

# Распределенные алгоритмы и системы

[mk.cs.msu.ru](http://mk.cs.msu.ru) → Лекционные курсы → Распределенные алгоритмы и системы

## Блок 21

Волновые алгоритмы:  
основные определения и свойства

Лектор:  
**Подымов Владислав Васильевич**  
E-mail:  
**[valdus@yandex.ru](mailto:valdus@yandex.ru)**

# Вступление

При разработке распределённых алгоритмов иногда возникает необходимость в решении вспомогательных задач, основанных на широкополосном распространении информации — например:

- ▶ Отправка данных всем узлам сети
- ▶ Синхронизация всех узлов сети
- ▶ Вычисление значения функции на входных данных, распределённых между узлами

Для решения таких задач можно применять общие методы рассылки сообщений, гарантирующие задействование всех узлов

# Допущения

При обсуждении волновых алгоритмов будем использовать следующие допущения

## 1. Граф топологии сети

- ▶ не изменяется по ходу работы алгоритма,
- ▶ неориентирован и
- ▶ связан

## 2. В сети используется асинхронный обмен сообщениями

## 3. Глобальное время, таймеры и все производные понятия не используются

# Волновые алгоритмы: основные определения

Волновым алгоритмом называется распределённый алгоритм, система перехода  $S$  которого удовлетворяет следующим требованиям:

1. **Завершаемость**: все вычисления  $S$  конечны

2. **Принятие решения**:

- ▶ Среди внутренних действий выделены действия **принятия решения**
- ▶ Каждое вычисление с.п.  $S$  содержит хотя бы одно действие принятия решения
  - ▶ Принятие решения будем обозначать специальной командой *decide*
  - ▶ Будем полагать, что выполнение команды *decide* и только оно изменяет специальную булеву переменную *decided* с начальным значением  $\mathbb{f}$ , присваивая в неё значение  $\mathbb{t}$

3. **Полнота покрытия**: любому действию принятия решения в любом вычислении с.п.  $S$ , **причинно-следственно** предшествует ( $\preceq$ ) хотя бы одно действие каждого узла

# Волновые алгоритмы: основные определения

Вычисление волного алгоритма называется **волной**

Узлы волнового алгоритма, можно разбить на два класса:

1. **Инициатор** (по-другому — **стартовый** узел) запускает волну своим действием  
Первое действие инициатора — это внутреннее действие или отправка сообщения
2. **Неинициатор** (по-другому — **последователь**) ожидает прихода сообщения и только после этого вовлекаются в волну  
Первое действие последователя — это приём сообщения

# Волновые алгоритмы: основные определения

Основные параметры распределённых алгоритмов:

## 1. Централизация

В **централизованном** алгоритме содержится ровно один инициатор, а в **децентрализованном** может быть более одного

## 2. Топология

Волновой алгоритм нередко рассчитан на конкретный вид топологии сети (кольцо, дерево, клика, ...) и может быть некорректным для других топологий

## 3. Начальные знания

К числу таких знаний относятся, например, своё имя и имена соседей

## 4. Число решений

Обычно в волновом алгоритме решение принимается либо одним узлом, либо всеми узлами

# Волновые алгоритмы: основные свойства

Далее считаем заданным волновой алгоритм  $\mathfrak{A}$  с системой переходов  $S$  и графом топологии  $\Gamma = (V, E)$

Будем использовать следующие обозначения:

- ▶  $V_0$  — множество всех инициаторов
- ▶  $\mathcal{A}$  — множество всех действий алгоритма  $\mathfrak{A}$
- ▶  $\mathcal{A}_p$  — множество всех действий узла  $p$
- ▶  $p(a)$  — узел, которому принадлежит действие  $a$  ( $a \in \mathcal{A}_{p(a)}$ )
- ▶  $\vec{\alpha}_\pi = Act(\pi, \mathfrak{A})$
- ▶  $\mathcal{A}_\Pi$  — множество всех последовательностей  $Act(\pi, \mathfrak{A})$ , где  $\pi \in \Pi(S)$
- ▶  $\mathcal{D}$  — множество всех действий принятия решения
- ▶  $\mathcal{A}^!$  — множество всех действий отправки

# Волновые алгоритмы: основные свойства

## Утверждение

Каждому действию каждой волны алгоритма  $\mathfrak{A}$  причинно-следственно (нестрого) предшествует какое-либо действие какого-либо инициатора

$$(\forall \vec{\alpha} \in \mathcal{A}_{\Pi} : \forall i \in \mathcal{I}_{\vec{\alpha}} : \exists p \in V_0 : \exists j \in \mathcal{I}_{\vec{\alpha}}, j \preceq i : \vec{\alpha}[j] \in \mathcal{A}_p)$$

**Доказательство.** Пусть  $\vec{\alpha} \in \mathcal{A}_{\Pi}$  и  $i \in \mathcal{I}_{\vec{\alpha}}$

По **свойствам отношения**  $\preceq$  верно следующее:

- ▶ Множество  $X$  номеров  $k$ , таких что  $k \preceq i$ , конечно
- ▶ В  $X$  содержится минимальный элемент  $i_0$
- ▶  $\vec{\alpha}[i_0]$  — первое действие соответствующего узла в  $\vec{\alpha}$
- ▶  $\vec{\alpha}[i_0]$  — внутреннее действие или действие отправки

Следовательно, узел  $p(\vec{\alpha}[i_0])$  — инициатор ▼



## Волновые алгоритмы: основные свойства

$\text{parent}(p, \vec{\alpha})$  — так для последователя  $p$  будет обозначаться узел, от которого  $p$  получил первое сообщение согласно действиям из  $\vec{\alpha}$

**Утверждение.** Если  $\mathfrak{A}$  — централизованный волновой алгоритм, то для любого его волны  $\pi$  ориентированный граф  $T = (V, E_T)$ , где  $E_T = \{(p, \text{parent}(p, \vec{\alpha}_\pi)) \mid p \in V \setminus V_0\}$ , является остовным деревом графа  $(V, E)$ , корнем (стоком) которого является инициализатор

Доказательство.

По определению централизованного волнового алгоритма, каждый узел, кроме единственного инициализатора, получает хотя бы одно сообщение в  $\pi$

Следовательно, по заданию  $T$ ,

- ▶ верно  $|E_T| = |V| - 1$  и
- ▶ из инициализатора не исходит ни одной дуги в  $T$

Осталось показать, что в  $T$  нет циклов

# Волновые алгоритмы: основные свойства

$\text{parent}(p, \vec{\alpha})$  — так для последователя  $p$  будет обозначаться узел, от которого  $p$  получил первое сообщение согласно действиям из  $\vec{\alpha}$

**Утверждение.** Если  $\mathfrak{A}$  — централизованный волновой алгоритм, то для любого его волны  $\pi$  ориентированный граф  $T = (V, E_T)$ , где  $E_T = \{(p, \text{parent}(p, \vec{\alpha}_\pi)) \mid p \in V \setminus V_0\}$ , является остовным деревом графа  $(V, E)$ , корнем (стоком) которого является инициализатор

Доказательство.

Предположим от противного, что в  $T$  содержится цикл

$$v_1 \leftarrow v_2 \leftarrow \dots \leftarrow v_k \leftarrow v_1$$

Тогда, по определению и свойствам отношения  $\prec$ ,

- ▶ для первых действий  $\vec{\alpha}_\pi[i_1], \dots, \vec{\alpha}_\pi[i_k]$  узлов  $v_1, \dots, v_k$  верно  $i_1 \prec i_2 \prec \dots \prec i_k \prec i_1$
- ▶  $i_1 \prec i_1$ , **что невозможно** ▼

# Волновые алгоритмы: основные свойства

**Утверждение.** В любой волне любому действию принятия решения (строго) причинно-следственно предшествует действие отправки сообщения в каждом другом узле

$$(\forall \vec{\alpha} \in \mathcal{A}_\Pi : \forall i \in \mathcal{I}_{\vec{\alpha}}, \vec{\alpha}[i] \in \mathcal{D} : \forall p \in V, p \neq p(\vec{\alpha}[i]) : \exists j \in \mathcal{I}_{\vec{\alpha}}, j \prec i : \vec{\alpha}[j] \in \mathcal{A}^1)$$

**Доказательство.** Пусть  $\vec{\alpha} \in \mathcal{A}_\Pi$ ,  $i \in \mathcal{I}_{\vec{\alpha}}$ ,  $\vec{\alpha}[i] \in \mathcal{D}$ ,  $p \in V$  и  $p \neq p(\vec{\alpha}[i])$   
Если в  $\Gamma$  содержится ровно один узел, то утверждение очевидно верно  
Далее полагаем, что в  $\Gamma$  содержится хотя бы два узла

По определению волнового алгоритма, существует номер  $j$ , такой что  $\vec{\alpha}[j] \in \mathcal{A}_p$  и  $j \preceq i$

Выберем наибольший такой номер  $j$

По определению  $\prec$ , существует последовательность действий  $\vec{\alpha}[j], \vec{\alpha}[k_1], \dots, \vec{\alpha}[k_m], \vec{\alpha}[i]$ , такая что каждая пара соседних действий — это либо действия одного узла, либо взаимосвязанные действия отправки и приёма

По выбору  $j$ ,  $\vec{\alpha}[j] \in \mathcal{A}_p$  и  $\vec{\alpha}[k_1] \notin \mathcal{A}_p$

Следовательно,  $\vec{\alpha}[j]$  может быть только действием отправки ▼

# Волновые алгоритмы: основные свойства

**Следствие.** В любой волне с одним инициатором отправляется не менее  $(|V| - 1)$  сообщений

**Утверждение.** В любой волне с одним инициатором, принимающим решение, отправляется не менее  $|V|$  сообщений

Доказательство.

По **последнему доказанному утверждению**, принятию решения инициатором предшествует отправка сообщения во всех последователях — это  $(|V| - 1)$  отправок сообщений

По **первому доказанному утверждению**, самой ранней отправке сообщения последователем предшествует действие инициатора

Рассуждая так же, как и в **доказательстве предыдущего утверждения**, можно убедиться, что самой ранней отправке сообщения последователем предшествует хотя бы одна отправка сообщения инициатором (вдобавок к  $(|V| - 1)$  отправке последователями) ▼

# Волновые алгоритмы: основные свойства

**Утверждение.** Если  $\mathfrak{A}$  — волновой алгоритм для произвольной топологии, среди начальных знаний узлов которого нет имён (отличительных признаков) соседей и информации о топологии, то в каждой волне отправляется не менее  $|E|$  сообщений

**Доказательство.** *Предположим от противного*, что существует волна  $\pi$ , в которой отправляется менее  $|E|$  сообщений

Тогда существует канал  $(p - q)$ , в который в  $\pi$  не отправляются сообщения

Заменим этот канал на два, добавив в середину последователя  $x$ :

$$p - q \mapsto p - x - q$$

По **условию**, начальные состояния узлов  $p$  и  $q$  не изменяются при добавлении  $x$

Значит, существует волна  $\pi$ , в которой выполняются все те же действия, что и до добавления  $x$ , и в каналы  $p - x$  и  $x - q$  не отправляется ни одно сообщение

Так как  $x$  последователь, то  $x$  не выполняет ни одного действия в  $\pi$ , что *противоречит* определению волнового алгоритма ▼