

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 23

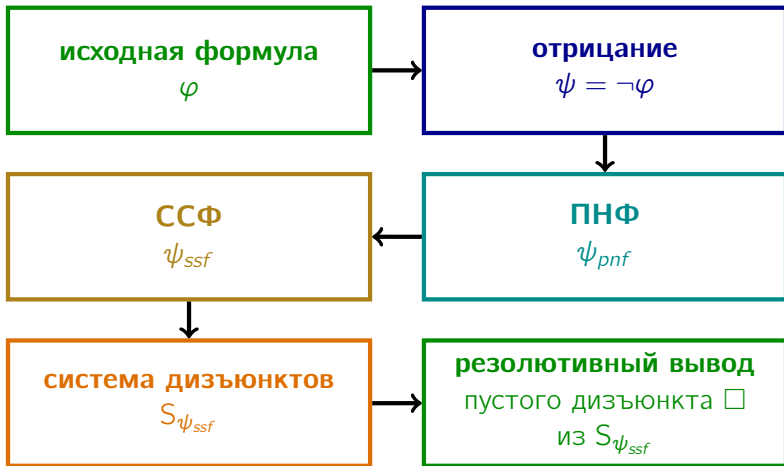
Обоснование общезначимости формулы
методом резолюций (пример)

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru



$$\models \varphi \Leftrightarrow \not\models \psi \Leftrightarrow \not\models \psi_{pnf} \Leftrightarrow \not\models \psi_{ssf} \Leftrightarrow \not\models S_{\psi_{ssf}}$$

\Leftarrow существует вывод \square из $S_{\psi_{ssf}}$

Примеры, которые использовались при обсуждении этапов метода резолюций, выбирались так, чтобы при их совмещении получился

сквозной пример: обоснование общезначимости формулы

$$\exists x (P(x) \& (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))) \rightarrow \exists y R(x, y)$$

методом резолюций

Запишем получившееся обоснование от начала и до конца

Этап 1: поставить отрицание

$$\models \exists x (P(x) \& (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))) \rightarrow \exists y R(x, y)$$

\Leftrightarrow

$$\not\models \neg \exists x (P(x) \& (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))) \rightarrow \exists y R(x, y)$$

$$\models \exists x (P(x) \& (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))) \rightarrow \exists y R(x, y))$$

\Leftrightarrow

$$\not\models \neg \exists x (P(x) \& (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))) \rightarrow \exists y R(x, y))$$

Этап 2: построить равносильную ПНФ

$$\neg \exists x (P(x) \& (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))) \rightarrow \exists y R(x, y))$$

\sim (*переименование переменных*)

$$\neg \exists x (P(x) \& (\forall z P(z) \rightarrow \exists y R(x, y))) \rightarrow \exists u R(x, u))$$

\sim (*удаление импликаций*)

$$\neg \exists x (\neg (P(x) \& (\neg \forall z P(z) \vee \exists y R(x, y))) \vee \exists u R(x, u))$$

\sim (*продвижение отрицаний*)

$$\forall x (P(x) \& (\exists z \neg P(z) \vee \exists y R(x, y)) \& \forall u \neg R(x, u))$$

\sim (*вынесение кванторов*)

$$\forall x \exists z \exists y \forall u (P(x) \& (\neg P(z) \vee R(x, y)) \& \neg R(x, u))$$

\sim (*получение КНФ*)

$$\forall x \exists z \exists y \forall u (P(x) \& (\neg P(z) \vee R(x, y)) \& \neg R(x, u))$$

$$\begin{aligned} & \models \exists x (P(x) \& (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x, y)) \rightarrow \exists y R(x, y)) \\ & \Leftrightarrow \\ & \not\models \forall x \exists z \exists y \forall u (P(x) \& (\neg P(z) \vee R(x, y)) \& \neg R(x, u)) \end{aligned}$$

Этап 3: построить ССФ, применив алгоритм сколемизации

$$\begin{aligned} & \not\models \forall x \exists \underline{z} \exists \underline{y} \forall u (P(x) \& (\neg P(\underline{z}) \vee R(x, \underline{y})) \& \neg R(x, u)) \\ & \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\not\models \forall x \forall u (P(x) \& (\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x, \mathbf{g}(x))) \& \neg R(x, u))$$

Этап 4: перейти к системе дизъюнктов

$$\begin{aligned} & \not\models \forall x \forall u (P(x) \& (\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x, \mathbf{g}(x))) \& \neg R(x, u)) \\ & \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\not\models \{P(x), \neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x, \mathbf{g}(x)), \neg R(x, u)\}$$

$$\begin{aligned} &\models \exists x (P(x) \& (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x, y)) \rightarrow \exists y R(x, y)) \\ &\quad \Leftrightarrow \\ &\models \{P(x), \quad \neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x, \mathbf{g}(x)), \quad \neg R(x, u)\} \end{aligned}$$

Этап 5: резолютивно вывести \square

$$P(x_1) \quad \neg P(\mathbf{f}(x_2)) \vee R(x_2, \mathbf{g}(x_2)) \quad R(x_3, \mathbf{g}(x_3)) \quad \neg R(x_4, u_4) \longrightarrow \square$$

Оказалось, что \square резолютивно выводим
из построенной системы дизъюнктов

Следовательно (по спектру доказанных ранее теорем), исходная формула

$$\exists x (P(x) \& (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x, y)) \rightarrow \exists y R(x, y))$$

общезначима