приписана единичная задержка z.

Рассмотрим вершину v_i. В графе G в нее ведет одна дуга из вершины, которую обозначим w_i.

Удалим эту дугу (w_i, v_i) из графа G. Вершине w_i припишем новую выходную переменную $q_i(t)$.

Вершина v_i станет входной, ей припишем новую входную переменную $p_i(t)$.

Заметим, что т. к. в любом ориентированном цикле графа G хотя бы одной вершине была приписана z, выполнив такое преобразование для вершин $v_1, \ldots, v_k$, мы разорвем все ориентированные циклы.

Автоматность отображения СФЭЗ

Доказательство. В итоге получаем СФЭ (без задержек) S'. На ее выходах $y_j(t)$, $q_i(t)$ соответственно вычисляются некоторые функции алгебры логики $F_j, G_i \in P_2$:

$$\begin{aligned} y_j(t) &= F_j(x_1(t), \ldots, x_n(t), p_1(t), \ldots, p_k(t)), \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \\ q_i(t) &= G_i(x_1(t), \ldots, x_n(t), p_1(t), \ldots, p_k(t)), \quad 1 \leqslant i \leqslant k. \end{aligned}$$

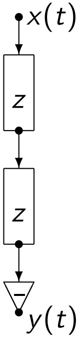
По определению функции единичной задержки верно $p_i(t) = q_i(t-1)$, $q_i(0) = 0$. Поэтому

$$\begin{cases} y_j(t) = F_j(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_k(t-1)), & 1 \leqslant j \leqslant m, \\ q_i(t) = G_i(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_k(t-1)), & \\ q_i(0) = 0, & 1 \leqslant i \leqslant k. \end{cases}$$

Получили канонические уравнения, а значит, отображение — автоматное. □

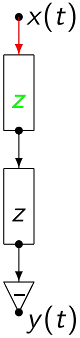
Автоматность отображения СФЭЗ

Пример. Найдем автоматную функцию f_S по СФЭЗ S:



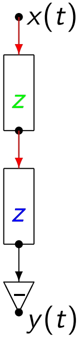
Автоматность отображения СФЭЗ

Пример. Найдем автоматную функцию f_S по СФЭЗ S:



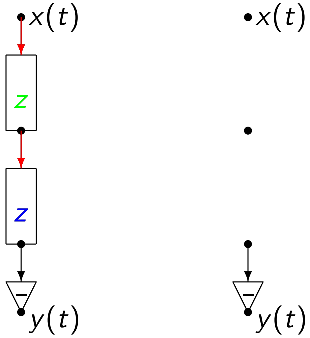
Автоматность отображения СФЭЗ

Пример. Найдем автоматную функцию f_S по СФЭЗ S:



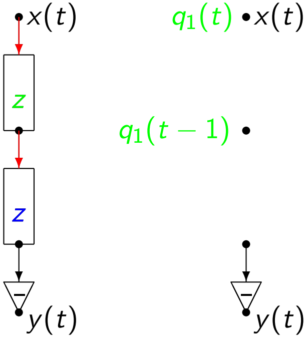
Автоматность отображения СФЭЗ

Пример. Найдем автоматную функцию f_S по СФЭЗ S:



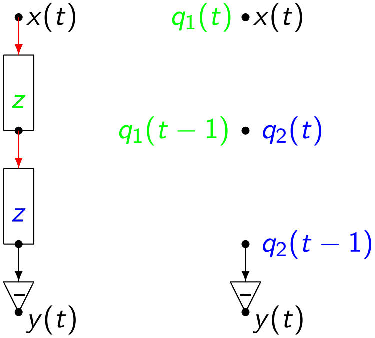
Автоматность отображения СФЭЗ

Пример. Найдем автоматную функцию f_S по СФЭЗ S:



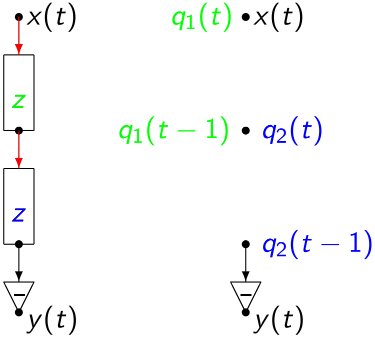
Автоматность отображения СФЭЗ

Пример. Найдем автоматную функцию f_S по СФЭЗ S:



Автоматность отображения СФЭЗ

Пример. Найдем автоматную функцию f_S по СФЭЗ S:



Получаем канонические уравнения для f_S:

$$\begin{cases} y(t) = \bar{q}_2(t-1), \\ q_1(t) = x(t), \\ q_2(t) = q_1(t-1), \\ q_1(0) = q_2(0) = 0. \end{cases}$$

Представление автомата СФЭЗ

Теорема 17.2. *Каждый конечный автомат $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_*)$ может быть представлен СФЭЗ в базисе $B = \{x\&y, x \vee y, \bar{x}\} \cup \{z\}$ при некотором кодировании элементов из множеств A, B, Q наборами из нулей и единиц*.

Представление автомата СФЭЗ

Доказательство. Пусть $|A| = s$, $|B| = t$, $|Q| = r$.

Закодируем взаимно однозначно:

1) элементы множества A наборами $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$, где $n = \lceil \log_2 s \rceil$;

2) элементы множества B — наборами $(y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \{0, 1\}^m$, где $m = \lceil \log_2 t \rceil$;

3) элементы множества Q — наборами $(q_1, q_2, \ldots, q_k) \in \{0, 1\}^k$, где $k = \lceil \log_2 r \rceil$, причем начальное состояние q_* закодируем нулевым набором $(0, \ldots, 0)$.

Представление автомата СФЭЗ

Доказательство. Автомат $\mathcal{A}$ можно задать каноническими уравнениями:

$$\begin{cases} y(t) = \varphi(x(t), q(t-1)), \\ q(t) = \psi(x(t), q(t-1)), \\ q(0) = q_*. \end{cases}$$

Перепишем эти уравнения для кодов элементов из множеств A, B, Q. При этом функции φ и ψ преобразуются в наборы функций алгебры логики $(F_1, \ldots, F_m)$ и $(G_1, \ldots, G_k)$:

$$\begin{cases} y_j(t) = F_j(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_k(t-1)), & 1 \leqslant j \leqslant m, \\ q_i(t) = G_i(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_k(t-1)), & \\ q_i(0) = 0, & 1 \leqslant i \leqslant k. \end{cases}$$

Эту систему канонических уравнений обозначим (1).

Представление автомата СФЭЗ

Доказательство. Теперь построим СФЭ (без задержек) S' в базисе $B_0 = \{x\&y, x \vee y, \bar{x}\}$, вычисляющую на выходах $y_j(t), q_i(t)$ соответственно функции алгебры логики F_j, G_i:

$$\begin{aligned} y_j(t) &= F_j(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_k(t-1)), \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \\ q_i(t) &= G_i(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_k(t-1)), \quad 1 \leqslant i \leqslant k. \end{aligned}$$

Затем соединим в схеме S' выход $q_i(t)$ с входом $q_i(t-1)$ через единичную задержку z для всех $i = 1, \ldots, k$.

Получим СФЭЗ S, осуществляющую автоматное отображение в соответствии с каноническими уравнениями (1).

$\square$

Представление автомата СФЭЗ

Пример. Найдем СФЭЗ для автоматной функции f, заданной каноническими уравнениями:

$$\begin{cases} y(t) = x(t) \cdot q(t-1), \\ q(t) = x(t), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

Представление автомата СФЭЗ

Пример. Найдем СФЭЗ для автоматной функции f, заданной каноническими уравнениями:

$$\begin{cases} y(t) = x(t) \cdot q(t-1), \\ q(t) = x(t), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

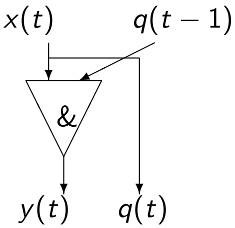
Получаем СФЭЗ S_f:

Представление автомата СФЭЗ

Пример. Найдем СФЭЗ для автоматной функции f, заданной каноническими уравнениями:

$$\begin{cases} y(t) = x(t) \cdot q(t-1), \\ q(t) = x(t), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

Получаем СФЭЗ S_f:

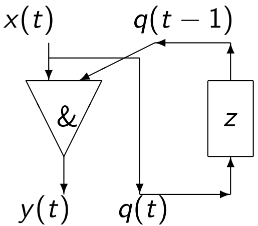


Представление автомата СФЭЗ

Пример. Найдем СФЭЗ для автоматной функции f, заданной каноническими уравнениями:

$$\begin{cases} y(t) = x(t) \cdot q(t-1), \\ q(t) = x(t), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

Получаем СФЭЗ S_f:



Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть $A = B = \{0, 1\}$ и $f : A^\infty \to B^\infty$, где

$$f(x(1)x(2)x(3)\dots x(t)\dots) = y(1)y(2)\dots y(t)\dots,$$

причем $y(t)$ равно t-й цифре после запятой в двоичном представлении числа $\frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$.

Покажите, что для каждых $m, n \geqslant 1$ функция f является автоматной.

Задачи для самостоятельного решения

2^*. Пусть $A = B = \{0, 1\}$ и $f : A^\infty \to B^\infty$, где

$$f(x(1)x(2)x(3)\dots x(t)\dots) = y(1)y(2)\dots y(t)\dots,$$

причем $y(t) = 1$, если $t = 2^k$ для некоторого числа $k \in \mathbb{N}$, и $y(t) = 0$ в обратном случае.

Докажите, что f не является автоматной функцией.

Литература к лекции

1. Алексеев В. Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра-М, 2012. С. 77–83.

2. Марченков С. С. Конечные автоматы. М.: Физматлит, 2008. С. 36–48.

3. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004. Гл. IV 2.1, 2.13, 2.14.