Занятие 7. Деревья и их свойства. Корневые деревья. Остовные деревья. Поиск кратчайшего остовного дерева в графе.

Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Страница курса на сайте http://mk.cs.msu.ru

Дерево

Дерево — связный граф без циклов.

Граф без циклов — **лес**.

Любая компонента связности леса является деревом.

Деревья

Теорема (о равносильных определениях дерева). *Пусть* $G = (V, E)$ *— граф с* p *вершинами и* q *ребрами. Тогда следующие утверждения равносильны*:

1) G *— дерево, т. е. связный граф без циклов*;

2) G *— связный граф и* $q = p - 1$;

3) G *— граф без циклов и* $q = p - 1$;

4) G *— граф без циклов, но при соединении любой пары несмежных вершин ребром появляется цикл*;

5) G *— связный граф, но при удалении любого ребра остается несвязный граф*.

Свойства деревьев

Предложение.

1. *В любом дереве с хотя бы двумя вершинами найдется не менее двух висячих вершин.*

2. *В любом дереве любые две различные вершины соединены ровно одной простой цепью.*

3. *Если к дереву добавить ребро, соединяющее его несмежные вершины, то получится граф с ровно одним простым циклом.*

4. *Если из дерева удалить любое ребро, то останется граф с ровно двумя компонентами связности.*

Гл. 6, 1.26

1.26. *Доказать, что в любом дереве с $n \geqslant 2$ вершинами содержится не менее двух висячих вершин.*

Гл. 6, 1.26

1.26. *Доказать, что в любом дереве с $n \geqslant 2$ вершинами содержится не менее двух висячих вершин.*

Решение. Пусть $D = (V, E)$ — дерево, $|V| \geqslant 2$.

Гл. 6, 1.26

1.26. *Доказать, что в любом дереве с $n \geqslant 2$ вершинами содержится не менее двух висячих вершин.*

Решение. Пусть $D = (V, E)$ — дерево, $|V| \geqslant 2$.

1. Сначала обоснуем от обратного, что в D найдется хотя бы одна висячая вершина. Предположим, что для любой вершины $v \in V$ верно $d_D(v) \geqslant 2$, т. е. $\delta(D) \geqslant 2$.

Гл. 6, 1.26

1.26. *Доказать, что в любом дереве с $n \geqslant 2$ вершинами содержится не менее двух висячих вершин.*

Решение. Пусть $D = (V, E)$ — дерево, $|V| \geqslant 2$.

1. Сначала обоснуем от обратного, что в D найдется хотя бы одна висячая вершина. Предположим, что для любой вершины $v \in V$ верно $d_D(v) \geqslant 2$, т. е. $\delta(D) \geqslant 2$.

Но тогда в D существует цикл длины, не менее $\delta(D) + 1 \geqslant 3$ — противоречие.

Гл. 6, 1.26

1.26. *Доказать, что в любом дереве с $n \geqslant 2$ вершинами содержится не менее двух висячих вершин.*

Решение. Пусть $D = (V, E)$ — дерево, $|V| \geqslant 2$.

1. Сначала обоснуем от обратного, что в D найдется хотя бы одна висячая вершина. Предположим, что для любой вершины $v \in V$ верно $d_D(v) \geqslant 2$, т. е. $\delta(D) \geqslant 2$.

Но тогда в D существует цикл длины, не менее $\delta(D) + 1 \geqslant 3$ — противоречие.

Значит, хотя бы одна висячая вершина $v_0 \in V$ в D найдется.

Гл. 6, 1.26

1.26. *Доказать, что в любом дереве с $n \geqslant 2$ вершинами содержится не менее двух висячих вершин.*

Решение. Пусть $D = (V, E)$ — дерево, $|V| \geqslant 2$.

1. Сначала обоснуем от обратного, что в D найдется хотя бы одна висячая вершина. Предположим, что для любой вершины $v \in V$ верно $d_D(v) \geqslant 2$, т. е. $\delta(D) \geqslant 2$.

Но тогда в D существует цикл длины, не менее $\delta(D) + 1 \geqslant 3$ — противоречие.

Значит, хотя бы одна висячая вершина $v_0 \in V$ в D найдется.

2. Теперь обоснуем от обратного, что в D найдется не менее двух висячих вершин. Предположим, что для любой вершины $v \in V$, $v \neq v_0$, верно $d_D(v) \geqslant 2$.

Гл. 6, 1.26

Покажем, что в этом случае для любого i, $i \geqslant 1$, в D найдется простая цепь P_i длины i.

Гл. 6, 1.26

Покажем, что в этом случае для любого i, $i \geqslant 1$, в D найдется простая цепь P_i длины i.

Положим $P_1 = v_0, v_1$, где $(v_0, v_1) \in E$.

Гл. 6, 1.26

Покажем, что в этом случае для любого i, $i \geqslant 1$, в D найдется простая цепь P_i длины i.

Положим $P_1 = v_0, v_1$, где $(v_0, v_1) \in E$.

Пусть простая цепь $P_i = v_0, v_1, \ldots, v_i$ длины i в D уже построена, $i \geqslant 1$.

Гл. 6, 1.26

Покажем, что в этом случае для любого i, $i \geqslant 1$, в D найдется простая цепь P_i длины i.

Положим $P_1 = v_0, v_1$, где $(v_0, v_1) \in E$.

Пусть простая цепь $P_i = v_0, v_1, \ldots, v_i$ длины i в D уже построена, $i \geqslant 1$.

Но $d_D(v_i) \geqslant 2$, поэтому найдется такая вершина $v_{i+1} \in V$, $v_{i+1} \neq v_{i-1}$, что $(v_i, v_{i+1}) \in E$.

Гл. 6, 1.26

Покажем, что в этом случае для любого i, $i \geqslant 1$, в D найдется простая цепь P_i длины i.

Положим $P_1 = v_0, v_1$, где $(v_0, v_1) \in E$.

Пусть простая цепь $P_i = v_0, v_1, \ldots, v_i$ длины i в D уже построена, $i \geqslant 1$.

Но $d_D(v_i) \geqslant 2$, поэтому найдется такая вершина $v_{i+1} \in V$, $v_{i+1} \neq v_{i-1}$, что $(v_i, v_{i+1}) \in E$.

Если v_{i+1} совпадает с какой-то из вершин $v_1, \ldots, v_{i-2}$, то получаем цикл — противоречие.

Гл. 6, 1.26

Покажем, что в этом случае для любого i, $i \geqslant 1$, в D найдется простая цепь P_i длины i.

Положим $P_1 = v_0, v_1$, где $(v_0, v_1) \in E$.

Пусть простая цепь $P_i = v_0, v_1, \ldots, v_i$ длины i в D уже построена, $i \geqslant 1$.

Но $d_D(v_i) \geqslant 2$, поэтому найдется такая вершина $v_{i+1} \in V$, $v_{i+1} \neq v_{i-1}$, что $(v_i, v_{i+1}) \in E$.

Если v_{i+1} совпадает с какой-то из вершин $v_1, \ldots, v_{i-2}$, то получаем цикл — противоречие.

Поэтому v_{i+1} обязана быть новой вершиной. Далее положим $P_{i+1} = v_0, v_1, \ldots, v_i, v_{i+1}$ — простая цепь длины $i + 1$ в D.

Гл. 6, 1.26

Но в D только конечное число вершин. Поэтому G не может содержать бесконечную простую цепь — противоречие.

Гл. 6, 1.26

Но в D только конечное число вершин. Поэтому G не может содержать бесконечную простую цепь — противоречие.

Значит, в D найдется не менее двух висячих вершин.

Гл. 6, 1.29(1)

1.29(2). *Изобразить все попарно неизоморфные деревья с 6-ю ребрами и 4-мя висячими вершинами.*

Гл. 6, 1.29(1)

1.29(2). *Изобразить все попарно неизоморфные деревья с 6-ю ребрами и 4-мя висячими вершинами.*

Решение. Пусть $D = (V, E)$ — дерево, $|E| = 6$, и в D — ровно четыре висячие вершины.

Гл. 6, 1.29(1)

1.29(2). *Изобразить все попарно неизоморфные деревья с 6-ю ребрами и 4-мя висячими вершинами*.

Решение. Пусть $D = (V, E)$ — дерево, $|E| = 6$, и в D — ровно четыре висячие вершины.

Перечислять все неизоморфные такие деревья будем по убыванию $\Delta(D)$.

Гл. 6, 1.29(1)

1.29(2). *Изобразить все попарно неизоморфные деревья с 6-ю ребрами и 4-мя висячими вершинами.*

Решение. Пусть $D = (V, E)$ — дерево, $|E| = 6$, и в D — ровно четыре висячие вершины.

Перечислять все неизоморфные такие деревья будем по убыванию $\Delta(D)$.

Отметим, что $\Delta(D) \leqslant 4$ (почему?).

Гл. 6, 1.29(2)

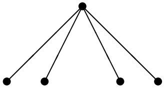
1. $\Delta(D) = 4$.

Гл. 6, 1.29(2)

1. $\Delta(D) = 4$. В этом случае найдется 2 неизоморфных дерева:

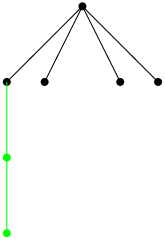
Гл. 6, 1.29(2)

1. $\Delta(D) = 4$. В этом случае найдется 2 неизоморфных дерева:



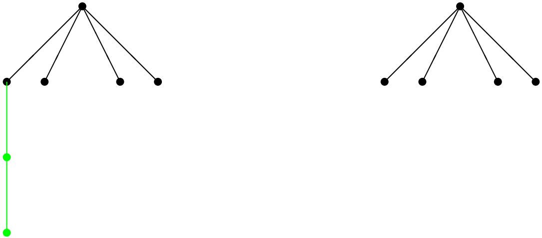
Гл. 6, 1.29(2)

1. $\Delta(D) = 4$. В этом случае найдется 2 неизоморфных дерева:



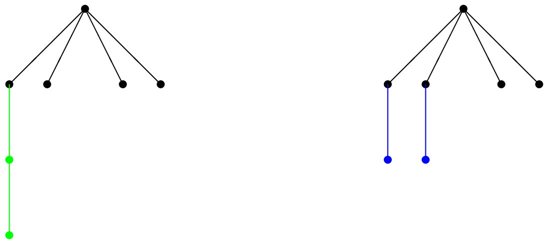
Гл. 6, 1.29(2)

1. $\Delta(D) = 4$. В этом случае найдется 2 неизоморфных дерева:



Гл. 6, 1.29(2)

1. $\Delta(D) = 4$. В этом случае найдется 2 неизоморфных дерева:



Гл. 6, 1.29(2)

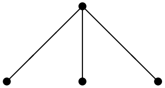
2. $\Delta(D) = 3$.

Гл. 6, 1.29(2)

2. $\Delta(D) = 3$. В этом случае найдется 2 неизоморфных дерева:

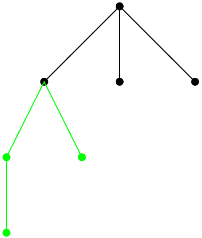
Гл. 6, 1.29(2)

2. $\Delta(D) = 3$. В этом случае найдется 2 неизоморфных дерева:



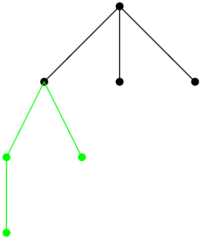
Гл. 6, 1.29(2)

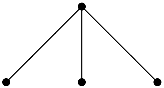
2. $\Delta(D) = 3$. В этом случае найдется 2 неизоморфных дерева:



Гл. 6, 1.29(2)

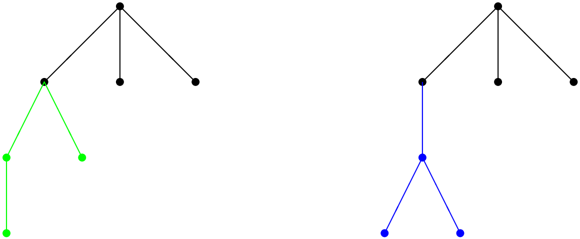
2. $\Delta(D) = 3$. В этом случае найдется 2 неизоморфных дерева:





Гл. 6, 1.29(2)

2. $\Delta(D) = 3$. В этом случае найдется 2 неизоморфных дерева:



Гл. 6, 1.29(2)

3. $\Delta(D) \leqslant 2$.

Гл. 6, 1.29(2)

3. $\Delta(D) \leqslant 2$. В этом случае таких деревьев не существует (почему?).

Гл. 6, 1.29(2)

3. $\Delta(D) \leqslant 2$. В этом случае таких деревьев не существует (почему?).

Ответ: найдется 4 таких дерева.

Для самостоятельного разбора: гл. 6, 1.29(3)

1.29(3). *Изобразить все попарно неизоморфные деревья с 7-ю ребрами и 3-мя висячими вершинами.*

Для самостоятельного разбора: гл. 6, 1.29(3)

1.29(3). *Изобразить все попарно неизоморфные деревья с 7-ю ребрами и 3-мя висячими вершинами.*

Ответ: найдется 3 таких дерева.

Дополнительная задача

1. *В дереве* 196 *висячих вершин, остальные вершины — степени* 2 *и* 4. *Найти число вершин степени* 4 *в этом дереве*.

Дополнительная задача

1. *В дереве* 196 *висячих вершин, остальные вершины — степени* 2 *и* 4*. Найти число вершин степени* 4 *в этом дереве.*

Решение. Пусть $D = (V, E)$ — такое дерево, где $|V| = p$ и $|E| = q$.

Дополнительная задача

1. *В дереве* 196 *висячих вершин, остальные вершины — степени* 2 *и* 4*. Найти число вершин степени* 4 *в этом дереве.*

Решение. Пусть $D = (V, E)$ — такое дерево, где $|V| = p$ и $|E| = q$.

Обозначим число вершин степени 4 через x.

Дополнительная задача

1. *В дереве* 196 *висячих вершин, остальные вершины — степени* 2 *и* 4. *Найти число вершин степени* 4 *в этом дереве.*

Решение. Пусть $D = (V, E)$ — такое дерево, где $|V| = p$ и $|E| = q$.

Обозначим число вершин степени 4 через x. Тогда число вершин степени 2 равно $p - x - 196$.

Дополнительная задача

1. *В дереве* 196 *висячих вершин, остальные вершины — степени* 2 *и* 4. *Найти число вершин степени* 4 *в этом дереве.*

Решение. Пусть $D = (V, E)$ — такое дерево, где $|V| = p$ и $|E| = q$.

Обозначим число вершин степени 4 через x. Тогда число вершин степени 2 равно $p - x - 196$.

Теперь по формуле Эйлера для степеней вершин $\sum\limits_{v \in V} d_D(v) = 2q$ и по свойству деревьев $q = p - 1$ получаем:

$$196 \cdot 1 + (p - x - 196) \cdot 2 + x \cdot 4 = 2(p - 1),$$

Дополнительная задача

1. *В дереве* 196 *висячих вершин, остальные вершины — степени* 2 *и* 4*. Найти число вершин степени* 4 *в этом дереве.*

Решение. Пусть $D = (V, E)$ — такое дерево, где $|V| = p$ и $|E| = q$.

Обозначим число вершин степени 4 через x. Тогда число вершин степени 2 равно $p - x - 196$.

Теперь по формуле Эйлера для степеней вершин $\sum\limits_{v \in V} d_D(v) = 2q$ и по свойству деревьев $q = p - 1$ получаем:

$$196 \cdot 1 + (p - x - 196) \cdot 2 + x \cdot 4 = 2(p - 1),$$

откуда

$$x = 97.$$

Для самостоятельного разбора

2. *В дереве* 305 *вершин степени* 5, *остальные вершины — степени* 1 *и* 2. *Найти число висячих вершин в этом дереве*.

Для самостоятельного разбора

2. *В дереве* 305 *вершин степени* 5, *остальные вершины — степени* 1 *и* 2. *Найти число висячих вершин в этом дереве.*

Ответ: в этом дереве 917 висячих вершин.

Корневое дерево

Корневое дерево — пара $(D; v_0)$, где $D = (V, E)$ — дерево, $v_0 \in V$ — выделенная вершина, называемая **корнем**.

При изоморфизме корневых деревьев корень обязан переходить в корень.

Висячая вершина корневого дерева, не являющаяся корнем, называется **листом**.

Гл. 6, 3.9(1)

3.9(1). *Пусть в корневом дереве найдется ровно k листьев ($k \geqslant 2$) и отсутствуют вершины степени 2, отличные от корня. Доказать, что число вершин в этом дереве не превосходит $2k$.*

Гл. 6, 3.9(1)

3.9(1). *Пусть в корневом дереве найдется ровно k листьев ($k \geqslant 2$) и отсутствуют вершины степени 2, отличные от корня. Доказать, что число вершин в этом дереве не превосходит $2k$.*

Решение. Пусть $D = (V, E)$ — такое корневое дерево с корнем $v_0 \in V$, где $|V| = p \geqslant 2$ и $|E| = q$.

Гл. 6, 3.9(1)

3.9(1). *Пусть в корневом дереве найдется ровно k листьев ($k \geqslant 2$) и отсутствуют вершины степени 2, отличные от корня. Доказать, что число вершин в этом дереве не превосходит $2k$.*

Решение. Пусть $D = (V, E)$ — такое корневое дерево с корнем $v_0 \in V$, где $|V| = p \geqslant 2$ и $|E| = q$.

Отметим, что $d_D(v_0) \geqslant 1$ и если $v \in V$ — вершина, не являющаяся ни корнем, ни листом, то $d_D(v) \geqslant 3$.

Гл. 6, 3.9(1)

3.9(1). *Пусть в корневом дереве найдется ровно k листьев ($k \geqslant 2$) и отсутствуют вершины степени 2, отличные от корня. Доказать, что число вершин в этом дереве не превосходит $2k$.*

Решение. Пусть $D = (V, E)$ — такое корневое дерево с корнем $v_0 \in V$, где $|V| = p \geqslant 2$ и $|E| = q$.

Отметим, что $d_D(v_0) \geqslant 1$ и если $v \in V$ — вершина, не являющаяся ни корнем, ни листом, то $d_D(v) \geqslant 3$.

Теперь по формуле Эйлера для степеней вершин $\sum\limits_{v \in V} d_D(v) = 2q$ и по свойству деревьев $q = p - 1$ получаем:

$$k \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (p - k - 1) \cdot 3 \leqslant 2(p - 1),$$

Гл. 6, 3.9(1)

3.9(1). *Пусть в корневом дереве найдется ровно k листьев ($k \geqslant 2$) и отсутствуют вершины степени 2, отличные от корня. Доказать, что число вершин в этом дереве не превосходит $2k$.*

Решение. Пусть $D = (V, E)$ — такое корневое дерево с корнем $v_0 \in V$, где $|V| = p \geqslant 2$ и $|E| = q$.

Отметим, что $d_D(v_0) \geqslant 1$ и если $v \in V$ — вершина, не являющаяся ни корнем, ни листом, то $d_D(v) \geqslant 3$.

Теперь по формуле Эйлера для степеней вершин $\sum\limits_{v \in V} d_D(v) = 2q$ и по свойству деревьев $q = p - 1$ получаем:

$$k \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (p - k - 1) \cdot 3 \leqslant 2(p - 1),$$

откуда

$$p \leqslant 2k.$$

Для самостоятельного разбора: гл. 6, 3.9(2)

3.9(2). *Пусть в корневом дереве степень каждой вершины, отличной от корня, не превосходит* 3*, а степень корня не превосходит* 2*. Доказать, что число висячих вершин в этом дереве не превосходит* $p/2$*, где* p *— число вершин в этом дереве.*

Поддеревья в корневом дереве

Пусть $(D; v_0)$ — корневое дерево, и $(v_0, v_1), \ldots, (v_0, v_m)$ — все ребра, исходящие из вершины v_0 в дереве D.

Тогда каждая компонента связности графа $G - v_0$ является деревом, и пусть $D_1, \ldots, D_m$ — все эти деревья.

Каждое из корневых деревьев $(D_i; v_i)$ называется **поддеревом** корневого дерева D, $i = 1, \ldots, m$.

Обход в глубину в корневом дереве

Пусть $(D; v_0)$ — корневое дерево. **Обходом в глубину** из вершины v_0 назовем следующий обход дерева D:

1) перейти в непройденное поддерево D_i, обойти его в глубину из вершины v_i и вернуться в вершину v_0;

2) если пройдены все поддеревья, то закончить обход.

Упорядоченные корневые деревья

Пусть $(D; v_0)$ — корневое дерево и $D_1, \ldots, D_m$ — все его поддеревья.

Корневое дерево D называется **упорядоченным**, если задан порядок его поддеревьев, а каждое его поддерево D_i, $i = 1, \ldots, m$, также является упорядоченнным корневым деревом.

При изоморфизме упорядоченных корневых деревьев корень обязан переходить в корень, и порядок поддеревьев обязан сохраняться.

Код упорядоченного корневого дерева

Пусть $(D; v_0)$ — упорядоченное корневое дерево с q ребрами. Обойдем дерево D в глубину из вершины $v_0 \in V$ по порядку его поддеревьев. При таком обходе по каждому ребру пройдем два раза: первый раз при переходе в соответствующее поддерево, второй раз при возвращении из него.

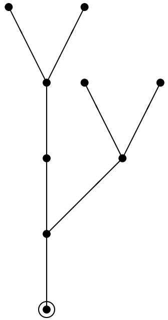
По этому обходу построим код дерева D — набор $k(D)$ из нулей и единиц длины $2q$. Сначала этот код не заполнен. При проходе по очередному ребру заполняем в коде $k(D)$ первый незаполненный разряд по следующим правилам:

1) если по ребру переходим в поддерево, то в код $k(D)$ записываем ноль;

2) если по ребру возвращаемся из поддерева, то в код $k(D)$ записываем единицу.

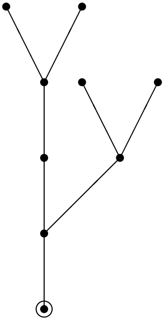
Гл. 6, 3.1(в)

3.1(в). *Найти код следующего упорядоченного корневого дерева D*:



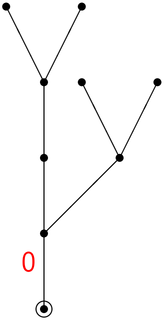
Гл. 6, 3.1(в)

Решение. Обойдем дерево D в глубину из корня и построим его код:



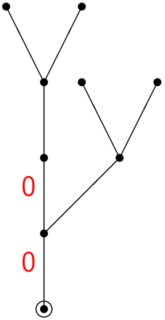
Гл. 6, 3.1(в)

Решение. Обойдем дерево D в глубину из корня и построим его код:



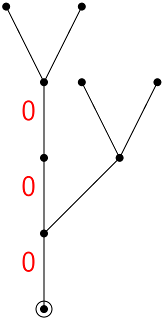
Гл. 6, 3.1(в)

Решение. Обойдем дерево D в глубину из корня и построим его код:



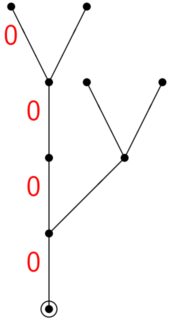
Гл. 6, 3.1(в)

Решение. Обойдем дерево D в глубину из корня и построим его код:



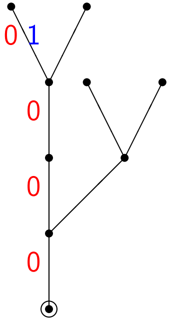
Гл. 6, 3.1(в)

Решение. Обойдем дерево D в глубину из корня и построим его код:



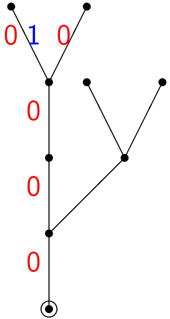
Гл. 6, 3.1(в)

Решение. Обойдем дерево D в глубину из корня и построим его код:



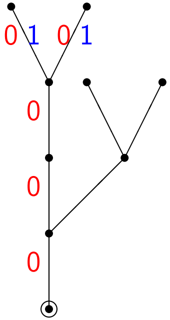
Гл. 6, 3.1(в)

Решение. Обойдем дерево D в глубину из корня и построим его код:



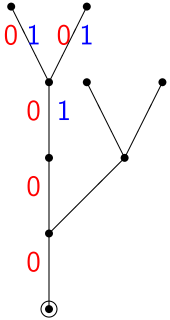
Гл. 6, 3.1(в)

Решение. Обойдем дерево D в глубину из корня и построим его код:



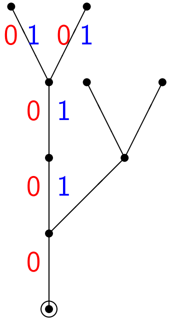
Гл. 6, 3.1(в)

Решение. Обойдем дерево D в глубину из корня и построим его код:



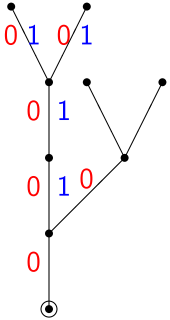
Гл. 6, 3.1(в)

Решение. Обойдем дерево D в глубину из корня и построим его код:



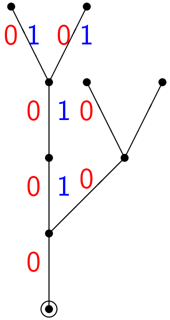
Гл. 6, 3.1(в)

Решение. Обойдем дерево D в глубину из корня и построим его код:



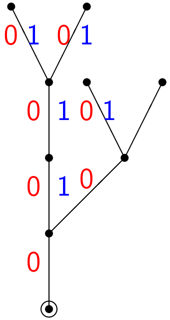
Гл. 6, 3.1(в)

Решение. Обойдем дерево D в глубину из корня и построим его код:



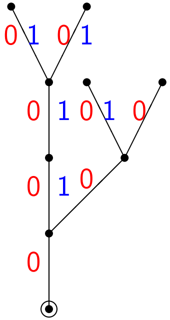
Гл. 6, 3.1(в)

Решение. Обойдем дерево D в глубину из корня и построим его код:



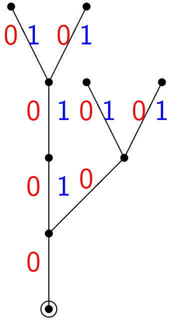
Гл. 6, 3.1(в)

Решение. Обойдем дерево D в глубину из корня и построим его код:



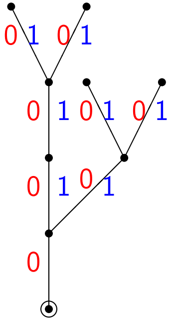
Гл. 6, 3.1(в)

Решение. Обойдем дерево D в глубину из корня и построим его код:



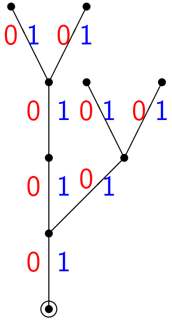
Гл. 6, 3.1(в)

Решение. Обойдем дерево D в глубину из корня и построим его код:



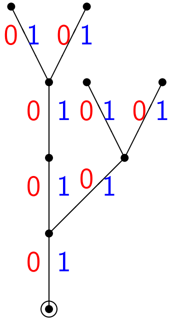
Гл. 6, 3.1(в)

Решение. Обойдем дерево D в глубину из корня и построим его код:



Гл. 6, 3.1(в)

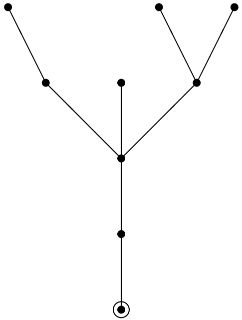
Решение. Обойдем дерево D в глубину из корня и построим его код:



$k(D) = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1).$

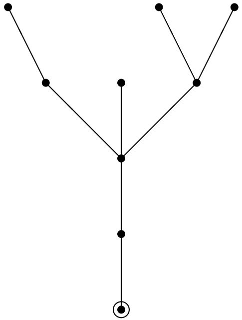
Для самостоятельного разбора: гл. 6, 3.1(г)

3.1(г). *Найти код следующего упорядоченного корневого дерева D*:



Для самостоятельного разбора: гл. 6, 3.1(г)

3.1(г). *Найти код следующего упорядоченного корневого дерева D*:



Ответ: $k(D) = (0,0,0,0,1,1,0,1,0,0,1,0,1,1,1,1)$.

Гл. 6, 3.2(1)

3.2(1). *Найти упорядоченное корневое дерево D по его коду $k(D)$:*

$$k(D) = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1).$$

Гл. 6, 3.2(1)

3.2(1). *Найти упорядоченное корневое дерево D по его коду $k(D)$:*

$$k(D) = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1).$$

Решение:

Гл. 6, 3.2(1)

3.2(1). *Найти упорядоченное корневое дерево D по его коду $k(D)$*:

$$k(D) = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1).$$

Решение:

Гл. 6, 3.2(1)

3.2(1). *Найти упорядоченное корневое дерево D по его коду $k(D)$:*

$$k(D) = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1).$$

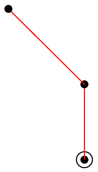
Решение:

Гл. 6, 3.2(1)

3.2(1). *Найти упорядоченное корневое дерево D по его коду $k(D)$*:

$$k(D) = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1).$$

Решение:

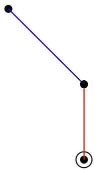


Гл. 6, 3.2(1)

3.2(1). *Найти упорядоченное корневое дерево D по его коду $k(D)$:*

$$k(D) = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1).$$

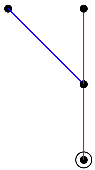
Решение:



Гл. 6, 3.2(1)

3.2(1). *Найти упорядоченное корневое дерево D по его коду $k(D)$*:
$$k(D) = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1).$$

Решение:

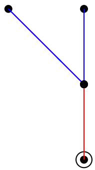


Гл. 6, 3.2(1)

3.2(1). *Найти упорядоченное корневое дерево D по его коду $k(D)$*:

$$k(D) = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1).$$

Решение:

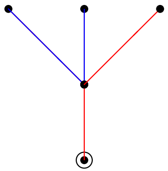


Гл. 6, 3.2(1)

3.2(1). *Найти упорядоченное корневое дерево D по его коду $k(D)$*:

$$k(D) = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1).$$

Решение:

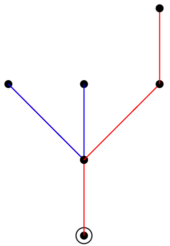


Гл. 6, 3.2(1)

3.2(1). *Найти упорядоченное корневое дерево D по его коду $k(D)$*:

$$k(D) = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1).$$

Решение:

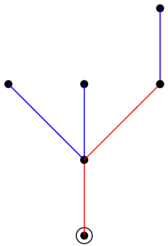


Гл. 6, 3.2(1)

3.2(1). *Найти упорядоченное корневое дерево* D *по его коду* $k(D)$:

$$k(D) = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1).$$

Решение:

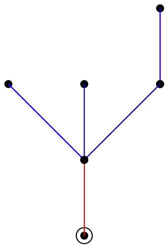


Гл. 6, 3.2(1)

3.2(1). *Найти упорядоченное корневое дерево D по его коду $k(D)$:*

$$k(D) = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1).$$

Решение:

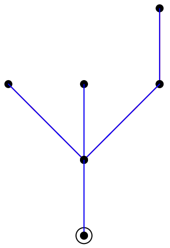


Гл. 6, 3.2(1)

3.2(1). *Найти упорядоченное корневое дерево* D *по его коду* $k(D)$:

$$k(D) = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1).$$

Решение:



Для самостоятельного разбора: гл. 6, 3.2(2)

3.2(2). *Найти упорядоченное корневое дерево* D *по его коду* $k(D)$:

$$k(D) = (0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1).$$

Для самостоятельного устного разбора: гл. 6, 3.3

3.3. *Проверить, является ли набор* α *кодом какого-то упорядоченного корневого дерева*:

1) $\alpha = (0,0,1,0,1,1)$, 2) $\alpha = (0,1,1,0)$,
3) $\alpha = (0,0,1,0,0,1)$, 4) $\alpha = (0,1,0,0,1,1)$,
5) $\alpha = (0,0,1,1,1,0,0,1)$, 6) $\alpha = (0,0,0,1,1,0,0,1,1,1)$.

Для самостоятельного устного разбора: гл. 6, 3.3

3.3. *Проверить, является ли набор* α *кодом какого-то упорядоченного корневого дерева*:

1) $\alpha = (0,0,1,0,1,1)$, 2) $\alpha = (0,1,1,0)$,
3) $\alpha = (0,0,1,0,0,1)$, 4) $\alpha = (0,1,0,0,1,1)$,
5) $\alpha = (0,0,1,1,1,0,0,1)$, 6) $\alpha = (0,0,0,1,1,0,0,1,1,1)$.

Ответ: 1, 4, 6 — «да»; 2, 3, 5 — «нет».

Остовное дерево графа

Остовное дерево графа — его остовный подграф, являющийся деревом.

Предложение. *В любом связном графе найдется остовное дерево.*

Кратчайшее остовное дерево

Граф $G = (V, E)$ — **взвешенный**, если задана **функция весов** $w : E \to \mathbb{R}_+$, которая ставит в соответствие каждому ребру $e \in E$ неотрицательное действительное число $w(e)$, называемое **весом** этого ребра e.

Пусть $G = (V, E)$ — взвешенный связный граф с функцией весов w и $D = (V, E')$ — его остовное дерево, $E' \subseteq E$.

Тогда **весом** $w(D)$ дерева D называется сумма весов всех его ребер, т. е. $w(D) = \sum\limits_{e \in E'} w(e)$.

Остовное дерево D^* связного графа G называется **кратчайшим**, если его вес $w(D^*)$ является наименьшим среди весов всех остовных деревьев графа G.

Построение кратчайших остовных деревьев

Алгоритм построения кратчайшего остовного дерева

Вход: связный граф $G = (V, E)$, $|V| = p$, $|E| = q$, функция весов $w : E \to \mathbb{R}_+$.

Выход: какое-то кратчайшее остовное дерево $D^* = (V, E^*)$ графа G, $E^* \subseteq E$.

Построение кратчайших остовных деревьев

Описание алгоритма.

1. Положить: $H_1 = (V_1, E_1)$, где $V_1 = \{v\}$, $v \in V$ — произвольная вершина, $E_1 = \emptyset$.

2. Цикл: для всех $i = 1, \dots, p-1$ повторить:

выбрать произвольное ребро $e_i \in E$ наименьшего веса в множестве

$$\{e = (v, w) \in E \mid v \in V_i, w \in V \setminus V_i\},$$

где $e_i = (v_i, w_i) \in E,\ \ v_i \in V_i,\ w_i \in V \setminus V_i,$ и положить

$$H_{i+1} = (V_{i+1}, E_{i+1}),$$

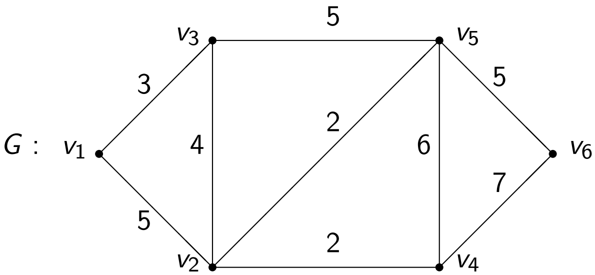
где $V_{i+1} = V_i \cup \{w_i\}$, $E_{i+1} = E_i \cup \{e_i\}$.

3. Положить $D^* = H_p$.

Окончание описания алгоритма.

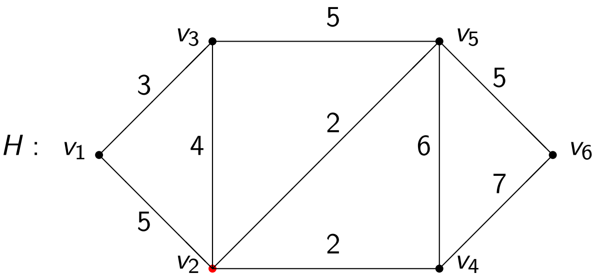
Дополнительная задача

3. Найти в графе G какое-то кратчайшее остовное дерево D^* и определить его вес:



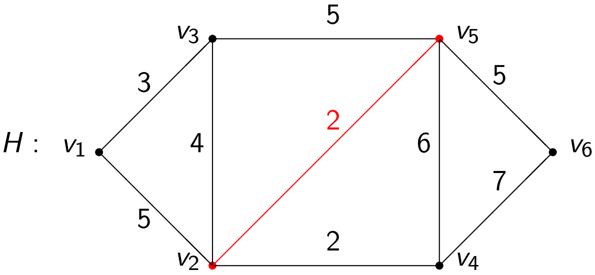
Дополнительная задача

Решение:



Дополнительная задача

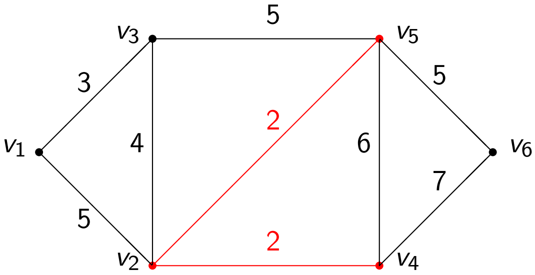
Решение:



Дополнительная задача

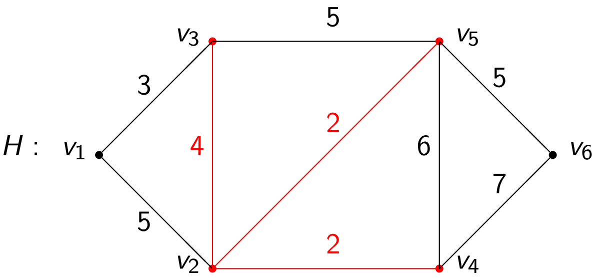
Решение:

$H:$



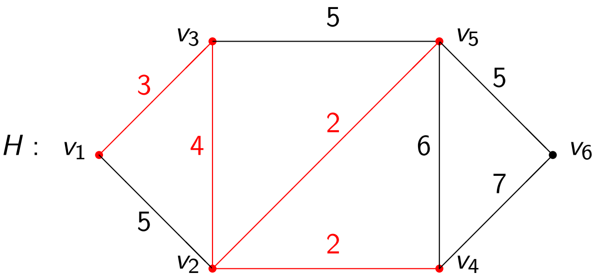
Дополнительная задача

Решение:



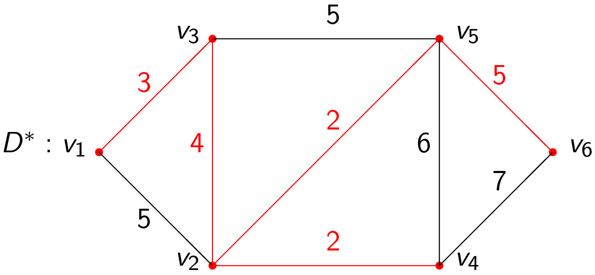
Дополнительная задача

Решение:



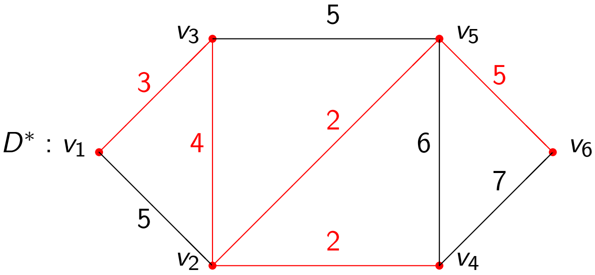
Дополнительная задача

Решение:



Дополнительная задача

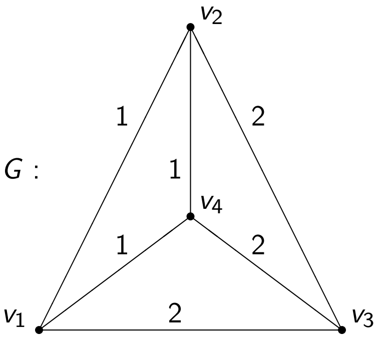
Решение:



$w(D^*) = 16$

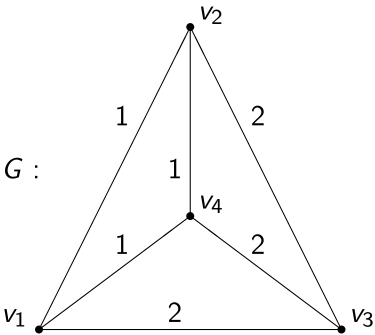
Дополнительная задача

4. Найти в графе G какое-то кратчайшее кратчайшее остовное дерево D^* и определить его вес:



Дополнительная задача

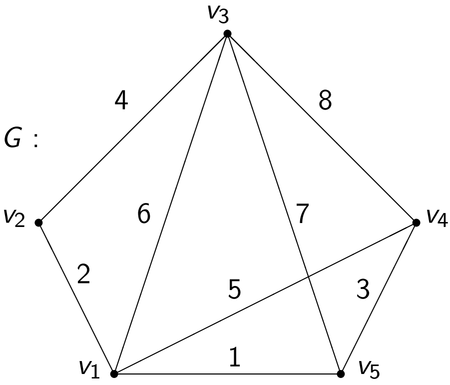
4. Найти в графе G какое-то кратчайшее кратчайшее остовное дерево D^* и определить его вес:



Ответ: $w(D^*) = 4$.

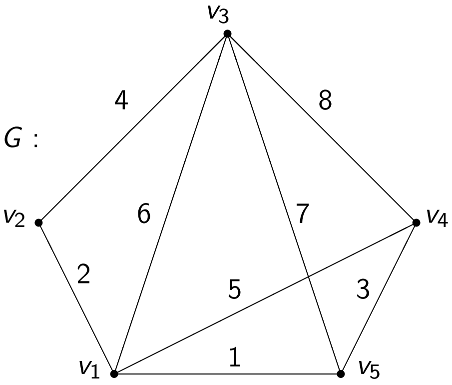
Дополнительная задача

5. Найти в графе G какое-то кратчайшее остовное дерево D^* и определить его вес:



Дополнительная задача

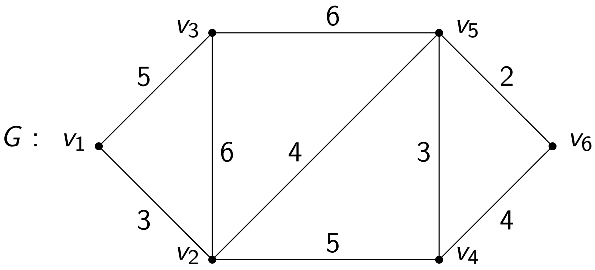
5. Найти в графе G какое-то кратчайшее остовное дерево D^* и определить его вес:



Ответ: $w(D^*) = 10$.

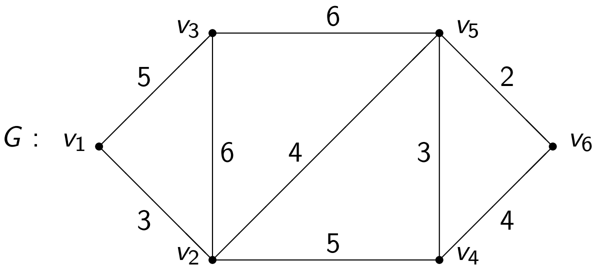
Дополнительная задача

6. Найти в графе G какое-то кратчайшее остовное дерево D^* и определить его вес:



Дополнительная задача

6. Найти в графе G какое-то кратчайшее остовное дерево D^* и определить его вес:



Ответ: $w(D^*) = 17$.

Домашнее задание

По задачнику: Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004.

Гл. 6: 1.27, 1.29(1, 4), 3.1(а, б), 3.2(3, 4).