

Распределенные алгоритмы и системы

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Распределенные алгоритмы и системы

Блок 29

Избрание лидера в дереве

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

Если граф топологии сети является неориентированным деревом, то для избрания лидера с инициаторами можно применить **древесный волновой алгоритм**, преодолев два несоответствия:

1. В древесном алгоритме инициаторами являются все листья дерева, тогда как в алгоритме избрания лидера инициаторы произвольны
 - ▶ Для решения этой проблемы древесная волна будет предварена **фазой пробуждения** узлов
 - ▶ В этой фазе будут пересылаться сообщения типа **wakeup**, **пробуждающие**
2. В древесном алгоритме *как он был рассказан ранее* решение принимают ровно два узла, а в алгоритме избрания лидера следует в каждом узле выполнить *либо leader, либо lost*
 - ▶ В расширенном варианте древесного алгоритма каждый узел, принявший решение, отправляет фишки своим детям, заставляя и их тоже принять решение
 - ▶ В алгоритме избрания лидера так будет рассылаться вычисленный наименьший идентификатор

Переменные узла:

- ▶ $Ws_p : bool = \text{f}$
- ▶ $Wr_p : \mathbb{N}_0 = 0$
- ▶ $X_p : 2^{Neigh_p} = Neigh_p$
- ▶ $v_p : V = p$ (V — множество идентификаторов всех узлов)

Фаза пробуждения $Wake_p$ для узла p :

1. Если p — инициатор:
 - 1.1 $Ws_p := \text{t}$;
 - 1.2 Для всех $q \in Neigh_p$: $send(\mathbf{wakeup}) \rightarrow q$
2. Пока $Wr_p < |Neigh_p|$:
 - 2.1 $receive(\mathbf{wakeup})$
 - 2.2 $Wr_p := Wr_p + 1$;
 - 2.3 Если $Ws_p = \text{f}$:
 - 2.3.1 $Ws_p := \text{t}$;
 - 2.3.2 Для всех $q \in Neigh_p$: $send(\mathbf{wakeup}) \rightarrow q$

Фаза волны $Wave_p$ для узла p :

1. Пока $|X_p| > 1$:
 - 1.1 $receive(\mathbf{tok}, v) \leftarrow q$ для любого $q \in Neigh_p$
 - 1.2 $v_p := \min(v_p, v)$;
 - 1.3 $X_p := X_p \setminus \{q\}$;
2. Выбрать q_0 , такой что $X_p = \{q_0\}$
3. $send(\mathbf{tok}, v_p) \rightarrow q_0$
4. $receive(\mathbf{tok}, v) \leftarrow q_0$
5. $v_p := \min(v_p, v)$;
6. Для всех $q \in Neigh_p \setminus \{q_0\}$: $send(\mathbf{tok}, v_p) \rightarrow q$
7. Если $v_p = v$, то *leader*, иначе *lost*

Код узла p :

1. $Wakeup_p$
2. $Wave_p$

Теорема. Для любого дерева топологии с хотя бы двумя узлами предложенный алгоритм является алгоритмом избрания лидера

Доказательство.

*Однородность** очевидным образом следует из описания алгоритма

Завершаемость несложно показывается так же, как и для всех предыдущих алгоритмов

Осталось показать *успешность выборов*

Доказательство.

Применяя индукцию по удалённости от произвольно выбранного инициатора и те же рассуждения, что и в доказательстве утверждения о корректности древесного алгоритма, несложно показать, что

- ▶ в фазе пробуждения каждый узел
 - ▶ отправляет каждому соседу ровно одно пробуждающее сообщение и
 - ▶ принимает от каждого соседа ровно одно пробуждающее сообщение,
 - ▶ после чего переходит к фазе волны, и
- ▶ в фазе волны
 - ▶ принимает фишки от всех соседей, причём так, что приёму последней фишки причинно предшествуют действия всех узлов сети, и
 - ▶ после приёма всех фишек и соответствующего обновления переменной v_p (команда 5 фазы волны) вычисляет в этой переменной наименьший идентификатор узлов сети

Следовательно, каждый узел достигает последней команды фазы волны (7), имея в v_p значение наименьшего идентификатора

Значит, команда 7 фазы волны выполняется в каждом узле, и после её выполнения узел с наименьшим идентификатором становится лидером, а остальные — проигравшими ▼

Теорема. Для любого дерева топологии (V, E) с хотя бы двумя узлами предложенный алгоритм имеет коммуникационную сложностью $O(|V|)$

Доказательство.

По каждому каналу передаются

- ▶ два пробуждающих сообщения в фазе пробуждения и
- ▶ две фишки в фазе волны

Следовательно, алгоритм имеет коммуникационную сложность $4|E|$, то есть $4|V| - 4$ ▼

Теорема. Для любого дерева топологии с хотя бы двумя узлами и диаметром δ предложенный алгоритм имеет сложность по времени $O(\delta)$

Доказательство.

В фазе пробуждения узел, находящийся на расстоянии d от инициатора, принимает пробуждающие сообщения спустя не более d единиц времени, а значит, переходит в фазу волны спустя не более чем $(d + 1)$ единицу времени

В фазе волны узел, находящийся на расстоянии d от листа,

- ▶ получает фишку по пути от этого листа спустя не более чем d единиц времени и
- ▶ передаёт последнюю фишку всем узлам на пути до этого листа спустя не более d единиц времени после принятия решения

Следовательно, сложность алгоритма по времени не превосходит $(3\delta + 1)$ ▼

Задача 1. Доказать, что сложность предложенного алгоритма избрания лидера в дереве по времени не превосходит $2d$, где d — диаметр графа топологии

Задача 2. Предложите (с обоснованием) модификацию алгоритма избрания лидера в дереве с существенно меньшей коммуникационной сложностью