Лекция 6. Особенности многозначных логик. Замкнутый класс, базис замкнутого класса. Теорема Янова. Теорема Мучника. Мощность множества замкнутых классов в P_k.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

Факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

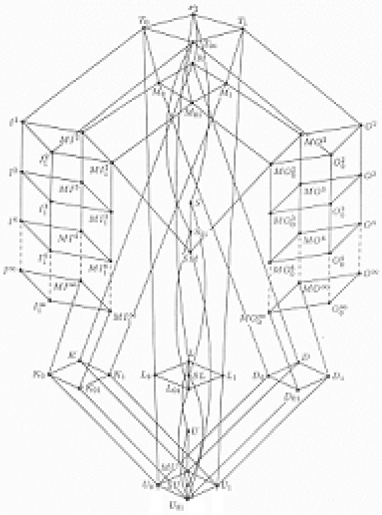
Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

Замкнутый класс

Множество A, $A \subseteq P_k$, называется **замкнутым классом**, если $[A] = A$.

Э. Пост доказал, что в P_2 существует **счетное число** замкнутых классов и построил их **решетку** по включению.

Решетка замкнутых классов в P_2



Базис замкнутого класса

Пусть A, $A \subseteq P_k$, — замкнутый класс и $B \subseteq A$.

Множество B называется **базисом** класса A, если

1) $[B] = A$, т. е. система B **полна** в A;

2) для каждой функции $f \in B$ верно $[B \setminus \{f\}] \neq A$, т. е. система B **неизбыточна** в A.

Любой базис всего класса P_2 содержит не более 4-х функций (т. е. является **конечным**).

Э. Пост доказал, что в P_2 каждый замкнутый класс имеет **конечный** базис.

Теорема Янова

Теорема 1 (Ю. И. Янова). *В P_k при $k \geqslant 3$ существует замкнутый класс, не имеющий базиса.*

Доказательство. Пусть $k \geqslant 3$. Рассмотрим множество функций $\{f_0, f_1, f_2, \dots\} \subseteq P_k$:

$$f_0 = 0,$$

$$f_i(x_1, \dots, x_i) = \begin{cases} 1, & x_1 = \dots = x_i = 2, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть $A = [\{f_0, f_1, f_2, \dots\}]$.

Заметим, что

$$f_i(\dots, f_j(\dots), \dots) = 0.$$

Теорема Янова

Докажем от обратного, что замкнутый класс A не имеет базиса.

Предположим, что $B \subseteq A$ — базис класса A, и f_{n_0} — функция с **наименьшим** индексом в базисе B.

Возможны два случая.

Теорема Янова

1. В базисе B есть **еще хотя бы одна функция** f_{n_1}, где $n_1 > n_0$. Но тогда противоречие с п. 2 определения базиса, т. к.

$$f_{n_0}(x_1, \ldots, x_{n_0}) = f_{n_1}(x_1, \ldots, x_{n_0}, x_{n_0}, \ldots, x_{n_0}).$$

Теорема Янова

2. В базисе B есть **только функция** f_{n_0}. Но тогда противоречие с п. 1 определения базиса, а именно, никакая функция f_n при $n > n_0$ не может быть получена, т. к.

$$f_{n_0}(\ldots, f_{n_0}(\ldots), \ldots) = 0.$$

Значит, класс A не имеет базиса.

$\square$

Теорема Мучника

Теорема 2 (А. А. Мучника). *В P_k при $k \geqslant 3$ существует замкнутый класс, имеющий счетный базис.*

Доказательство. Пусть $k \geqslant 3$. Рассмотрим множество функций $\{f_2, f_3, \ldots\} \subseteq P_k$:

$$f_i(x_1, \ldots, x_i) = \begin{cases} 1, & x_1 = \ldots = x_{j-1} = x_{j+1} = \ldots = 2, x_j = 1, \\ & j = 1, \ldots, i, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть $A = [\{f_2, f_3, \ldots\}]$.

Теорема Мучника

Покажем, что $B = \{f_2, f_3, \ldots\}$ — базис замкнутого класса A.

Докажем, что для каждого $n_0 = 2, 3, \ldots$ функция f_{n_0} не задается формулой над множеством $B \setminus \{f_{n_0}\}$.

Теорема Мучника

Предположим обратное: пусть

$$f_{n_0}(x_1, \dots, x_{n_0}) = f_{n_1}(F_1, \dots, F_{n_1}).$$

Возможны три случая.

Теорема Мучника

Итак, пусть

$$f_{n_0}(x_1, \ldots, x_{n_0}) = f_{n_1}(F_1, \ldots, F_{n_1}).$$

1. Среди формул $F_1, \ldots, F_{n_1}$ **не менее двух**, которые **не являются переменными**:

$$f_{n_0}(x_1, \ldots, x_{n_0}) = f_{n_1}(\ldots, f_i(\ldots), \ldots, f_j(\ldots), \ldots).$$

Но тогда противоречие на наборе $(1, 2, \ldots, 2) \in E_k^{n_0}$, т. к.

$$1 = f_{n_0}(1, 2, \ldots, 2) \neq f_{n_1}(\ldots, \{0, 1\}, \ldots, \{0, 1\}, \ldots) = 0.$$

Теорема Мучника

Итак, пусть

$$f_{n_0}(x_1, \ldots, x_{n_0}) = f_{n_1}(F_1, \ldots, F_{n_1}).$$

2. Среди формул $F_1, \ldots, F_{n_1}$ **только одна**, которая **не является переменной**. Т. к. $n_1 \geqslant 2$, хотя бы одна формула равна переменной, например, x_1:

$$f_{n_0}(x_1, \ldots, x_{n_0}) = f_{n_1}(\ldots, x_1, \ldots, f_i(\ldots), \ldots).$$

Но тогда противоречие на наборе $(1, 2, \ldots, 2) \in E_k^{n_0}$, т. к.

$$1 = f_{n_0}(1, 2, \ldots, 2) \neq f_{n_1}(\ldots, 1, \ldots, \{0, 1\}, \ldots) = 0.$$

Теорема Мучника

Итак, пусть

$$f_{n_0}(x_1, \ldots, x_{n_0}) = f_{n_1}(F_1, \ldots, F_{n_1}).$$

3. **Все** формулы $F_1, \ldots, F_{n_1}$ **являются переменными**. Тогда $n_1 > n_0$, поэтому хотя бы одна переменная встречается по меньшей мере дважды, например, x_1:

$$f_{n_0}(x_1, \ldots, x_{n_0}) = f_{n_1}(\ldots, x_1, \ldots, x_1, \ldots).$$

Но тогда противоречие на наборе $(1, 2, \ldots, 2) \in E_k^{n_0}$, т. к.

$$1 = f_{n_0}(1, 2, \ldots, 2) \neq f_{n_1}(\ldots, 1, \ldots, 1, \ldots) = 0.$$

Теорема Мучника

Значит, B — неизбыточная система.

Поэтому B — базис замкнутого класса A.

$\square$

Мощность множества замкнутых классов в P_k при $k \geqslant 3$

Теорема 3. *В P_k при $k \geqslant 3$ существует континум замкнутых классов.*

Мощность множества замкнутых классов в P_k при $k \geqslant 3$

Доказательство. Пусть $k \geqslant 3$. Рассмотрим множество $B = \{f_2, f_3, \ldots\} \subseteq P_k$ функций из доказательства теоремы Мучника.

Для каждого бесконечного множества натуральных чисел:

$$\nu = \{n_1, n_2, \ldots\},$$

где все $n_i \geqslant 2$, рассмотрим замкнутый класс:

$$A_\nu = [\{f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots\}].$$

Тогда, если множества ν_1 и ν_2 различны, то $A_{\nu_1} \neq A_{\nu_2}$.

Значит, найдены континум различных замкнутых классов в P_k при $k \geqslant 3$.

$\square$

Литература к лекции

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001. Ч. I, гл. 2, с. 65–69.

2. Марченков С.С. Основы теории булевых функций. М.: Физматлит, 2014. Гл. IV, с. 66–82.