

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 15

Равносильность формул

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

Вступление

Из булевой алгебры:

$$A \vee B \rightarrow (C \& D \rightarrow E)$$

\mapsto

$$(x \rightarrow y \mapsto \neg x \vee y)$$

$$\neg(A \vee B) \vee \neg(C \& D) \vee E$$

\mapsto

$$(\neg(x \& y) \mapsto \neg x \vee \neg y; \dots \mapsto \dots)$$

$$\neg A \& \neg B \vee \neg C \vee \neg D \vee E$$

\mapsto

$$(\dots \mapsto \dots)$$

$$(\neg A \vee \neg C \vee \neg D \vee E) \& (\neg B \vee \neg C \vee \neg D \vee E)$$

Нижняя формула получена из верхней при помощи **основных тождеств** булевой алгебры

Значит, можно быть уверенным в том, что эти формулы имеют одинаковый смысл

Неплохо было бы (и для метода резолюций, и в целом) уметь преобразовывать формулы **логики предикатов** с гарантированным сохранением их смысла

Равносильность формул

Эквивалентность (логическая связка):

$\varphi \leftrightarrow \psi$ — это сокращение для формулы $(\varphi \rightarrow \psi) \& (\psi \rightarrow \varphi)$

Формулы φ, ψ **равносильны** ($\varphi \sim \psi$), если формула $\varphi \leftrightarrow \psi$ общезначима

Утверждение. Для любых равносильных формул $\varphi(\tilde{x}^n), \psi(\tilde{x}^n)$ ЛП, интерпретации \mathcal{I} и набора предметов \tilde{d}^n верно следующее:

$$\mathcal{I} \models \varphi[\tilde{d}^n] \Leftrightarrow \mathcal{I} \models \psi[\tilde{d}^n]$$

Доказательство.

(\Rightarrow) Пусть $\mathcal{I} \models \varphi[\tilde{d}^n]$. Тогда:

$\models (\varphi \rightarrow \psi) \& (\psi \rightarrow \varphi)$ (по определению равносильности)

$\mathcal{I} \models ((\varphi \rightarrow \psi) \& (\psi \rightarrow \varphi))[\tilde{d}^n]$ (по определению общезначимости)

$\mathcal{I} \models (\varphi \rightarrow \psi)[\tilde{d}^n]$ (по семантике «&»)

$\mathcal{I} \models \psi[\tilde{d}^n]$ (по семантике « \rightarrow » и соотношению $\mathcal{I} \models \varphi[\tilde{d}^n]$)

(\Leftarrow) Аналогично ▼

Равносильность формул

Утверждение. \sim — отношение эквивалентности

Утверждение. Если формула φ общезначима, то любая равносильная ей формула ψ также общезначима

Утверждение. Если формула φ выполнима, то любая равносильная ей формула ψ также выполнима

Можете попробовать доказать эти утверждения самостоятельно

Основные равносильности

Законы булевой алгебры

Коммутативность $\&$ и \vee :

$$\varphi \& \psi \sim \psi \& \varphi$$

$$\varphi \vee \psi \sim \psi \vee \varphi$$

Ассоциативность $\&$ и \vee :

$$(\varphi \& \psi) \& \chi \sim \varphi \& (\psi \& \chi)$$

$$(\varphi \vee \psi) \vee \chi \sim \varphi \vee (\psi \vee \chi)$$

Дистрибутивность \vee относительно $\&$ и $\&$ относительно \vee :

$$\varphi \& (\psi \vee \chi) \sim \varphi \& \psi \vee \varphi \& \chi$$

$$\varphi \vee (\psi \& \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \& (\varphi \vee \chi)$$

Идемпотентность $\&$ и \vee :

$$\varphi \& \varphi \sim \varphi$$

$$\varphi \vee \varphi \sim \varphi$$

Инволютивность \neg :

$$\neg \neg \varphi \sim \varphi$$

Законы де Моргана для $\&$ и для \vee :

$$\neg(\varphi \& \psi) \sim \neg \varphi \vee \neg \psi$$

$$\neg(\varphi \vee \psi) \sim \neg \varphi \& \neg \psi$$

Закон удаления импликации:

$$\varphi \rightarrow \psi \sim \neg \varphi \vee \psi$$

...

...

...

Основные равносильности

Правила работы с кванторами

Переименование связанной переменной:

$$\forall x \varphi \sim \forall y (\varphi\{x/y\}) \qquad \exists x \varphi \sim \exists y (\varphi\{x/y\})$$

(если $y \notin \text{Var}_\varphi$ и подстановка $\{x/y\}$ правильна для φ)

Продвижение отрицания под квантор:

$$\neg \forall x \varphi \sim \exists x \neg \varphi \qquad \neg \exists x \varphi \sim \forall x \neg \varphi$$

Вынесение квантора за скобки:

$$\begin{aligned} \forall x \varphi \& \psi \sim \forall x (\varphi \& \psi) & \exists x \varphi \& \psi \sim \exists x (\varphi \& \psi) \\ \forall x \varphi \vee \psi \sim \forall x (\varphi \vee \psi) & \exists x \varphi \vee \psi \sim \exists x (\varphi \vee \psi) \end{aligned}$$

(если $x \notin \text{Var}_\psi$)

Строго говоря, справедливость каждой упомянутой равносильности следует **обосновать**

Но эти обоснования устроены очень просто и однотипно, и потому здесь не приводятся: достаточно применить **метод семантических таблиц**

Теорема о равносильной замене

$\varphi[\psi]$ — обозначение формулы φ , содержащей подформулу ψ

$\varphi[\psi/\chi]$ — формула, получающаяся из φ заменой
некоторого вхождения подформулы ψ на χ

Теорема (о равносильной замене в ЛП)

Для любых формул φ, ψ, χ логики предикатов верно:

$$\psi \sim \chi \quad \Rightarrow \quad \varphi[\psi] \sim \varphi[\psi/\chi]$$

Доказательство (индукцией по структуре формулы φ).

База индукции: $\varphi = \psi$ — очевидно ($\psi \sim \chi \Rightarrow \varphi = \psi \sim \chi$)

Индуктивный переход. Подробно разберём только один случай:

$$\varphi(\tilde{x}^n) = \forall x (\varphi'[\psi])$$

Остальные случаи аналогичны

Теорема о равносильной замене

Доказательство (индуктивный переход).

Утверждение: $\forall x (\varphi'[\psi]) \sim \forall x (\varphi'[\psi/\chi])$

Индуктивное предположение: $\varphi'[\psi] \sim \varphi'[\psi/\chi]$, то есть для любой интерпретации \mathcal{I} и любых предметов d, \tilde{d}^n верно:

$$\mathcal{I} \models (\varphi'[\psi] \rightarrow \varphi'[\psi/\chi])[x/d, \tilde{x}^n/\tilde{d}^n]$$

$$\mathcal{I} \models (\varphi'[\psi/\chi] \rightarrow \varphi'[\psi])[x/d, \tilde{x}^n/\tilde{d}^n]$$

Тогда

$$\mathcal{I} \models \forall x (\varphi'[\psi] \rightarrow \varphi'[\psi/\chi])[\tilde{x}^n/\tilde{d}^n]$$

$$\mathcal{I} \models \forall x (\varphi'[\psi/\chi] \rightarrow \varphi'[\psi])[\tilde{x}^n/\tilde{d}^n]$$

Из блока 10: $\models \forall x (A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x A \rightarrow \forall x B)$, а значит:

$$\mathcal{I} \models (\forall x \varphi'[\psi] \rightarrow \forall x \varphi'[\psi/\chi])[\tilde{x}^n/\tilde{d}^n]$$

$$\mathcal{I} \models (\forall x \varphi'[\psi/\chi] \rightarrow \forall x \varphi'[\psi])[\tilde{x}^n/\tilde{d}^n]$$

Но это и есть $\forall x (\varphi'[\psi]) \sim \forall x (\varphi'[\psi/\chi])$ ▼

Пример напоследок

Используя равносильную замену, можно существенно изменить форму высказывания, сохранив его смысл — (не)выполнимость в каждой интерпретации на каждом наборе предметов

Например,

$$\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$$

\sim

$$\forall x P(x) \rightarrow \exists y P(y)$$

\sim

$$\neg \forall x P(x) \vee \exists y P(y)$$

\sim

$$\exists x \neg P(x) \vee \exists y P(y)$$

\sim

$$\exists x \exists y (\neg P(x) \vee P(y))$$

\sim

$$\exists x \exists y (P(x) \rightarrow P(y))$$

$$(\exists x \varphi \sim \exists y (\varphi\{x/y\}))$$

$$(\varphi \rightarrow \psi \sim \neg \varphi \vee \psi)$$

$$(\neg \forall x \varphi \sim \exists x \neg \varphi)$$

$$(\exists x \varphi \vee \psi \sim \exists x (\varphi \vee \psi); \varphi \vee \psi \sim \psi \vee \varphi)$$

$$(\varphi \rightarrow \psi \sim \neg \varphi \vee \psi)$$