

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 11

Метод семантических таблиц:
корректность табличного вывода

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, февраль–май

Лемма (о корректности правил табличного вывода)

Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1(, T_2)}$:

$L\&, R\&, LV, RV, L\rightarrow, R\rightarrow, L\neg, R\neg, L\forall, R\forall, L\exists, R\exists$ —
таблица T_0 выполнима тогда и только тогда,
когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство

$$L\rightarrow: \frac{\langle \Gamma, \varphi \rightarrow \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle}$$

(\Rightarrow) Пусть верхняя таблица выполнима —
покажем, что тогда выполнима хотя бы одна из нижних таблиц

По определению выполнимости таблицы,

существуют интерпретация \mathcal{I} и набор предметов \tilde{d}^n , такие что

- ▶ для любой формулы χ' из Γ верно $\mathcal{I} \models \chi'[\tilde{d}^n]$
- ▶ для любой формулы χ'' из Δ верно $\mathcal{I} \not\models \chi''[\tilde{d}^n]$
- ▶ $\mathcal{I} \models (\varphi \rightarrow \psi)[\tilde{d}^n]$

Лемма (о корректности правил табличного вывода)

Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1(, T_2)}$:

$L\&, R\&, LV, RV, L\rightarrow, R\rightarrow, L\neg, R\neg, L\forall, R\forall, L\exists, R\exists$ —
таблица T_0 выполнима тогда и только тогда,
когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство

$$(L\rightarrow (\Rightarrow)) \quad \chi' \in \Gamma \Rightarrow \mathcal{I} \models \chi'[\tilde{d}^n] \quad \chi'' \in \Delta \Rightarrow \mathcal{I} \not\models \chi''[\tilde{d}^n] \quad \mathcal{I} \models (\varphi \rightarrow \psi)[\tilde{d}^n]$$

Так как $\mathcal{I} \models (\varphi \rightarrow \psi)[\tilde{d}^n]$, то, согласно семантике \rightarrow ,
верно хотя бы одно из двух:

- ▶ $\mathcal{I} \not\models \varphi[\tilde{d}^n]$
- ▶ $\mathcal{I} \models \psi[\tilde{d}^n]$

Следовательно, хотя бы одна из таблиц $\langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle$ выполнима

(\Leftarrow) Рассуждения аналогичны

$L\&, R\&, LV, RV, R\rightarrow, L\neg, R\neg$ — рассуждения аналогичны

Лемма (о корректности правил табличного вывода)

Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1(, T_2)}$:

$L\&, R\&, LV, RV, L\rightarrow, R\rightarrow, L\neg, R\neg, L\forall, R\forall, L\exists, R\exists$ —
таблица T_0 выполнима тогда и только тогда,
когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство. $L\forall: \frac{\langle \Gamma, \forall x \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall x \varphi, \varphi\{x/t\} \mid \Delta \rangle}$

(\Leftarrow) Очевидно, что если вычеркнуть « $\varphi\{x/t\}$ » из выполнимой (нижней) таблицы, то она (станет **верхней** и) останется выполнимой

(\Rightarrow) Пусть верхняя таблица выполнима,

и пусть \tilde{x}^n — все свободные переменные формул нижней таблицы

Верхняя таблица выполнима \Leftrightarrow

существуют интерпретация \mathcal{I} и набор предметов \tilde{d}^n , такие что

- ▶ $\mathcal{I} \models \psi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$ для каждой формулы ψ из Γ
- ▶ $\mathcal{I} \not\models \chi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$ для каждой формулы χ из Δ
- ▶ $\mathcal{I} \models (\forall x \varphi)[\tilde{d}^n]$

При этом $\mathcal{I} \models (\forall x \varphi)[\tilde{d}^n] \Rightarrow \mathcal{I} \models \varphi[t[\tilde{d}^n], \tilde{d}^n] \Rightarrow \mathcal{I} \models \varphi\{x/t\}[\tilde{d}^n]$

Значит, нижняя таблица также выполнима

A где используется **правильность** подстановки $\{x/t\}$ для φ ?

Лемма (о корректности правил табличного вывода)

Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1(, T_2)}$:

$L\&, R\&, LV, RV, L\rightarrow, R\rightarrow, L\neg, R\neg, L\forall, R\forall, L\exists, R\exists$ —
таблица T_0 выполнима тогда и только тогда,
когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство. $L\exists$: $\frac{\langle \Gamma, \exists x \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi\{x/c\} \mid \Delta \rangle}$

(\Leftarrow) Очевидно, т.к. если $\mathcal{I} \models \varphi\{x/c\}[\tilde{d}^n]$, то $\mathcal{I} \models (\exists x \varphi)[\tilde{d}^n]$

(\Rightarrow) Пусть верхняя таблица выполнима,
и \tilde{x}^n — все свободные переменные формул верхней таблицы

Верхняя таблица выполнима \Leftrightarrow

существуют интерпретация \mathcal{I} и набор предметов \tilde{d}^n , такие что

- ▶ $\mathcal{I} \models \psi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$ для каждой формулы ψ из Γ
- ▶ $\mathcal{I} \not\models \chi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$ для каждой формулы χ из Δ
- ▶ $\mathcal{I} \models (\exists x_0 \varphi)[\tilde{d}^n]$ — а значит, существует предмет d_0 , такой что $\mathcal{I} \models \varphi[d_0, \tilde{d}^n]$

Лемма (о корректности правил табличного вывода)

Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1(, T_2)}$:

$L\&, R\&, LV, RV, L\rightarrow, R\rightarrow, L\neg, R\neg, L\forall, R\forall, L\exists, R\exists$ —
таблица T_0 выполнима тогда и только тогда,
когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство. $L\exists$: $\frac{\langle \Gamma, \exists x \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi\{x/c\} \mid \Delta \rangle}$

$(\Rightarrow) \quad \psi \in \Gamma \Rightarrow \mathcal{I} \models \psi[\tilde{d}^n] \quad \chi \in \Delta \Rightarrow \mathcal{I} \not\models \chi[\tilde{d}^n] \quad \mathcal{I} \models \varphi[d_0, \tilde{d}^n]$

Рассмотрим интерпретацию \mathcal{J} ,

отличающуюся от \mathcal{I} только оценкой константы \mathbf{c} : $\bar{\mathbf{c}} = d_0$

Тогда $\mathcal{J} \models (\varphi\{x/\mathbf{c}\})[\tilde{d}^n]$

Кроме того,

- ▶ $\mathcal{J} \models \psi[\tilde{d}^n]$ для каждой формулы ψ из Γ
- ▶ $\mathcal{J} \not\models \chi[\tilde{d}^n]$ для каждой формулы χ из Δ

Значит, нижняя таблица выполнима

А где используется тот факт, что \mathbf{c} — «неиспользованная» константа?

$R\forall, R\exists$ — рассуждения аналогичны ▼

Теорема (о корректности табличного вывода)

Если для семантической таблицы T существует успешный табличный вывод, то таблица T невыполнима

Доказательство.

Следует из определения успешного табличного вывода, леммы корректности правил табличного вывода и утверждения о невыполнимости закрытых таблиц ▼

Следствие

Если для таблицы $\langle \mid \varphi \rangle$ существует успешный табличный вывод, то $\models \varphi$

А верно ли утверждение в обратную сторону?