Лекция 1. Функции k-значной логики. Способы их представления: таблицы, формулы, 1-я и 2-я формы, полиномы. Полнота. Теорема о полноте системы Поста. Функция Вебба.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова

Лекции на сайте https://mk.cs.msu.ru

Функции k-значной логики

Пусть $k \geqslant 2$, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется **функцией k-значной логики**, или **k-значной функцией**, если

$$f : E_k^n \to E_k, \ n \geqslant 1.$$

Множество всех k-значных функций обозначим P_k; множество всех k-значных функций n заданных переменных (например, $x_1, \ldots, x_n$) обозначим $P_k^{(n)}$.

При $k = 2$ функции называются также *функциями алгебры логики*, или *булевыми функциями*, при $k \geqslant 3$ — *функциями многозначной логики*, или *многозначными функциями*.

Существенные и несущественные переменные

Равенство k-значных функций рассматриваем с точностью до несущественных (фиктивных) переменных.

Переменная x_i называется **существенной** для функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$, если найдутся такие элементы $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \in E_k$, что функция переменной x_i

$$\varphi(x_i) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

принимает хотя бы два различных значения.

Переменная, не являющаяся существенной, называется **несущественной**, или **фиктивной**.

Считаем, что несущественные переменные можно убирать и добавлять.

Равенство функций

Функции $f \in P_k$ и $g \in P_k$ называем **равными**, если конечным числом удалений или добавлений несущественных переменных их можно сделать совпадающими.

Функции $f \in P_k$ и $g \in P_k$ называем **конгруэнтными**, если перемименованием переменных из одной из этих функций можно получить функцию, равную другой из этих функций.

Пример.

1. Функции $f(x) = 0$ и $g = 0$ равны.

2. Функции $f(x) = x$ и $h(y) = y$ конгруэнтны.

Применение

Конечные функции могут применяться для построения моделей при решении прикладных задач, в которых можно выделить исходное множество, состоящее из конечного числа элементов.

Проводятся исследования, относящиеся к разработке физических схем на многозначной основе; существуют промышленные образцы, основанные на многозначных логиках.

Таблица значений функции

Как можно задавать k-значные функции?

1. Таблицы значений.

Упорядочим все наборы множества E_k^n в *лексико-графическом*, или *алфавитном* порядке (в алфавите $0, 1, \ldots, k-1$), и сопоставим каждому набору значение функции на нем.

x_1	$\ldots$	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$
0	$\ldots$	0	0	$f(0, \ldots, 0, 0)$
0	$\ldots$	0	1	$f(0, \ldots, 0, 1)$
	$\ldots$			
0	$\ldots$	0	$k-1$	$f(0, \ldots, 0, k-1)$
	$\ldots$			
$k-1$	$\ldots$	$k-1$	0	$f(k-1, \ldots, k-1, 0)$
	$\ldots$			
$k-1$	$\ldots$	$k-1$	$k-2$	$f(k-1, \ldots, k-1, k-2)$
$k-1$	$\ldots$	$k-1$	$k-1$	$f(k-1, \ldots, k-1, k-1)$

Число функций n переменных

Предложение 1. *Пусть* $k \geqslant 2$. *При* $n \geqslant 1$ *верно* $|P_k^{(n)}| = k^{k^n}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k^{(n)}$. Ее можно задать таблицей с k^n строками, в каждой из которых находится одно значение из E_k из k возможных значений. Поэтому число таких таблиц, а значит, и число искомых функций равно k^{k^n}. Т. е. $|P_k^{(n)}| = k^{k^n}$.

$\square$

Некоторые k-значные функции

$\mathbf{n = 0}$:

константы $0, 1, \ldots, k-1$.

$\mathbf{n = 1}$:

x	x	$\bar{x}$	$\sim x$	$-x$
0	0	1	$k-1$	0
1	1	2	$k-2$	$k-1$
$\ldots$				
$k-2$	$k-2$	$k-1$	1	2
$k-1$	$k-1$	0	0	1

x — тождественно равная x;

$\bar{x} = x + 1 (\mathrm{mod}\ k)$ — отрицание Поста x;

$\sim x = (k-1) - x$ — отрицание Лукасевича x;

$-x = k - x (\mathrm{mod}\ k)$ — минус x.

Некоторые k-значные функции

Характеристические функции $J_i(x)$, $j_i(x)$, $i \in E_k$:

$$J_i(x) = \begin{cases} k-1, & x = i, \\ 0, & x \neq i, \end{cases}$$

$$j_i(x) = \begin{cases} 1, & x = i, \\ 0, & x \neq i. \end{cases}$$

Некоторые k-значные функции

n = 2:

$x + y$, $x - y$, $x \cdot y$ — сложение, вычитание и умножение по модулю k;

$$\min(x, y) = \begin{cases} x, & x \leqslant y, \\ y, & x > y, \end{cases}$$ — минимум из x и y;

$$\max(x, y) = \begin{cases} x, & x \geqslant y, \\ y, & x < y, \end{cases}$$ — максимум из x и y;

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & x \geqslant y, \\ 0, & x < y, \end{cases}$$ — усеченная разность;

$$x \to y = \begin{cases} k - 1, & x \leqslant y, \\ (k-1) - (x - y), & x > y, \end{cases}$$ — импликация.

обобщения:

$\min(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min(x_1, \min(x_2, \ldots, x_n))$;

$\max(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max(x_1, \max(x_2, \ldots, x_n))$;

$x^s = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{s}$ — степень.

Некоторые k-значные функции

Как функции алгебры логики обобщаются на функции многозначных логик?

n	P_2	$P_k,\ k \geqslant 3$	пояснения
$n = 0$	$0,\ 1$	$0,\ 1,\ \ldots,\ k-1$	константы
$n = 1$	x	x	тождественная функция
	$\bar{x}$	$\bar{x},\ \sim x$	отрицание
$n = 2$	$x \& y$	$\min(x, y)$	конъюнкция или минимум
	$x \vee y$	$\max(x, y)$	дизъюнкция или максимум
	$x \oplus y$	$x + y (\mathrm{mod}\ k)$	сложение по модулю k
	$x \to y$	$x \to y$	импликация

Формула

2. **Формулы**.
Пусть $A \subseteq P_k$, причем в A каждая функция имеет свое, отличное от других функций, обозначение.

Формула над множеством A определяется по индукции.

Базис индукции. Если x — переменная, то выражение x — формула.

Индуктивный переход. Если f — обозначение m-местной функции из A и $F_1, \ldots, F_m$ — уже построенные формулы или переменные (не обязательно различные), то выражение $f(F_1, \ldots, F_m)$ — формула.

Формула

Пример. Пусть $A = \{0, 1, 2, 3, 4, x^2, \bar{x}, \sim x, x \cdot y\} \subseteq P_5$. Тогда

$F_1 = x$	формула по базису индукции для переменной x;
$F_2 = x^2$	формула по индуктивному переходу для функции $x^2 \in A$ и уже построенной формулы F_1;
$F_3 = 3$	формула по индуктивному переходу для функции $3 \in A$;
$F_4 = 3 \cdot x^2$	формула по индуктивному переходу для функции $x \cdot y \in A$ и уже построенных формул F_3, F_2;
$F_5 = \sim (3 \cdot x^2)$	формула по индуктивному переходу для функции $\sim x \in A$ и уже построенной формулы F_4; и т. д.

Функция, определяемая формулой

Функция f_F, задаваемая формулой F, определяется по индукции.

Базис индукции. Если $F = x$, где x — переменная, то $f_F = x$, т. е. функция f_F тождественно равна переменной x.

Индуктивный переход. Если $F(x_1, \ldots, x_n) = f(F_1, \ldots, F_m)$, где f — обозначение m-местной функции из A, $F_1(x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1})$, $\ldots$, $F_m(x_{m,1}, \ldots, x_{m,n_m})$ — формулы и $\{x_{1,1}, \ldots, x_{m,n_m}\} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, то

$$f_F(x_1, \ldots, x_n) = f(f_{F_1}(x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1}), \ldots, f_{F_m}(x_{m,1}, \ldots, x_{m,n_m})).$$

Мы пользуемся тем, что f обозначает какую-то функцию из A.

Функция, определяемая формулой

Пример. Найдем функцию $f_{F_5}(x) \in P_5$, которая задается формулой F_5:

x	x^2	$3 \cdot x^2$	$\sim (3 \cdot x^2)$
0	0	0	4
1	1	3	1
2	4	2	2
3	4	2	2
4	1	3	1

Функция f_{F_5}, определяемая формулой F_5, записана в самом правом столбце.

Эквивалентные формулы

Формулы F_1 и F_2 называются **эквивалентными**, или **равносильными**, если они задают равные функции, т. е. функции f_{F_1} и f_{F_2} равны.

Обозначение эквивалентных формул: $F_1 = F_2$

Верны следующие свойства:
1) коммутативность: $\cdot, +, \min, \max$;
2) ассоциативность: $\cdot, +, \min, \max$;
3) дистрибутивность: $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.
И многие другие.

Эквивалентные формулы

Пример.

1. Докажем тождество: $-(\bar{x}) = \sim x$.

$$-(\bar{x}) = -(x+1) = (k-1) - x = \sim x.$$

2. Докажем тождество: $\sim \max(\sim x, \sim y) = \min(x, y)$.

$$\sim \max(\sim x, \sim y) =$$

$$= (k-1) - \begin{cases} (k-1) - x, & (k-1) - x \geqslant (k-1) - y, \\ (k-1) - y, & (k-1) - x < (k-1) - y, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x, & x \leqslant y, \\ y, & x > y, \end{cases} = \min(x, y).$$

1-я форма

Теорема 1 (о 1-й форме). *Пусть $k \geqslant 2$. Каждая функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ может быть задана формулой следующего вида:*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \max_{\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\in E_k^n} \min\left(J_{\sigma_1}(x_1), \ldots, J_{\sigma_n}(x_n), f(\sigma)\right).$$

Доказательство.
Рассмотрим произвольный набор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_k^n$. Тогда

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \max_{\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\in E_k^n} \min\left(J_{\sigma_1}(\alpha_1), \ldots, J_{\sigma_n}(\alpha_n), f(\sigma)\right) = \\ &= \max(0, \ldots, 0, f(\alpha), 0, \ldots, 0) = f(\alpha). \end{aligned}$$

□

1-я форма

Пример.
Пусть $f(x) = \bar{x} \in P_3$:

x	f
0	1
1	2
2	0

Найдем ее 1-ю форму:

$$\begin{aligned} f(x) &= \max(\min(J_0(x), f(0)), \min(J_1(x), f(1)), \min(J_2(x), f(2))) = \\ &= \max(\min(J_0(x), 1), \min(J_1(x), 2), \min(J_2(x), 0)) = \\ &= \max(\min(J_0(x), 1), J_1(x)). \end{aligned}$$

2-я форма

Теорема 2 (о 2-й форме) *Пусть $k \geqslant 2$. Каждая функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ может быть задана формулой следующего вида:*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\in E_k^n} j_{\sigma_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot j_{\sigma_n}(x_n) \cdot f(\sigma).$$

2-я форма

Пример. Пусть $f(x) = J_2(x + x^2) \in P_4$:

x	x^2	$x + x^2$	f
0	0	0	0
1	1	2	3
2	0	2	3
3	1	0	0

Найдем ее 2-ю форму:

$$\begin{aligned} f(x) &= j_0(x) \cdot f(0) + j_1(x) \cdot f(1) + j_2(x) \cdot f(2) + j_3(x) \cdot f(3) = \\ &= j_0(x) \cdot 0 + j_1(x) \cdot 3 + j_2(x) \cdot 3 + j_3(x) \cdot 0 = \\ &= 3j_1(x) + 3j_2(x). \end{aligned}$$

1-я и 2-я формы

Пример. Рассмотрим функцию $f(x, y) = \min(x^2, y) \in P_3$ ($f(x, y)$ указано на пересечении строки x и столбца y):

$x \setminus y$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	1

1-я форма для f:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \max(\min(J_1(x), J_1(y), 1), \min(J_1(x), J_2(y), 1), \\ &\quad \min(J_2(x), J_1(y), 1), \min(J_2(x), J_2(y), 1)). \end{aligned}$$

2-я форма для f:

$$f(x, y) = j_1(x)j_1(y) + j_1(x)j_2(y) + j_2(x)j_1(y) + j_2(x)j_2(y).$$

Полином

Мономом называется выражение вида

$$x_{i_1}^{s_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_m}^{s_m},$$

где все переменные различны и $s_1, \ldots, s_m \geqslant 1$, $m \geqslant 1$, или константа 1.

Полиномом по модулю k называется выражение вида

$$c_1 K_1 + \ldots + c_l K_l,$$

где K_j — различные мономы и $c_j \in E_k$ — коэффициенты, $j = 1, \ldots, l$, или константа 0.

Полиномы

Теорема 3 (о представлении k-значных функций полиномами) *Пусть $k \geqslant 2$. Каждая функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ может быть задана полиномом по модулю k тогда и только тогда, когда k — простое число.*

Полиномы

Доказательство.
Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$. Запишем ее во 2-й форме:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\in E_k^n} j_{\sigma_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot j_{\sigma_n}(x_n) \cdot f(\sigma).$$

Заметим, что при $i \in E_k$ верно $j_i(x) = j_0(x - i)$. Тогда

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\in E_k^n} j_0(x_1 - \sigma_1) \cdot \ldots \cdot j_0(x_n - \sigma_n) \cdot f(\sigma).$$

Полиномы

Доказательство.
1. Если k — простое число, то по малой теореме Ферма $a^{k-1} = 1 (\mathrm{mod}\ k)$ при $1 \leqslant a \leqslant k-1$.
Тогда $j_0(x) = 1 - x^{k-1}$ и

$$f = \sum_{\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\in E_k^n} (1-(x_1-\sigma_1)^{k-1})\cdot\ldots\cdot(1-(x_n-\sigma_n)^{k-1})\cdot f(\sigma).$$

Затем по свойствам коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности перемножаем скобки и приводим подобные слагаемые. Получаем полином по модулю k для функции $f(x_1,\ldots,x_n)$.
Существование полинома по модулю k для каждой k-значной функции при простых k доказано.

Полиномы

Доказательство.
2. Пусть k — составное число. Тогда $k = k_1 \cdot k_2$, где $k_2 \geqslant k_1 > 1$. Докажем от обратного, что в этом случае функция $j_0(x)$ не задается полиномом по модулю k.

Полиномы

Доказательство.
Пусть функция $j_0(x)$ задается полиномом по модулю k:

$$j_0(x) = c_s x^s + c_{s-1} x^{s-1} + \ldots + c_1 x + c_0,$$

где $c_s, c_{s-1}, \ldots, c_1, c_0 \in E_k$ — коэффициенты, $c_s \neq 0$.
Тогда

$$\begin{array}{lclcl} j_0(0) & = & c_0 & = & 1; \\ j_0(k_1) & = & c_s k_1^s + c_{s-1} k_1^{s-1} + \ldots + c_1 k_1 + 1 & = & 0. \end{array}$$

Полиномы

Доказательство. Получаем:

$$k_1 \cdot (c_s k_1^{s-1} + c_{s-1} k_1^{s-2} + \ldots + c_1) = k - 1 (\mathrm{mod}\ k).$$

Левая часть делится на k_1 и число k делится на k_1, поэтому число $k - 1$ обязано делиться на k_1 (причем $k_1 > 1$) — противоречие.
Т. е. при составных k никакой полином по модулю k не задает функцию $j_0(x)$.

$\square$

Полиномиальные функции

Функция $f \in P_k$ называется **полиномиальной**, если она задается полиномом по модулю k.

Функции

$$
\begin{aligned}
&x;\\
&\bar{x} = x + 1;\\
&\sim x = (k-1) - x = (k-1)x + (k-1);\\
&-x = k - x = (k-1)x;\\
&x + y;\\
&x - y = x + (k-1)y;\\
&x \cdot y;\\
&x^s
\end{aligned}
$$

являются полиномиальными при всех значениях k — и при простых, и при составных.

Неполиномиальные функции при составных k

Функции

$$
\begin{aligned}
&j_i(x),\ \ i \in E_k;\\
&J_i(x),\ \ i \in E_k;\\
&\max(x, y);\\
&\min(x, y);\\
&x \dot{-} y;\\
&x \to y
\end{aligned}
$$

являются полиномиальными при простых k и не являются полиномиальными при всех составных k (покажем далее).

Полиномы

Множество всех k-значных функций, задающихся полиномами по модулю k, обозначим $Polyn_k$.

Следствие 3.1.
Если k — простое число, то $Polyn_k = P_k$;
если k — составное число, то $Polyn_k \neq P_k$.

Вопросы:
Как находить полином для заданной k-значной функции, если k — простое число?
Как проверить, задается ли полиномом заданная k-значная функция, если k — составное число?

Если k — простое число

Способы построения полиномов k-значных функций при простых k:

1) способ из доказательства теоремы 4 — по 2-й форме;

2) метод *неопределенных коэффициентов*.

Если k — простое число

Пример. Пусть $f(x) = 4J_2(x) + 3J_3(x) \in P_5$:

x	f
0	0
1	0
2	1
3	2
4	0

По 2-й форме найдем для функции f полином по модулю 5.

Запишем функцию f во 2-й форме:

$$f(x) = j_2(x) + 2 \cdot j_3(x).$$

Если k — простое число

Далее получаем:

$$\begin{aligned} f(x) &= j_2(x) + 2 \cdot j_3(x) = j_0(x-2) + 2j_0(x-3) = \\ &= (1-(x-2)^4) + 2 \cdot (1-(x-3)^4). \end{aligned}$$

Применим тождество:

$$\begin{aligned} (x+y)^4 &= x^4 + 4x^3y + x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 (\mathrm{mod}\ 5) \\ &= x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 (\mathrm{mod}\ 5). \end{aligned}$$

Находим:

$$1-(x-2)^4 = 1-(x^4+2x^3+4x^2+3x+1) = 4x^4+3x^3+x^2+2x,$$
$$1-(x-3)^4 = 1-(x^4-2x^3+4x^2-3x+1) = 4x^4+2x^3+x^2+3x.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} f(x) &= (4x^4+3x^3+x^2+2x) + 2 \cdot (4x^4+2x^3+x^2+3x) = \\ &= 2x^4+2x^3+3x^2+3x. \end{aligned}$$

Значит,

$$f(x) = 2x^4+2x^3+3x^2+3x.$$

Если k — составное число

При составных k можно применять метод *неопределенных коэффициентов* для проверки, задается ли данная k-значная функция полиномом по модулю k.

Если k — составное число

Пример. Пусть $f(x) = J_1(x) + J_2(x) \in P_4$.

Методом неопределенных коэффициентов проверим, задается ли функция f полиномом по модулю 4.

Сначала построим таблицу степеней x^s:

x	x^2	x^3	x^4
0	0	0	0
1	1	1	1
2	0	0	0
3	1	3	1

Т. к. $x^4 = x^2$, степени в полиноме по модулю 4 можно записывать только до третьей.

Если k — составное число

Предположим, что f задается полиномом по модулю 4. Тогда

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

где $a, b, c, d \in E_4$ — неизвестные коэффициенты.

Для нахождения коэффициентов составим систему уравнений, подставляя в левую и правую части равенства все значения x из E_4 для этой функции $f(x) = J_1(x) + J_2(x)$:

$$\begin{array}{lclcl} f(0) & = & d & = & 0; \\ f(1) & = & a + b + c + d & = & 3; \\ f(2) & = & 2c + d & = & 3; \\ f(3) & = & 3a + b + 3c + d & = & 0. \end{array}$$

Если k — составное число

Из первого и третьего уравнения получаем:

$$2c = 3.$$

Подставляя все возможные значения $c \in E_4$, выясняем, что это равенство не выполняется ни при каких значениях $c \in E_4$:

$$2 \cdot 0 = 0;\ 2 \cdot 1 = 2;\ 2 \cdot 2 = 0;\ 2 \cdot 3 = 2.$$

Следовательно, исходная система не имеет решений (по модулю 4), откуда

$$f(x) = J_1(x) + J_2(x) \notin Polyn_4.$$

Если k — составное число

Пример. Пусть $f(x) = 2(J_1(x) + J_2(x)) \in P_4$. Аналогично проверим, задается ли функция f полиномом по модулю 4. Тогда

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

где $a, b, c, d \in E_4$ — неизвестные коэффициенты. Составляем систему уравнений:

$$\begin{array}{lclcl} f(0) & = & d & = & 0; \\ f(1) & = & a + b + c + d & = & 2; \\ f(2) & = & 2c + d & = & 2; \\ f(3) & = & 3a + b + 3c + d & = & 0. \end{array}$$

Если k — составное число

Из первого и третьего уравнений получаем:

$$2c = 2, \ c = 1.$$

Тогда

$$a + b = 1;$$
$$3a + b = 1.$$

Далее

$$a = 0, \ b = 1.$$

Следовательно, функция f задается полиномом по модулю 4, и один из ее полиномов по модулю 4 найден:

$$f(x) = 2(J_1(x) + J_2(x)) = x^2 + x \in Polyn_4.$$

Операция замыкания

Пусть $A \subseteq P_k$ — множество k-значных функций.

Замыканием $[A]$ множества A называется множество всех функций, выразимых формулами над A.

Если $[A] = A$, то множество A называется **замкнутым классом**.

Примеры: P_k, $Polyn_k$.

Полные системы

Если $[A] = P_k$, то множество A называется **полной системой**.

Примеры.

1. $\{0, 1, \ldots, k-1, J_0(x), J_1(x), \ldots, J_{k-1}(x), \max(x, y), \min(x, y)\}$ — система 1-й формы.

2. $\{0, 1, \ldots, k-1, j_0(x), j_1(x), \ldots, j_{k-1}(x), x+y, x \cdot y\}$ — система 2-й формы.

3. $\{0, 1, \ldots, k-1, x+y, x \cdot y\}$, если k – простое число, — система полиномов.

Система Поста

Теорема 4. *Пусть* $k \geqslant 3$. *Система Поста* $\{\bar{x}, \max(x, y)\}$ *является полной системой в* P_k.

Доказательство. Построим формулами над системой Поста все функции из системы 1-й формы.

1. Построение констант.
$\bar{x} = x + 1$; $(x+1)+1 = x+2$; $\ldots$; $(x+(k-1))+1 = x$. Тогда

$$\max(x, x+1, x+2, \ldots, x+(k-1)) = k-1.$$

Далее $(k-1)+1 = 0$; $0+1 = 1$; $1+1 = 2$; $\ldots$;
$(k-2)+1 = k-1$.
Все константы получены.

Система Поста

Доказательство. 2. Построение $J_i(x)$, $i \in E_k$.
Проверим, что

$$J_i(x) = 1 + \max_{t \neq (k-1)-i} (x + t).$$

Если $x = i$, то

$$k - 1 = J_i(i) = 1 + \max_{t \neq (k-1)-i} (i + t) = 1 + (k - 2) = k - 1.$$

Если $x \neq i$, то

$$0 = J_i(x) = 1 + \max_{t \neq (k-1)-i} (x + t) = 1 + (k - 1) = 0.$$

Все $J_i(x)$, $i \in E_k$, получены.

Система Поста

.

Доказательство. 3. Построение $\min(x, y)$.
Проверим, что

$$g_{i,a}(x) = a \cdot j_i(x) = (a+1) + \max(J_i(x), (k-1) - a).$$

Если $x = i$, то

$$a = a \cdot j_i(i) = (a+1) + \max(J_i(i), (k-1) - a) = (a+1) + (k-1) = a.$$

Если $x \neq i$, то

$$0 = a \cdot j_i(x) = (a+1) + \max(J_i(x), (k-1) - a) = (a+1) + (k-1) - a = 0.$$

Система Поста

.

Доказательство. Получена каждая функция $f(x) \in P_k^{(1)}$, т. к.

$$f(x) = \max(g_{0,f(0)}(x), g_{1,f(1)}(x), \ldots, g_{k-1,f(k-1)}(x)).$$

Действительно, для каждого значения $a \in E_k$ верно

$$\begin{aligned} f(a) &= \max(g_{0,f(0)}(a), \ldots, g_{a,f(a)}(a), \ldots, g_{k-1,f(k-1)}(a)) = \\ &= \max(0, \ldots, 0, f(a), 0, \ldots, 0) = f(a). \end{aligned}$$

В частности, построена функция $f(x) = \sim x$.
Тогда

$$\min(x, y) = \sim \max(\sim x, \sim y).$$

Функция $\min(x, y)$ получена.
Все функции системы 1-й формы построены формулами над функциями системы Поста. Система Поста полна. $\square$

Функция Вебба

Следствие 4.1. *Пусть $k \geqslant 3$. Множество, состоящее из одной функции Вебба $V_k(x, y) = \max(x, y) + 1$, является полной системой в P_k.*

Доказательство. Построим из функции Вебба функции из системы Поста:

$$\begin{array}{lcl} \bar{x} & = & V_k(x, x) = \max(x, x) + 1 = x + 1; \\ \max(x, y) & = & V_k(x, y) + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{k-1}. \end{array}$$

$\square$

Неполиномиальность максимума

Следствие 4.2. *Если k — составное число, то* $\max(x, y) \notin Polyn_k$.

Доказательство проведем от обратного: предположим, что $\max(x, y) \in Polyn_k$ при некотором составном k.

Но $\bar{x} = x + 1 \in Polyn_k$, откуда $\{\bar{x}, \max(x, y)\} \subseteq Polyn_k$.

Система Поста полна в P_k, поэтому получаем, что каждая функция из P_k задается полиномом по модулю k при этом составном k — противоречие.

Поэтому $\max(x, y) \notin Polyn_k$.

$\square$

Бесконечные полные системы в P_k

Следствие 4.3. *Из каждой бесконечной полной в P_k системы можно выделить конечную полную подсистему.*

Доказательство. Пусть $A \subseteq P_k$ — бесконечная полная система.

Т. к. система A полна, в ней найдутся функции такие $f_1, \ldots, f_t$, что функция Вебба $V_k(x, y)$ выражается формулой над ними.

Тогда подсистема $A' = \{f_1, \ldots, f_t\}$ полна в P_k.

$\square$

Задачи

1. При всех $k \geqslant 2$ доказать тождества:

1) $x \to y = \sim (x \dot{-} y)$; 2) $\min(x, y) = x \dot{-} (x \dot{-} y)$;
3) $x \dot{-} y = x - \min(x, y)$; 4) $x \dot{-} y = \max(x, y) - y$.

2. Записать функцию $f \in P_k$ в 1-й и 2-й формах, если

1) $f(x) = \min(x^2, x^3)$, $k = 5$; 2) $f(x) = (\sim x)^2 \dot{-} 3 \cdot x$, $k = 4$;
3) $f(x, y) = \min(x, y)$, $k = 3$; 4) $f(x, y) = 2 \cdot x \cdot y^2$, $k = 4$.

3. Записать функцию $f \in P_k$ полиномом по модулю k, если

1) $f(x) = J_2(x) + 3J_4(x)$, $k = 5$; 2) $f(x) = \max(2x, 3x)$, $k = 5$;
3) $f(x, y) = \min(x^2, y^2)$, $k = 3$; 4) $f(x, y) = x \dot{-} y$, $k = 3$.

Задачи

4. Задается ли функция $f \in P_k$ полиномом по модулю k, если

1) $f(x) = \min(x^2, x^3)$, $k = 6$;
2) $f(x) = 2 \cdot j_0(x)$, $k = 4$;
3) $f(x, y) = 5J_2(x) + y^3$, $k = 16$;
4) $f(x, y) = \min(x^2, y^2)$, $k = 4$?

5. Задается ли функция $f \in P_k$ полиномом по составному модулю k, если

1) $f(x, y) = \min(x, y)$;
2) $f(x, y) = x \dot{-} y$;
3) $f(x, y) = (\max(x, y) - \min(x, y))^2$;
4) $f(x, y) = \min(x, y) + \max(x, y)$?