«Элементы теории дискретных управляющих систем»

Лекторы —
профессор, д.ф.-м.н. Д. С. Романов,
ассистент Б. Р. Данилов

Обязательный курс для студентов 318 группы; читается в 6 семестре в объеме 2 часа лекций и 1 час семинарских занятий в неделю

Информационная поддержка курса:
`http://mk.cs.msu.ru/index.php/Элементы_теории_дискретных_управляющих_систем`

I. Асимптотически наилучшие методы синтеза схем в некоторых моделях дискретных управляющих систем

I часть курса ЭТДУС продолжает III раздел курса ОК и посвящена решению задачи синтеза для (произвольных) функций алгебры логики (ФАЛ), а также систем ФАЛ или, иначе, операторов при их реализации в более общих по сравнению с «классическими» моделями дискретных управляющих систем — схемах в т. н. «произвольных» базисах.

В курсе ОК рассматривались формулы и схемы из функциональных элементов (СФЭ) в «стандартном» базисе $Б_0$, состоящем из элементов функционального типа $\&, \vee, \neg$, а также контактные схемы (КС) в «стандартном» базисе из элементов проводящего типа, состоящем из замыкающего контакта вида x_i и размыкающего контакта вида $\overline{x}_i$ от входных булевых переменных (БП) x_i, где $i = 1, \ldots, n, \ldots$.

Для каждого из указанных классов схем $\mathfrak{U}$, связанного с ним функционала сложности ψ, где
$\psi(\Sigma) = L(\Sigma)$ — обычная сложность, т. е. число элементов схемы Σ,
$\psi(\Sigma) = D(\Sigma)$ — глубина СФЭ Σ, т. е. максимальное число последовательно соединенных элементов Σ и т. п.,
решалась задача синтеза.

Эта задача заключается в построении для произвольной ФАЛ (оператора) F такой, реализующей F, схемы Σ, $\Sigma \in \mathfrak{U}$, для которой $\psi(\Sigma) = \min \psi(\Sigma')$, где минимум берется по всем реализующим F схемам $\Sigma', \Sigma' \in \mathfrak{U}$. Схема Σ считается при этом ψ-**минимальной**, а величина $\psi(\Sigma)$ называется ψ-**сложностью** F в $\mathfrak{U}$ и обозначается $\psi(F)$.

Задача синтеза в курсе ОК исследовалась, в основном, как массовая задача, то есть задача разработки методов синтеза, позволяющих для произвольной ФАЛ (оператора) $f(x_1, \ldots, x_n)$ построить такую реализующую ее схему Σ, $\Sigma \in \mathfrak{U}$, для которой величина $\psi(\Sigma)$ равна или «близка» к $\psi(f)$. Для этого вводилась и изучалась при $n = 1, 2, \ldots$ функция $\psi(n) = \max \psi(f)$, где максимум берется по всем ФАЛ f от БП $\{x_1, \ldots, x_n\}$, которая называется **функцией Шеннона для класса схем $\mathfrak{U}$ и функционала сложности ψ**.

В I части курса ЭТДУС эти методы и результаты обобщаются на случай формул и СФЭ в произвольном конечном полном базисе $Б = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_b\}$. Кроме того, в ней вводится класс КС в базисе Б, также класс т. н. итеративно-контактных схем (ИКС) в базисе Б, для которых устанавливаются аналогичные результаты.

Класс ИКС является моделью, в которой сочетается реализация ФАЛ в вершинах схемы с помощью суперпозиции базисных ФАЛ, характерная для СФЭ, с реализацией ФАЛ за счет проводимости ребер, отличающей КС. Этот класс является достаточно точной моделью современных СБИС на КМОП-транзисторах.

Некоторые определения и обозначения из курса ОК, связанные с задачей синтеза:

$B = \{0,1\}, B^n = \underbrace{B \times \cdots \times B}_{n} = \{\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) : \beta_i \in B\}$ — **единичный** n-**мерный куб**;

отображение $f : B^n \to B$ — **функция алгебры логики (ФАЛ)**;

$\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ — **счетный упоряд. алфавит входных БП**;

$\mathcal{Z} = \{z_1, \ldots, z_m, \ldots\}$ — **счетный упоряд. алфавит выходных БП**;

$P_2(X)$ — **множество ФАЛ** $f(x)$ **от конечного множества БП из** X, $X \subseteq \mathcal{X}$;

$P_2 = P_2(\mathcal{X})$, $P_2(n) = P_2(X(n))$, где $X(n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$;

$P_2^m(n)$ — **множество** (n,m)-**операторов**, т. е. систем ФАЛ вида $F = (f_1, \ldots, f_m)$, где $f_i \in P_2(n)$, или, иначе, систем уравнений вида $(z_{j_1} = f_1, \ldots, z_{j_m} = f_m)$.

1. Формулы и СФЭ в произвольном базисе, функционалы их сложности. Верхние оценки числа формул и СФЭ

Продолжим начатое в курсе ОК изучение формул и СФЭ над произвольным конечным полным базисом $Б = \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{b}$, где функциональный элемент (ФЭ) $\mathcal{E}_i$ реализует ФАЛ $\varphi_i(x_1, \ldots, x_{k_i})$, которая в случае $k_i \geqslant 2$ существенно зависит от всех своих БП.

Будем по-прежнему представлять СФЭ Σ в виде $\Sigma = \Sigma(x; z)$, если $x = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ и $z = (z_{j_1}, \ldots, z_{j_m})$ — наборы, составленные из всех её различных входных и выходных БП, перечисленных в порядке возрастания их номеров в алфавитах $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Z}$, соответственно.

Напомним, что Σ представляет собой ориентированную ациклическую сеть, все истоки которой и только они являются ее входами, которым взаимно однозначно сопоставлены БП набора x, используемые в качестве пометок соответствующих вершин.

Любая вершина[1] v, $v \in V(\Sigma)$, отличная от входов Σ, помечена ФЭ $\mathcal{E}_i$, $1 \leqslant i \leqslant b$, где $k_i = d^+(v)$, а все входящие в нее дуги пронумерованы числами $1, \ldots, k_i$ в соответствии с номером того входа ФЭ, с которым она связана.

Выходами СФЭ Σ являются те ее вершины, которые помечены выходными БП, причем допускаются кратные выходы.

В каждой вершине v СФЭ Σ реализуется ФАЛ $f_v(x)$ и считается, что сама СФЭ Σ реализует оператор $F = (f_1, \ldots, f_m)$, где f_j — ФАЛ, реализуемая в вершине с пометкой z_j, $j = 1, \ldots, m$.

Напомним, что формула-слово $\mathcal{F}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n})$ в базисе Б задается своим деревом $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$, а также квазидеревом-СФЭ $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{F}}$, которое получается отождествлением листьев $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ с одинаковыми пометками x_{j_i}, $i = 1, \ldots, n$.

[1] Для графа (схемы) G через $V(G)$ и $E(G)$ обозначаются множества его вершин и ребер (дуг) соответственно, а для вершины v через $d^+(v)$ и $d^-(v)$ — число ее входящих и исходящих дуг соответственно.

Сложность, то есть число ФЭ, глубину, то есть максимальное число последовательно соединённых ФЭ, и ранг, то есть число дуг, исходящих из входов, в схеме Σ, следуя курсу ОК, будем обозначать через $L(\Sigma)$, $D(\Sigma)$ и $R(\Sigma)$ соответственно.

Введём теперь «взвешенные» функционалы сложности и глубины СФЭ. Будем считать, что каждому функциональному элементу $\mathcal{E}_i$, $i = 1, \ldots, b$, сопоставлены положительные действительные числа $\mathcal{L}_i$ и T_i, называемые его «весом» и «задержкой», которые характеризуют сложность («размер») и время срабатывания $\mathcal{E}_i$ соответственно. Предполагается, что «вес» и «задержка» любого ФЭ стандартного базиса $\text{Б}_0 = \{\&, \vee, \neg\}$ равны 1.

Если (v_0, v_t)-цепь C длины t в СФЭ Σ проходит через свои «внутренние» вершины $v_1, \ldots, v_{t-1}$, и вершине v_j, $j = 1, \ldots, t$, при этом соответствует ФЭ $\mathcal{E}_{i_j}$ базиса Б, то число $T(C) = T_{i_1} + \cdots + T_{i_t}$ будем называть **задержкой** этой цепи.

По аналогии с глубиной определим **задержку** вершины v СФЭ Σ как максимальную задержку тех цепей Σ, которые начинаются в одной из ее входных вершин и заканчиваются в вершине v. Для каждой СФЭ Σ над базисом Б помимо сложности $L(\Sigma)$, глубины $D(\Sigma)$ и ранга $R(\Sigma)$ определим следующие параметры (функционалы сложности):

1) $\mathcal{L}(\Sigma)$ — **размер** Σ, то есть сумма «весов» всех её ФЭ;
2) $T(\Sigma)$ — **задержка** Σ, то есть максимальная задержка её вершин.

Заметим, что функционал L (D) является частным случаем функционала $\mathcal{L}$ (соответственно T), когда веса (соответственно задержки) всех ФЭ базиса Б равны 1. Введем также «частичный» размер $\mathcal{L}_{Б'}(\Sigma)$ (задержку $T_{Б'}(\Sigma)$), который равен сумме весов ФЭ Σ типа $\mathcal{E}_i$, где $\mathcal{E}_i \in Б'$, в СФЭ Σ (соответственно максимальной сумме задержек ФЭ указанного вида, лежащих на одной цепи Σ). Аналогичным образом вводится «частичная» сложность $L_{Б'}(\Sigma)$ и «частичная» глубина $D_{Б'}(\Sigma)$ для СФЭ Σ.

Напомним (см. курс ОК), что СФЭ называется **приведённой**, если выход любого её ФЭ, не являющийся выходом схемы, поступает на вход другого ФЭ этой схемы.

Приведённая СФЭ (система формул) считается **строго приведённой**, если в ней нет эквивалентных вершин, то есть вершин, в которых реализуются равные ФАЛ (соответственно нет эквивалентных вершин, лежащих на одной цепи), и входы всех константных элементов, если такие имеются в базисе, соединены непосредственно со входами схемы (системы формул).

Заметим, что в строго приведённой формуле или СФЭ нет трёх или более последовательно соединённых одновходовых ФЭ.

Легко видеть также, что при любом $Б' \subseteq Б$ для любой СФЭ (системы формул) Σ существует эквивалентная ей строго приведённая СФЭ (соответственно система формул) Σ', для которой $\mathcal{L}_{Б'}(\Sigma') \leqslant \mathcal{L}_{Б'}(\Sigma)$ и $T_{Б'}(\Sigma') \leqslant T_{Б'}(\Sigma)$.

Для базиса $Б = \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{b}$ положим $\widehat{Б} = \{\, \mathcal{E}_i \mid k_i \geqslant 2 \,\}$ и заметим, что множество $\widehat{Б}$ не пусто в силу полноты базиса Б. Для ФЭ $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{E}_i \in \widehat{Б}$, определим его **приведённый вес** ρ_i и **приведённую задержку** τ_i следующим образом:

$$\rho_i = \frac{\mathcal{L}_i}{k_i - 1}, \qquad \tau_i = \frac{T_i}{\log k_i}.$$

Введём, далее, величины $\rho_{\text{Б}} = \min_{\mathcal{E}_i \in \widehat{\text{Б}}} \rho_i$ и $\tau_{\text{Б}} = \min_{\mathcal{E}_i \in \widehat{\text{Б}}} \tau_i$, которые назовём **приведённым весом** и **приведённой задержкой базиса** Б соответственно. Для стандартного базиса $\text{Б}_0 = \{\&, \vee, \neg\}$, очевидно, $\widehat{\text{Б}}_0 = \{\&, \vee\}$, $\rho_{\text{Б}_0} = \tau_{\text{Б}_0} = 1$. Для функционала сложности ψ типа L, $\mathcal{L}$, D, T через $\widehat{\psi}(\Sigma)$ будем обозначать величину $\psi_{\widehat{\text{Б}}}(\Sigma)$.

Утверждение 1.1

Для любой формулы $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$, выполняются неравенства

$$R(\mathcal{F}) \leqslant \frac{1}{\rho_{\text{Б}}} \widehat{\mathcal{L}}(\mathcal{F}) + 1, \qquad R(\mathcal{F}) \leqslant 2^{\frac{\widehat{T}(\mathcal{F})}{\tau_{\text{Б}}}}. \tag{1.1}$$

Доказательство.

Пусть для каждого i, $i = 1, \dots, b$, формула $\mathcal{F}$ содержит s_i ФЭ $\mathcal{E}_i$. При этом для числа ребер квазидерева $\mathcal{F}$ будут выполняться равенства

$$|E(\mathcal{F})| = \sum_{i=1}^{b} s_i \cdot k_i = R(\mathcal{F}) + \sum_{i=1}^{b} s_i - 1.$$

Следовательно,

$$R(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{b} s_i(k_i - 1) + 1 = \sum_{k_i \geqslant 2} \frac{k_i - 1}{\mathcal{L}_i} \cdot \mathcal{L}_i s_i + 1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\rho_{\text{Б}}} \sum_{k_i \geqslant 2} \mathcal{L}_i s_i + 1 = \frac{1}{\rho_{\text{Б}}} \widehat{\mathcal{L}}(\mathcal{F}) + 1$$

и первое неравенство (1.1) доказано.

Второе неравенство (1.1) доказывается индукцией по $D(\mathcal{F})$. Действительно, при $D(\mathcal{F}) = 0$, когда $\mathcal{F} = x_j$, оно, очевидно, выполняется. Пусть теперь второе неравенство (1.1) верно для любой формулы глубины меньше, чем d, и пусть $\mathcal{F} = \varphi_i(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{k_i})$, где $D(\mathcal{F}) = d$ и $D(\mathcal{F}_j) < d$, $\widehat{T}(\mathcal{F}_j) = t_j$ при всех $j = 1, \ldots, k_i$, а $t = \max_{1 \leqslant j \leqslant k_i} t_j$. Тогда

$$R(\mathcal{F}) = \sum_{j=1}^{k_i} R(\mathcal{F}_j) \leqslant k_i \cdot 2^{\frac{t}{\tau_{\text{Б}}}}.$$

Следовательно, при $k_i = 1$ формула $\mathcal{F}$ удовлетворяет второму неравенству (1.1), так как в этом случае $\widehat{T}(\mathcal{F}) = t$.

При $k_i \geqslant 2$ в соответствии с определением $\tau_{\text{Б}}$ выполняется неравенство

$$k_i \leqslant 2^{\frac{T_i}{\tau_{\text{Б}}}},$$

используя которое и учитывая, что в данном случае $\widehat{T}(\mathcal{F}) = t + T_i$, получим

$$R(\mathcal{F}) \leqslant k_i \cdot 2^{\frac{t}{\tau_{\text{Б}}}} \leqslant 2^{\frac{t+T_i}{\tau_{\text{Б}}}} = 2^{\frac{\widehat{T}(\mathcal{F})}{\tau_{\text{Б}}}}.$$

Утверждение доказано. □

Замечание

Аналогично первому неравенству (1.1) доказывается, что

$$|E(\mathcal{F})| \leqslant 6\big(R(\mathcal{F}) - 1\big) \tag{1.2}$$

если в квазидереве формулы $\mathcal{F}$ нет трёх и более последовательно соединённых одновходовых ФЭ.

Действительно, если $\mathcal{F}$ содержит s_i ФЭ $\mathcal{E}_i$, $i = 1, \ldots, b$, то

$$R(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{b} s_i(k_i - 1) + 1 \geqslant \widehat{L}(\mathcal{F}) + 1,$$

$$|E(\mathcal{F})| \leqslant 3\big(R(\mathcal{F}) + \widehat{L}(\mathcal{F}) - 1\big) \leqslant 3\big(2R(\mathcal{F}) - 2\big) = 6\big(R(\mathcal{F}) - 1\big).$$

Неравенство (1.2) выполняется, в частности, для строго приведённой формулы $\mathcal{F}$.

Следуя курсу ОК, обозначим через $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}$ и $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$ множество СФЭ над базисом Б и множество формул над Б соответственно, считая, что $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi} \subseteq \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}$. При этом для каждого A, $A \in \{\text{С}, \Phi\}$, определим размер $\mathcal{L}_{\text{Б}}^{A}(F)$ ФАЛ или системы ФАЛ F в классе $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{A}$ и её задержку $T_{\text{Б}}(F)$ обычным образом:

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{A}(F) = \min \mathcal{L}(\Sigma) \quad \text{и} \quad T_{\text{Б}}(F) = \min T(\Sigma),$$

где минимум берется по всем СФЭ $\Sigma \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{A}$, реализующим F.

Через $\mathcal{L}_{\text{Б}}^{A}(n)$ и $T_{\text{Б}}(n)$ обозначим соответствующие функции Шеннона:

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{A}(n) = \max_{f \in P_2(n)} \mathcal{L}_{\text{Б}}^{A}(f), \quad T_{\text{Б}}(n) = \max_{f \in P_2(n)} T_{\text{Б}}(f).$$

Пусть $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}\langle \mathcal{L}, n\rangle$ ($\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}\langle \mathcal{L}, n\rangle$, $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}\{T, n\}$) — множество всех строго приведённых СФЭ вида $\Sigma(x_1, \ldots, x_n; z_1)$ из $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}$ (соответственно формул $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$), для которых $\mathcal{L}(\Sigma) \leqslant \mathcal{L}$ (соответственно $\mathcal{L}(\mathcal{F}) \leqslant \mathcal{L}$, $T(\mathcal{F}) \leqslant T$).

Для приведённой одновыходной СФЭ Σ на базисом Б её **остовом** будем называть такую формулу $\mathcal{F}(x_1)$ над Б, дерево которой получается в результате применения к каждой вершине Σ операций отсоединения всех исходящих дуг, кроме одной, и объявления начальных вершин этих дуг листьями указанного дерева.

Для конечного множества схем $\mathcal{S}$ через $|\mathcal{S}|$ и $\|\mathcal{S}\|$ будем, как обычно, обозначать число попарно не изоморфных и попарно не эквивалентных схем в $\mathcal{S}$ соответственно. Буквой c с различными индексами будем обозначать константы, зависящие только от базиса Б.

Утверждение 1.2

Для любых $\mathcal{L} \geqslant 0$, $T \geqslant 0$ и любого натурального n справедливы неравенства :

$$\left\|\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}\langle\mathcal{L}, n\rangle\right\| \leqslant \left(c_1(\mathcal{L}+n)\right)^{\frac{1}{\rho_{\text{Б}}}\mathcal{L}+1}, \tag{1.3}$$

$$\left\|\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}\langle\mathcal{L}, n\rangle\right\| \leqslant \left(c_2 n\right)^{\frac{1}{\rho_{\text{Б}}}\mathcal{L}+1}, \tag{1.4}$$

$$\left\|\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}\{T, n\}\right\| \leqslant \left(c_2 n\right)^{2^{\frac{T}{\tau_{\text{Б}}}}}. \tag{1.5}$$

Доказательство.

Пусть $\Sigma \in \mathcal{U}^{\mathsf{C}}\langle\mathcal{L}, n\rangle$, а $\check{\mathfrak{F}}$ — остов Σ. В силу утв. 1.1 и замечания к нему для $\check{\mathfrak{F}}$ выполняются неравенства

$$|E(\check{\mathfrak{F}})| \leqslant 6(R(\check{\mathfrak{F}})-1) \leqslant \frac{6}{\rho_{\text{Б}}}\hat{\mathcal{L}}(\check{\mathfrak{F}}),$$

а поскольку число таких попарно не изоморфных формул-остовов не превосходит $4^{|E(\check{\mathfrak{F}})|} \cdot b^{L(\check{\mathfrak{F}})}$, то, следовательно, их число не больше, чем $(c_2)^{\frac{1}{\rho_{\text{Б}}}\mathcal{L}}$.

Любая формула $\mathfrak{F}$ (СФЭ Σ) из $\mathcal{U}^{\mathsf{C}}\langle\mathcal{L}, n\rangle$ может быть получена в результате присоединения каждого из $R(\check{\mathfrak{F}})$ листьев дерева формулы $\check{\mathfrak{F}}$ к входам $x_1, \ldots, x_n$ (соответственно к входам $x_1, \ldots, x_n$ и внутренним вершинам $\check{\mathfrak{F}}$), которое можно осуществить не более, чем $n^{R(\check{\mathfrak{F}})}$ (соответственно $(L(\check{\mathfrak{F}})+n)^{R(\check{\mathfrak{F}})}$) способами.

Учитывая то, что согласно определениям и (1.1)

$$L(\mathfrak{F}) \leqslant \frac{1}{\pi_{Б}} \mathcal{L}(F) \quad \text{и} \quad R(\check{\mathfrak{F}}) \leqslant \frac{1}{\rho_{Б}} \mathcal{L}(\check{\mathfrak{F}}) + 1,$$

где $\pi_{Б} = \min_{1 \leqslant i \leqslant b} \mathcal{L}_i = \frac{1}{c_0}$, и, перемножая полученные выше оценки, приходим к (1.4) и к (1.3) (с константой $c_1 = c_2 \max\{c_0, 1\}$).

В случае $\Sigma = \mathcal{F} \in \mathcal{U}_{Б}^{Ф}\{T, n\}$, рассуждая аналогично, приходим к (1.5) с учётом того, что число рёбер в формуле $\check{\mathfrak{F}}$ не больше, чем $6 \cdot 2^{T/\tau_{Б}}$, число таких формул не превосходит $(c_2)^{2^{T/\tau_{Б}}}$, а их ранг ограничен сверху в силу (1.1) числом $2^{T/\tau_{Б}}$.

Утверждение доказано. □

2. Некоторые модификации контактных схем, итеративные контактные схемы. Верхние оценки числа схем контактного типа

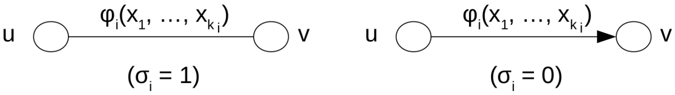
Рассмотрим теперь классы контактных схем (КС) и итеративно-контактных схем (ИКС) над заданным базисом из функционально-проводящих элементов (ФПЭ) или, для краткости, контактов, частным случаем которых является класс «обычных» КС.

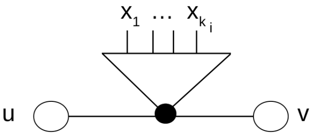
Рассматриваемые схемы строятся из ФПЭ базиса Б $= \{\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_b\}$, каждый элемент $\mathcal{K}_i$, $i = 1, \ldots, b$, которого представляет собой тройку $\langle \varphi_i, \mathcal{L}_i, \sigma_i \rangle$, где φ_i — ФАЛ, существенно зависящая от БП $x_1, \ldots, x_{k_i}$, $\mathcal{L}_i$ — положительное действительное число, а σ_i — булевская константа.

Предполагается, что число $\mathcal{L}_i$ характеризует сложность («вес») ФПЭ $\mathcal{K}_i$, который состоит из ориентированного в случае $\sigma_i = 0$ и неориентированного в случае $\sigma_i = 1$ контакта, проводящего на наборе α значений БП $x_1, \ldots, x_{k_i}$ тогда и только тогда, когда $\varphi_i(\alpha) = 1$, причём указанная проводимость в случае $\sigma_i = 0$ имеет место только в направлении ориентации $\mathcal{K}_i$.

Под **стандартным** базисом $\text{Б}_0^{\text{КС}}$ будем понимать базис, состоящий из ФПЭ вида $\langle x_1, 1, 1 \rangle$, т. е. замыкающего неориентированного контакта, и ФПЭ вида $\langle \overline{x}_1, 1, 1 \rangle$, т. е. размыкающего неориентированного контакта.

Таким образом, с формальной точки зрения ФПЭ $\mathcal{K}_i$ представляет собой контакт (ребро) K_i с пометкой φ_i и указанием направленности, если $\sigma_i = 0$. При этом из содержательных соображений можно считать, что ФПЭ $\mathcal{K}_i$ состоит из контакта K_i и функционального элемента $\mathcal{E}_i$, реализующего ФАЛ φ_i, выход которого «управляет» проводимостью K_i.





Следуя курсу ОК, определим (одновходовую) КС $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_m)$ над базисом Б как частично ориентированный граф с единственным (проводящим) входом, помеченным символом 1, и m (проводящими) выходами, помеченными выходными БП $z_1, \ldots, z_m$, каждое ориентированное (соответственно, неориентированное) ребро которого помечено одной из базисных ФАЛ φ_i, где $\sigma_i = 0$ (соответственно, $\sigma_i = 1$), зависящей от k_i переменных из множества входных (управляющих) БП $X(n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Для любой упорядоченной пары (u, v) вершин данной КС стандартным образом вводится ФАЛ проводимости от u к v, зависящая от БП $X(n)$.

Будем, как обычно, считать, что в каждой вершине рассматриваемой КС Σ реализуется ФАЛ проводимости от входа 1 к этой вершине, и что сама КС Σ реализует систему ФАЛ $F_\Sigma = (f_1, \ldots, f_m)$, где f_j — ФАЛ, реализуемая в вершине Σ с пометкой z_j, $j = 1, \ldots, m$.

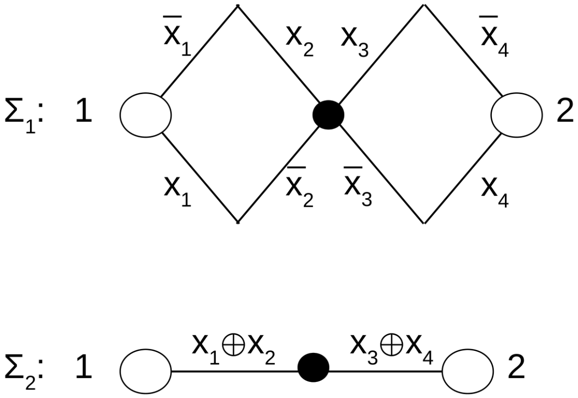
Пусть $\mathcal{U}_\text{Б}^\text{К}$ — класс КС над базисом Б, входные и выходные БП которых берутся из счётных упорядоченных непересекающихся алфавитов $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ и $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2, \ldots, z_m, \ldots\}$ соответственно.

Предполагается, что базис Б является полным, то есть любая ФАЛ от БП из $\mathcal{X}$ может быть реализована схемой из $\mathcal{U}_\text{Б}^\text{К}$.

Заметим, что любой базис, содержащий «обычные» неориентированные замыкающий и размыкающий контакты, т. е. контакты с базисной ФАЛ x_i и $\bar{x}_i$ соответственно, является полным. Это верно, в частности, для стандартного базиса $Б_0^{КС}$.

Для удобства будем предполагать, что при построении схем над базисом Б разрешается подставлять константы вместо БП его контактов. В этом случае необходимым и достаточным условием полноты Б является наличие среди его базисных как ФАЛ, которая не является монотонной, так и ФАЛ, которая не является антимонотонной.

Так, КС Σ_1 и Σ_2 над полными базисами $Б_0^{КС}$ и $Б_{\oplus} = \{\langle x_1 \oplus x_2, 1\rangle, \langle x_1 \sim x_2, 1\rangle\}$, где



реализуют одну и ту же ФАЛ $(x_1 \oplus x_2) \cdot (x_3 \oplus x_4)$ и, следовательно, эквивалентны.

Под сложностью $\mathcal{L}(\Sigma)$ КС Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}_{Б}^{К}$, понимается, как обычно, сумма весов всех её ФПЭ, а под сложностью $\mathcal{L}_{Б}^{К}(F)$ системы ФАЛ $F = (f_1, \ldots, f_m)$ от БП из $\mathcal{X}$ — минимальная из сложностей схем класса $\mathcal{U}_{Б}^{К}$, её реализующих. Для указанного функционала сложности обычным образом вводится соответствующая функция Шеннона

$$\mathcal{L}_{Б}^{К}(n) = \max_{f \in P_2(n)} \mathcal{L}_{Б}^{К}(f), \tag{2.1}$$

где, как обычно, $P_2(n)$ — множество всех ФАЛ от БП $X(n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Определим далее класс $\mathcal{U}_{Б}^{ИКС}$ — класс **итеративно-контактных схем над базисом** Б.

Для этого рассмотрим счётный упорядоченный алфавит итеративных БП $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, \ldots, y_p, \ldots\}$, где $\mathcal{Y} \cap \mathcal{X} = \mathcal{Y} \cap \mathcal{Z} = \varnothing$, и индукцией по t, $t = 0, 1, \ldots$, введём класс $\mathcal{U}_{\text{Б},t}^{\text{ИКС}}$ — класс ИКС **итеративного ранга** t над базисом Б.

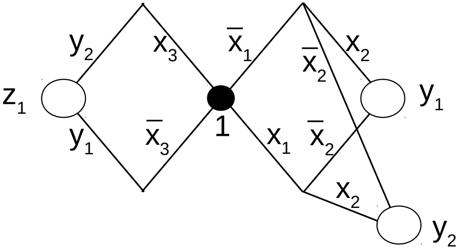
Базис указанной индукции составляет класс $\mathcal{U}_{\text{Б},0}^{\text{ИКС}}$ — класс ИКС итеративного ранга 0, который совпадает с классом $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}$.

Индуктивный переход, позволяющий от ИКС $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_m)$ из класса $\mathcal{U}_{\text{Б},t}^{\text{ИКС}}$, реализующей систему ФАЛ $(f_1, \ldots, f_m)$ от БП $x = (x_1, \ldots, x_n)$, переходить к реализующей систему ФАЛ $(f'_1, \ldots, f'_{j-1}, f'_{j+1}, \ldots, f'_m)$ от БП $x' = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ ИКС $\Sigma' = \Sigma'(x', z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_m)$ из класса $\mathcal{U}_{\text{Б},t+1}^{\text{ИКС}}$, связан с применением операции присоединения выхода z_j ИКС Σ к её входу x_i.

Эта операция применима, если ФАЛ f_j не зависит существенно от x_i и состоит в замене пометки z_j выходной вершины v ИКС Σ, а также всех пометок БП x_i на контактах Σ пометками БП y_{t+1}. При этом предполагается, что ФАЛ $f'_s(x')$, где $s \neq j$, получается из ФАЛ $f_s(x)$ подстановкой ФАЛ $f_j(x')$ вместо БП x_j.

Будем считать, что для описанных выше схем ИКС Σ является **базовой ИКС ранга** t для ИКС Σ' и что переходя от ИКС Σ к её базовой ИКС $\widetilde{\widetilde{\Sigma}}$ ранга $(t-1)$ и т. д. мы придём к базовой для ИКС Σ' КС $\widehat{\Sigma}$. Заметим, что сложности всех построенных ИКС одинаковы и равны $L(\widehat{\Sigma})$. Определим, наконец, класс $\mathfrak{U}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}$ как объединение классов $\mathfrak{U}_{\text{Б},i}^{\text{ИКС}}$ по всем i, $i = 0, 1, \ldots$.

Так, ИКС Σ' вида



является ИКС итеративного ранга 2, которая реализует ФАЛ $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$.

Заметим, что класс $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}$ является полным тогда и только тогда, когда полон класс $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}$ и что на его полноту не влияет наличие в базисе Б ФПЭ $\mathcal{K}_i$, для которого $\varphi_i \equiv 0$ (т. н. «изолятора»), а также ФПЭ $\mathcal{K}_j$, для которого $\varphi_j \equiv 1$ и $\sigma_j = 0$ (т. н. «двустороннего проводника»). Более того, каждый из указанных ФПЭ может быть удален из схемы без изменения ее функционирования, если при этом отождествить концевые вершины $\mathcal{K}_j$. В связи с этим будем предполагать, что ФПЭ данного типа в базисе Б отсутствуют.

Для полного класса $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}$ и произвольной системы ФАЛ $F = (f_1, \ldots, f_m)$ обычным образом определяется сложность $\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}(F)$ — сложность реализации системы F в классе $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}$, а затем аналогично (2.1) вводится соответствующая функция Шеннона $\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}(n)$.

Пусть, как обычно, $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{W}(\mathcal{L}, n)$, где $W \in \{\text{К}, \text{ИКС}\}$, — множество всех одновыходных схем от БП $x_1, \ldots, x_n$ из $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{W}$, реализующих одну ФАЛ из $P_2(n)$ со сложностью (с размером) не больше, чем $\mathcal{L}$.

Для базиса $\text{Б} = \{\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_b\}$ положим

$$\pi_{\text{Б}} = \min_{1 \leqslant i \leqslant b} \mathcal{L}_i, \qquad \hat{\rho}_{\text{Б}} = \min_{1 \leqslant i \leqslant b} \frac{\mathcal{L}_i}{k_i + 1}, \qquad k_{\text{Б}} = \max_{1 \leqslant i \leqslant b} k_i.$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2.1

Для любого $\mathcal{L} \geqslant 0$ и любого натурального n справедливы неравенства

$$||\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}\langle\mathcal{L}, n\rangle|| \leqslant \left(c_3 \mathcal{L} n^{k_{\text{Б}}}\right)^{\frac{\mathcal{L}}{\pi_{\text{Б}}}} \tag{2.2}$$

$$||\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}\langle\mathcal{L}, n\rangle|| \leqslant \left(c_4 (\mathcal{L} + n)\right)^{\frac{\mathcal{L}}{\hat{\rho}_{\text{Б}}}} \tag{2.3}$$

Доказательство.

Пусть $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; z_1)$ — схема от (управляющих) БП $x_1, \ldots, x_n$ с (проводящим) входом, имеющим пометку "1", и выходом z_1, которая принадлежит множеству $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}\langle \mathcal{L}, n\rangle$, включающему в себя множество $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}\langle \mathcal{L}, n\rangle$ в качестве подмножества. При этом для схемы Σ, содержащей для каждого i, $i = 1, \ldots, b$, $q_i = q_i(\Sigma)$ контактов $\mathcal{K}_i$, выполняются соотношения:

$$\mathcal{L}(\Sigma) = \sum_{i=1}^{b} q_i L_i \leqslant \mathcal{L};\ L = L(\Sigma) = \sum_{i=1}^{b} q_i \leqslant \left\lfloor \frac{\mathcal{L}}{\pi_{\text{Б}}} \right\rfloor; \tag{2.4}$$

$$R = R(\Sigma) = \sum_{i=1}^{b} k_i q_i \leqslant k_{\text{Б}} L; \tag{2.5}$$

$$L + R = \sum_{i=1}^{b} (k_i + 1) q_i = \sum_{i=1}^{b} q_i L_i \frac{k_i + 1}{L_i} \leqslant \frac{1}{\hat{\rho}_{\text{Б}}} \mathcal{L}(\Sigma). \tag{2.6}$$

Оценим сверху число попарно неизоморфных неориентированных связных графов схемы Σ указанного вида. Для этого выберем сначала ее остовное упорядоченное поддерево $\mathcal{D}$ с корнем в выходной вершине Σ так, чтобы оно содержало все инцидентные корню ребра схемы Σ, а ее вход был бы самым "левым" листом $\mathcal{D}$.

Достроим, далее, дерево $\mathcal{D}$ до остовного наддерева $\hat{\mathcal{D}}$ графа схемы Σ путем присоединения одной концевой вершины каждого из не вошедших в $\mathcal{D}$ ребер Σ к одной из отличных от входа и выхода инцидентных ему в Σ вершин $\mathcal{D}$ и объявления другой вершины этого ребра листом дерева $\hat{\mathcal{D}}$. Заметим, что (см. [1]) число различных полученных таким образом деревьев $\hat{\mathcal{D}}$ не больше, чем 4^L, а число отличных от корня вершин $\mathcal{D}$, среди которых содержатся все его листья, не больше, чем L.

Заметим также, что по дереву $\hat{\mathcal{D}}$ вход и выход Σ определяются однозначно, а для получения из него графа схемы Σ достаточно присоединить каждый его лист к одной из отличных от корня вершин $\hat{\mathcal{D}}$, причем число вариантов указанного присоединения не больше, чем L^L.

После этого для задания самой схемы Σ достаточно каждому ее ребру приписать тип связанного с ним контакта $\mathcal{K}_i$, $i = 1, \ldots, b$, (b^L вариантов) и, в случае ориентированности контакта $\mathcal{K}_i$, — ориентацию связанного с ним ребра (не более 2^L вариантов). Затем для каждого $i, i = 1, \ldots, b$, и каждого контакта $\mathcal{K}_i$ схемы Σ выбрать k_i вершин или БП, соответствующих аргументам базисной ФАЛ φ_i, управляющей его проводимостью, (всего R выбираемых позиций), то есть не более, чем n^R и $(n + L)^R$ вариантов в случае $\Sigma \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}$ и $\Sigma \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}$ соответственно.

Из всего сказанного выше с учетом (2.4) –(2.6) вытекает, что

$$||\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}(L,n)|| \leqslant (8bL)^L \cdot n^R \leqslant (8bn^{k_{\text{Б}}}L)^L,$$

$$||\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}(L,n)|| \leqslant (8bL)^L (n+L)^R \leqslant (8b(L+n))^{L+R}$$

и, следовательно,

$$||\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}\langle\mathcal{L},n\rangle|| \leqslant \left(c_3\mathcal{L}n^{k_{\text{Б}}}\right)^{\frac{\mathcal{L}}{\pi_{\text{Б}}}}, \; ||\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}\langle\mathcal{L},n\rangle|| \leqslant \left(c_4(\mathcal{L}+n)\right)^{\frac{1}{\hat{\rho}_{\text{Б}}}\mathcal{L}}$$

Утверждение доказано. □

3. Нижние мощностные оценки функций Шеннона

Установим ряд нижних оценок для введённых в вопросах 1 и 2 функций Шеннона. Все эти оценки получены с помощью мощностного метода, предложенного Шенноном, который основан на том, что число ФАЛ от БП $x_1, \ldots, x_n$ не может быть меньше числа тех попарно не эквивалентных схем, сложность которых не превосходит значения соответствующей функции Шеннона от аргумента n.

Пусть $\mathcal{U}$ — один из рассмотренных выше классов схем, Ψ — введённый там функционал сложности, а $\Psi(n)$ — функция Шеннона для класса $\mathcal{U}$ относительно Ψ. Обозначим через $\mathcal{U}(\Psi, n)$ множество тех схем Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}$, которые реализуют одну ФАЛ из $P_2(n)$ и для которых $\Psi(\Sigma) \leqslant \Psi$. Следующее «мощностное» равенство вытекает непосредственно из определений:

$$||\mathcal{U}\big(\Psi(n), n\big)|| = 2^{2^n}. \tag{3.1}$$

Заметим также, что если для некоторого натурального n и действительных $\widehat{\Psi}$, δ, где $0 < \delta < 1$, выполняется неравенство

$$||\mathcal{U}\big(\widehat{\Psi}, n\big)|| \leqslant \delta \cdot 2^{2^n}, \quad \text{то} \tag{3.2}$$

то $\Psi(f) \geqslant \widehat{\Psi}$ для не менее чем $(1-\delta) \cdot 2^{2^n}$ ФАЛ f из $P_2(n)$.

Для получения нижних мощностных оценок функций Шеннона докажем сначала следующее техническое утверждение.

Утверждение 3.1

Для $\gamma \in \{0, 1\}$ *и положительных действительных чисел* a, α, y, q *таких, что*

$$(ay^{\gamma})^{\alpha y} > q, \tag{3.3}$$

в случае $\gamma = 1$ *и* $\frac{a}{\alpha}\log q > 1$ *выполняется неравенство*

$$y > \frac{\log q}{\alpha \log\left(\frac{a}{\alpha}\log q\right)}\left(1 + \frac{\log\log\left(\frac{a}{\alpha}\log q\right)}{\log\left(\frac{ae}{\alpha}\log q\right)}\right), \tag{3.4}$$

где e *— основание натуральных логарифмов, а в случае* $\gamma = 0$ *и* $a > 1$ *— неравенство*

$$y > \frac{\log q}{\alpha \log a}. \tag{3.5}$$

Доказательство.

В случае $\gamma = 0$ и $a > 1$ неравенство (3.5) получается в результате логарифмирования (3.3) и деления обеих частей полученного неравенства на $\alpha \log a$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\gamma = \alpha = a = 1$ и $\log q > 1$. В данном случае неравенство (3.3) имеет вида $y^y > q$, а неравенство (3.4) — вид $y > y'$, где

$$y' = (1+\varepsilon)\frac{\log q}{\log\log q}, \quad \varepsilon = \frac{\log\log\log q}{\log\left(e \log q\right)}.$$

При этом неравенство (3.4) следует из того, что левая часть (3.3) монотонно возрастает по y и $(y')^{y'} \leqslant q$.

Действительно,

$$y' \log y' = (1+\varepsilon)\frac{\log q}{\log\log q}\left(\log\log q - \log\log\log q + \log e \ln(1+\varepsilon)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \log q(1+\varepsilon)\left(1 - \frac{\log\log\log q}{\log\log q} + \frac{\varepsilon \log e}{\log\log q}\right) =$$

$$= \log q(1+\varepsilon)(1-\varepsilon) = \log q\left(1-\varepsilon^2\right) \leqslant \log q.$$

Заметим, что в случае $\gamma = 1$, $\alpha > 0$, $a > 0$ неравенство (3.3) эквивалентно неравенству

$$(ay)^{ay} > q^{\frac{a}{\alpha}},$$

и поэтому неравенство (3.4) получается из неравенства $y > y'$ в результате замены y на ay и $\log q$ на $\frac{a}{\alpha}\log q$, если выполнено условие $\frac{a}{\alpha}\log q > 1$. Утверждение доказано. □

Верхние оценки величины $||\mathcal{U}(\Psi, n)||$, установленные в вопросах 1, 2 для различных классов схем и функционалов сложности, а также соотношения (3.1)–(3.2) служат основой для получения нижних мощностных оценок соответствующих функций Шеннона и сложности почти всех ФАЛ.

Напомним, что (см. (1.3)–(1.5), (2.2)–(2.3)) для каждого натурального n справедливы неравенства:

$$\left\|\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}\langle\mathcal{L}, n\rangle\right\| \leqslant \left(c_1(\mathcal{L}+n)\right)^{\frac{1}{\rho_{\text{Б}}}\mathcal{L}+1}, \tag{3.6}$$

$$\left\|\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}\langle\mathcal{L}, n\rangle\right\| \leqslant \left(c_2 n\right)^{\frac{1}{\rho_{\text{Б}}}\mathcal{L}+1}, \tag{3.7}$$

$$||\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}\langle\mathcal{L}, n\rangle|| \leqslant \left(c_3\mathcal{L}n^{k_{\text{Б}}}\right)^{\frac{\mathcal{L}}{\pi_{\text{Б}}}}, \tag{3.8}$$

$$||\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}\langle\mathcal{L}, n\rangle|| \leqslant \left(c_4(\mathcal{L}+n)\right)^{\frac{\mathcal{L}}{\hat{\rho}_{\text{Б}}}}, \tag{3.9}$$

$$\left\|\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}\{T, n\}\right\| \leqslant \left(c_2 n\right)^{2^{\frac{T}{\tau_{\text{Б}}}}}. \tag{3.10}$$

При получении нижних оценок функций Шеннона вида $\mathcal{L}_{\text{Б}}^{A}(n)$, где $A \in \{\text{С}, \text{Ф}, \text{К}, \text{ИКС}\}$, и $T_{\text{Б}}(n)$, а также соответствующих им «типичных» значений будем ориентироваться на их «ϵ-приближения» — функции $\tilde{\mathcal{L}}_{\text{Б}}^{A}(n, \epsilon)$ и $\tilde{T}_{\text{Б}}(n, \epsilon)$ соответственно, где

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\text{Б}}^{\text{С}}(n, \epsilon) = \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}(1 + \epsilon), \quad \tilde{\mathcal{L}}_{\text{Б}}^{\text{Ф}}(n, \epsilon) = \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{\log n}(1 - \epsilon), \quad \tilde{\mathcal{L}}_{\text{Б}}^{\text{К}}(n, \epsilon) = \pi_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}(1 - \epsilon),$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}(n, \epsilon) = \hat{\rho}_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}(1 + \epsilon), \quad \tilde{T}_{\text{Б}}(n, \epsilon) = \tau_{\text{Б}}(n - \log\log n - \epsilon).$$

Напомним, что для стандартных базисов Б_0 и $\text{Б}_0^{\text{КС}}$ эти приближения при $\epsilon = 0$ являются асимптотически точными.

Утверждение 3.2

Для каждого класса схем $\mathfrak{U}_{\text{Б}}^{A}$, *где* $A \in \{\text{С}, \Phi, \text{К}, \text{ИКС}\}$, *существует такая неотрицательная и стремящаяся к* 0 *последовательность* $\epsilon_{\text{Б}}^{A}(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, *что доля тех ФАЛ* f, $f \in P_2(n)$, *для которых выполняется неравенство*

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{A}(f) \geqslant \tilde{\mathcal{L}}_{\text{Б}}^{A}(n, \epsilon_{\text{Б}}^{A}(n)), \tag{3.11}$$

а при $A = \Phi$, *кроме того, — неравенство*

$$T_{\text{Б}}(f) \geqslant \tilde{T}(n, \epsilon_{\text{Б}}^{\Phi}(n)), \tag{3.12}$$

не меньше, чем $1 - \frac{2}{n}$.

Доказательство.

Каждое неравенство (3.11), где $A \in \{\text{С}, \text{Ф}, \text{К}, \text{ИКС}\}$, выводится из соответствующего рассматриваемому классу схем $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{A}$ с функционалом сложности $\mathcal{L}_{\text{Б}}^{A}$ неравенства из (3.6)–(3.9) на основе мощностного неравенства (3.2) с использованием Утв. 3.1.

Для обоснования этого вывода рассмотрим множество $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{A}\left\langle \tilde{\mathcal{L}}_{\text{Б}}^{A}(n, \epsilon), n \right\rangle$, а также связанное с ним неравенство

$$\left\| \mathcal{U}_{\text{Б}}^{A}\left\langle \tilde{\mathcal{L}}_{\text{Б}}^{A}(n, \epsilon), n \right\rangle \right\| \leqslant \frac{1}{n} 2^{2^n}. \tag{3.13}$$

Заметим, что левая часть (3.13) задает число тех ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, для которых $\mathcal{L}_{\text{Б}}^{A}(f) \leqslant \tilde{\mathcal{L}}_{\text{Б}}^{A}(n, \epsilon)$, и, следовательно, если оно выполняется, то доля таких ФАЛ в $P_2(n)$ не больше, чем $\frac{1}{n}$.

Указанное соотношение будет, очевидно, иметь место и тогда, когда выполняется (исходное) неравенство, получающееся из (3.13) в результате замены его левой части на правую часть соответствующего неравенства (3.6)–(3.9) при $\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}}^{A}(n, \epsilon)$ и последующего преобразования, приводящего ее к виду левой части (3.3) без уменьшения исходного значения. Из обратного к последнему (итогового) неравенства с помощью Утв. 3.1, где $q = \frac{1}{n} 2^{2^n}$, находится искомое значение $\epsilon_{\text{Б}}^{A}(n)$ как значение, при котором получается соответствующее значение правой части (3.4).

Рассмотрим для примера класс $\mathcal{U}^{\text{С}}_{\text{Б}}$, для которого описанное выше исходное неравенство будет выглядеть следующим образом

$$\left(c_1(\tilde{\mathcal{L}}^{\text{С}}_{\text{Б}}(n,\epsilon)+n)\right)^{\frac{1}{\rho_{\text{Б}}}\tilde{\mathcal{L}}(n,\epsilon)+1} \leqslant \frac{1}{n}2^{2^n}.$$

Заметим, что левая часть этого неравенства будет не больше, чем левая часть (3.3), где $\gamma = 1, a = c_1, \alpha = \frac{1}{\rho_{\text{Б}}}$ и $y = \tilde{\mathcal{L}}^{\text{С}}_{\text{Б}}(n,\epsilon) + n + \rho_{\text{Б}}$. При этом правая часть (3.3), как уже говорилось, будет равна $q = \frac{1}{n}2^{2^n}$.

Решая соответствующее итоговое неравенство согласно (3.4), получим

$$y > \rho_{\text{Б}} \frac{2^n - \log n}{n + c_1'} \left(1 + \frac{\log(n + c_1'')}{n + c_1'''}\right) \geqslant \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{\log n - \tilde{c}_1}{n}\right) = y_0,$$

где $\tilde{c}_1 > 0$. Таким образом, полагая $\epsilon_{\text{Б}}^{\text{C}}(n) = \frac{\log n - 2\tilde{c}_1}{n}$, мы получим искомое значение, так как при этом

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\text{Б}}^{\text{C}}(n, \epsilon_{\text{Б}}^{\text{C}}(n)) = \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{n} (1 + \epsilon_{\text{Б}}^{\text{C}}(n)) \leqslant y_0 - n - \rho_{\text{Б}},$$

начиная с некоторого $n = n_0$.

Следовательно, доля тех ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, для которых $\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{C}}(f) \leqslant \tilde{\mathcal{L}}_{\text{Б}}^{\text{C}}(n, \epsilon_{\text{Б}}^{\text{C}}(n))$, не больше, чем $\frac{1}{n}$, если $n > n_0$.

Аналогичным образом на основе неравенств (3.10) и (3.2) с использованием Утв. 3.1, где

$$q = \frac{1}{n} 2^{2^n}, \quad y = 2^{\tilde{T}_{\text{Б}}(n,\epsilon)}, \quad \gamma = 0, \quad \alpha = \frac{1}{\tau_{\text{Б}}} \quad \text{и} \quad a = c_2,$$

устанавливается справедливость (3.12) при $\epsilon_{\text{Б}}^{\Phi}(n) = \frac{c_2'}{\log n}$ для некоторого $c_2' > 0$.

Утверждение доказано. $\square$

Следствие 1

Для почти всех ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, одновременно выполняются все неравенства вида $\mathcal{L}_{Б}^{A}(f) \gtrsim \tilde{\mathcal{L}}_{Б}^{A}(n,0)$, где $A \in \{\mathrm{C}, \Phi, \mathrm{K}, \text{ИКС}\}$, а также неравенство $T_{Б}(f) \geqslant \tilde{T}_{Б}(n,0) - o(1)$.

Следствие 2

$$\mathcal{L}_{Б}^{\mathrm{C}}(n) \gtrsim \rho_{Б} \frac{2^n}{n}, \quad \mathcal{L}_{Б}^{\Phi}(n) \gtrsim \rho_{Б} \frac{2^n}{\log n}, \quad \mathcal{L}_{Б}^{\mathrm{K}}(n) \gtrsim \pi_{Б} \frac{2^n}{n}, \quad \mathcal{L}_{Б}^{\text{ИКС}}(n) \gtrsim \hat{\rho}_{Б} \frac{2^n}{n},$$

$$T_{Б}(n) \geqslant \tau_{Б}(n - \log\log n - o(1)).$$

4. Обобщенное разложение мультиплексорных ФАЛ, его особенности. Универсальные множества ФАЛ, их построение и реализация

Пусть $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_p)$ — разбиение куба B^n от БП $x = (x_1, \ldots, x_n)$. *Обобщенная мультиплексорная ФАЛ* соответствующая разбиению Δ определяется равенством

$$\mu_\Delta(x,\ u_1, \ldots, u_p) = \bigvee_{i=1}^{p} \chi_{\delta_i}(x) u_i,$$

где χ_{δ_i} — характеристическая ФАЛ компоненты δ_i. Тогда стандартную мультиплексорную ФАЛ порядка n

$$\mu_n(x,\ u_0, \ldots, u_{2^n-1}) = \bigvee_{\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\in B^n} K_\sigma(x) u_{\nu(\sigma)}$$

можно рассматривать как обобщённую мультиплексорную ФАЛ μ_Δ с тривиальным разбиением Δ таким, что $\delta_{\nu(\sigma)} = \{\sigma\}$ для каждого σ, $\sigma \in B^n$.

Утверждение 4.1

Для любой существенной ФАЛ $\psi(y_1, \ldots, y_p)$ *и любого разбиения* $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_d)$, $d = p$, *куба* B^n *от БП* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *существуют ФАЛ* $g_i(x, u_i)$, $i = 1, \ldots, p$, *которые монотонно или антимонотонно зависят от БП* $u_1, \ldots, u_p$, *такие что* $\psi(g_1, \ldots, g_p) = \mu_\Delta(x,\ u_1, \ldots, u_p)$.

Доказательство.

Существенность ФАЛ ψ означает, что для любого i, $i = 1, \ldots, p$, найдутся булевские константы $\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,p}$ такие, что

$$\psi(\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,i-1},\ y_i,\ \alpha_{i,i+1}, \ldots, \alpha_{i,p}) = y_i \oplus \alpha_{i,i}. \tag{4.1}$$

Значит, определив ФАЛ g_j так, что

$$g_j(\beta, u_j) = \begin{cases} \alpha_{i,j}, & \text{если } \beta \in \delta_i \text{ при } j \neq i; \\ u_j \oplus \alpha_{j,j}, & \text{если } \beta \in \delta_j; \end{cases} \tag{4.2}$$

для всякого β, $\beta \in \delta_i$, будем иметь

$$\psi\big(g_1(\beta, u_1), \ldots, g_{i-1}(\beta, u_{i-1}),\ g_i(\beta, u_i),\ g_{i+1}(\beta, u_{i+1}), \ldots, g_p(\beta, u_p)\big) =$$
$$= \varphi\big(\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,i-1},\ u_i \oplus \alpha_{i,i},\ \alpha_{i,i+1}, \ldots, \alpha_{i,p}\big) = \big(u_i \oplus \alpha_{i,i}\big) \oplus \alpha_{i,i} = u_i =$$
$$= \mu_\Delta\big(\beta,\ u_1, \ldots, u_p\big). \tag{4.3}$$

Из (4.1) следует, что каждая ФАЛ g_j зависит от БП u_j только на компоненте δ_j, на которой $g_j = u_j \oplus \alpha_{j,j}$. Следовательно, каждая ФАЛ g_j либо монотонно, либо антимонотонно зависит от БП u_j.

Утверждение доказано. □

Замечание 1

Утв. 4.1 остаётся верным и в том случае, когда $d < p$, если при этом формально считать все недостающие компоненты разбиения Δ пустыми, то есть $\delta_{d+1} = \cdots = \delta_p = \varnothing$. Соответствующие пустым компонентам БП $u_{d+1}, \ldots, u_p$ являются фиктивными БП ФАЛ $g_{d+1}, \ldots, g_p, \mu_\Delta$.

Замечание 2

В условиях Утв. для каждого j, $j = 1, \ldots, d$, положим $\sigma_j = 1$ (соответственно $\sigma_j = 0$), если ФАЛ $g_j(x, u_j)$ монотонно (соответственно антимонотонно) зависит от БП x_j. Тогда, полагая, что для $\tau = 0, 1$ ФАЛ $g_{j,\tau}(x) = g_j(x, \tau)$, получим

$$g_j(x, u_j) = g_{j,\bar{\sigma}_j}(x) \vee u_j^{\sigma_j} g_{j,\sigma_j}(x). \tag{4.4}$$

Замечание 3

В том случае, когда Δ — тривиальное разбиение куба B^n и $d = 2^n$ ФАЛ $g_{j,0}(x)$ и $g_{j,1}(x)$ отличаются друг от друга только на одном наборе значений БП x.

Напомним (см. [1]), что множество ФАЛ G называется дизъюнктивно-универсальным множеством (ДУМ) ФАЛ порядка m и ранга p, тогда и только тогда, когда $G \subseteq P_2(m)$ и для любой ФАЛ g, $g \in P_2(m)$, найдутся функции $g_1, \ldots, g_p$ из G, для которых $g = g_1 \vee \cdots \vee g_p$.
Обобщим понятие ДУМ ФАЛ следующим образом. Пусть $\psi(y_1, \ldots, y_p)$ — существенная ФАЛ, то есть ФАЛ, существенно зависящая от всех своих БП. Множество ФАЛ G, $G \subseteq P_2(m)$, называется *ψ-универсальным множеством* (ψ*-УМ*) *порядка* m, если любая ФАЛ g, $g \in P_2(m)$, может быть представлена в виде

$$g = \psi(g_1, \ldots, g_p), \tag{4.5}$$

где $g_i \in G$ при всех i, $i = 1, \ldots, p$. Заметим, что понятие ψ-УМ порядка m совпадает с понятием ДУМ порядка m и ранга p в случае $\psi(y_1, \ldots, y_p) = y_1 \vee \cdots \vee y_p$.

Так же, как и ДУМ, будем строить ψ-УМ порядка m на основе разбиения $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_p)$ единичного куба B^m, где $|\delta_i| = s_i, i = 1, \ldots, p$, соотношений (4.1) и Утв. 4.1.
Обозначим через $G^{(j)}$, $j = 1, \ldots, p$, связанное с БП y_j ФАЛ ψ множество, состоящее из всех тех ФАЛ из $P_2(m)$, которые при любом i, $1 \leqslant i \leqslant p$ и $j \neq i$, равны $\alpha_{i,j}$ на множестве наборов δ_i, и пусть

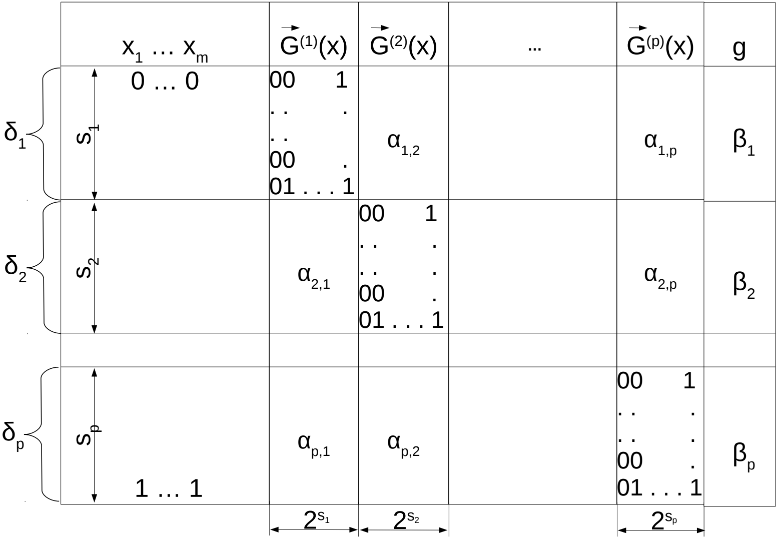
$$G = G^{(1)} \cup \cdots \cup G^{(p)}. \tag{4.6}$$

Заметим, что при этом в силу (4.1)–(4.3) множество $G^{(j)}$, $1 \leqslant j \leqslant p$, — множество, состоящее из всех 2^{s_j} различных ФАЛ вида $g_j(x, g(x))$, где $g(x)$ – произвольная ФАЛ из $P_2(m)$. Отсюда следует, что

$$\mu_\Delta(x, g(x), \ldots, g(x)) = \psi(g_1(x, g(x)), \ldots, g_p(x, g(x)) = g(x),$$

то есть выполнено (4.5) и G является ψ-УМ порядка m, для которого $|G| \leqslant 2^{s_1} + \ldots + 2^{s_p}$.

Таблица значений системы ФАЛ $\vec{G}$:



Построенное таким образом ψ-УМ G порядка m будем называть *стандартным ψ-УМ, связанным с разбиением* Δ. Если при этом для s, $1 \leqslant s \leqslant 2^m$, Δ – разбиение куба B^m на $d = \lceil 2^m/s \rceil \leqslant p$, последовательных отрезков, длины которых, за исключением, возможно, последнего (непустого), равны s, то множество G будем называть *ψ-УМ порядка m и высоты s*.

Приведём пример стандартного ψ-УМ для функции $\psi(y_1, \ldots, y_p) = y_1 y_2 \vee y_3 y_4 \vee \ldots \vee y_{2t-1} y_{2t}$, где $p = 2t$, связанного с разбиением куба B^m на последовательные отрезки $\delta_1, \ldots, \delta_p$ длины $s_1, \ldots, s_p$ соответственно, где $s_1 + \cdots + s_p = 2^m$. Выберем для его построения константы в (4.1) так, что $\alpha_{i,j} = 1$ только тогда, когда $|i - j| = 1$ и $\max\{i, j\} = 2\ell$ при всех $\ell, \ell = 1, \ldots, t$. Тогда в таблице значений соответствующего стандартного ψ-УМ G' вида (4.6) любой ее «внедиагональный» ненулевой блок состоит только из 1 и примыкает к 2 соседним «диагональным» блокам с номерами $(2\ell - 1)$ и 2ℓ, где $\ell = 1, \ldots, t$.

Утверждение 4.2

В условиях Утв. 4.1 существует ψ-УМ G порядка m и четной высоты s такое, что

$$|G| \leqslant p \cdot 2^s, \quad L^A(\vec{G}) \leqslant e_A \cdot |G| + O(p \cdot 2^{m+s/2}), \tag{4.7}$$

где $A \in \{K, C\}$ и $e_K = 2$, $e_C = 4$.

Доказательство.

Построим стандартное ψ-УМ G порядка m и высоты s в соответствии с (4.6) и заметим, что при этом

$$|G| \leqslant |G^{(1)}| + \cdots + |G^{(p)}| \leqslant p \cdot 2^s.$$

Для доказательства второго неравенства (4.7) достаточно реализовать систему ФАЛ $\vec{G}$ схемой Σ_G, $\Sigma_G \in \mathcal{U}^A$, построенной по методу каскадов, используя в качестве первой БП разложение ФАЛ из G БП x_m.

Действительно, на реализацию указанного разложения любой ФАЛ из G потребуется не более e_A элементов, число различных «остаточных» ФАЛ такого разложения для всех ФАЛ из G в силу четности s будет не больше, чем $p \cdot 2^{s/2}$, а сложность каждой из «остаточных» ФАЛ не превосходит, очевидно, $O(2^m)$.

Утверждение доказано. □

Замечание

Утверждение будет верно и в том случае, когда $d < p$ (см. замечание 2 к Утв. 4.1). При этом в случае $j > d$ множество $G^{(j)}$ будет состоять из единственной ФАЛ $g_j(x)$ из указанного замечания.

5. Асимптотически наилучший метод синтеза СФЭ и ИКС в произвольном базисе

Используем построенные выше стандартные ψ-УМ для синтеза СФЭ в базисе Б, $\text{Б} = \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{b}$. В силу полноты базиса Б в $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$ существуют формулы $\mathcal{F}_{\&}$, $\mathcal{F}_{\vee}$ и $\mathcal{F}_{\neg}$, реализующие ФАЛ $x_1 \cdot x_2$, $x_1 \vee x_2$ и $\overline{x}_1$ соответственно, которыми мы будем заменять ФЭ базиса Б_0 при синтезе схем на основе конъюнктивных и дизъюнктивных представлений.

Утверждение 5.1 (ср. [1])

Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, существует реализующая её СФЭ Σ_f, $\Sigma_f \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}$, такая, что

$$\mathcal{L}(\Sigma_f) \leqslant \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{3\log n + O(1)}{n}\right). \tag{5.1}$$

Доказательство.

Найдём среди ФЭ базиса Б, Б $= \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{b}$, элемент $\mathcal{E}_j$, на котором достигается приведённый вес $\rho_j = \rho_{\text{Б}}$ (см. вопрос 1), то есть

$$\rho_j = \frac{\mathcal{L}_j}{k_j - 1} = \min_{k_i \geqslant 2} \rho_i = \rho_{\text{Б}}. \tag{5.2}$$

Пусть q, m, s, t, p — натуральные числа, такие что $m = q$, s — четное и

$$p = t(k_j - 1) + 1, \tag{5.3}$$

$$k_j \leqslant \frac{2^m}{s} \leqslant p < \frac{2^m}{s} + (k_j - 1). \tag{5.4}$$

Построим из t ФЭ $\mathcal{E}_j$ бесповторную формулу $\mathcal{F}_t$ с p входами, которая имеет вид квазиполного l-ярусного, $l = \left\lceil \log_{k_j} p \right\rceil$, дерева и реализует ФАЛ $\psi(y_1, \ldots, y_p)$. Пусть G, $G \subseteq P_2(m)$,— стандартное ψ-УМ порядка m и (четной) высоты s. Построим по Утв. 4.2 реализующую систему ФАЛ $\vec{G}$ СФЭ из $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}$, а затем путем замены ее ФЭ $\&, \vee, \neg$ схемами $\mathcal{F}_{\&}$, $\mathcal{F}_{\vee}$, $\mathcal{F}_{\neg}$ получим эквивалентную ей СФЭ Σ_G из $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Б}}$ такую, что

$$\mathcal{L}(\Sigma_G) = O(p \cdot 2^s + p \cdot 2^{m+s/2}). \tag{5.5}$$

Путем аналогичного моделирования мультиплексорной СФЭ порядка $(n-q)$ от адресных БП x'' в стандартном базисе, которая имеет сложность не больше, чем $4 \cdot 2^{n-q}$ (см., например, [1]), построим эквивалентную ей СФЭ Σ'' из $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Б}}$:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Б}}(\Sigma'') = O(2^{n-q}). \tag{5.6}$$

Искомая СФЭ Σ_f строится, как обычно, на основе разложения ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ по переменным $x'' = (x_{q+1}, \ldots, x_n)$

$$f(x', x'') = \bigvee_{\sigma'' \in B^{n-q}} K_{\sigma''}(x'') \cdot f_{\sigma''}(x'), \qquad (5.7)$$

где $q = m$, $x' = (x_1, \ldots, x_q)$, а $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$. При этом для реализации каждой ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$, $\sigma'' \in B^{n-q}$, используется её представление

$$f_{\sigma''}(x') = \psi(g_{\sigma'',1}, \ldots, g_{\sigma'',p}), \qquad (5.8)$$

где ФАЛ $g_{\sigma'',1}, \ldots, g_{\sigma'',p}$ берутся из множества G.

Пусть, далее, СФЭ Σ' содержит СФЭ Σ_G в качестве подсхемы и для каждого σ'', $\sigma'' \in B^{n-q}$, реализует ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$ в соответствии с (5.8), используя для этого формулу $\mathcal{F}_t$. Схема Σ_f представляет собой суперпозицию вида $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$, где СФЭ Σ'' — мультиплексор порядка $(n-q)$ от БП x'', и реализует ФАЛ f в соответствии с (5.7). Сложность построенной СФЭ Σ_f, $\Sigma_f \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}$, с учётом (5.5)–(5.6) будет удовлетворять неравенству

$$\mathcal{L}(\Sigma_f) \leqslant \mathcal{L}_j \cdot t \cdot 2^{n-q} + O\Big(2^{n-q} + p \cdot 2^s + p \cdot 2^{s/2+m}\Big). \qquad (5.9)$$

Из этого неравенства при

$$m = q = \lceil 2\log n \rceil, \quad s = 2\left\lceil \frac{n - 3\log n}{2} \right\rceil \tag{5.10}$$

и при значениях остальных параметров, определённых из (5.3)–(5.4), следует (5.1).

Утверждение доказано. □

Следствие

$$\mathcal{L}^{\text{С}}_{\text{Б}}(n) \sim \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}.$$

Утверждение 5.2

Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, существует реализующая её ИКС $\widehat{\Sigma}_f$, $\widehat{\Sigma}_f \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}$, такая, что

$$\mathcal{L}(\widehat{\Sigma}_f) \leqslant \hat{\rho}_{\text{Б}} \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{3 \log n + O(1)}{n}\right). \tag{5.11}$$

Доказательство.

Найдём среди ФПЭ базиса Б, Б $= \{\mathcal{K}_i\}_{i=1}^{b}$, элемент $\mathcal{K}_j$, для которого $\hat{\rho}_j = \hat{\rho}_{\text{Б}}$ (см. вопрос 2), то есть

$$\hat{\rho}_j = \frac{\mathcal{L}_j}{k_j + 1} = \min_{1 \leqslant i \leqslant b} \hat{\rho}_i = \hat{\rho}_{\text{Б}},$$

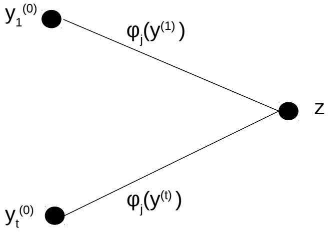
причем в случае $k_j = 0$ ФПЭ $\mathcal{K}_j$ является «вентилем», т. е. ориентированным проводящим ребром (см. вопрос 3), и, следовательно, $\sigma_j = 0$, $\varphi_j \equiv 1$.

Пусть, далее, m, s, t, p — натуральные числа такие, что

$$p = t(k_j + 1), \quad k_j \leqslant \frac{2^m}{s} \leqslant p < \frac{2^m}{s} + k_j.$$

Пусть $(t, 1)$-КС $\widehat{\mathcal{F}}_t$ над базисом Б представляет собой «звезду» из t управляемых непересекающимися наборами БП $y^{(1)}, \ldots, y^{(t)}$ длины k_j контактов $\mathcal{K}_j$ (в случае $k_j = 0$ эти наборы будем считать пустыми).

$\widehat{\mathcal{F}}_t$:



При этом центр звезды является выходом КС $\widehat{\mathcal{F}}_t$, к которому, в случае $\sigma_j = 0$, направлены дуги контактов $\mathcal{K}_j$, а её концевые вершины — проводящими входами $\widehat{\mathcal{F}}_t$, помеченными различными БП набора $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, \ldots, y_t^{(0)})$. Таким образом, КС $\widehat{\mathcal{F}}_t$ реализует ФАЛ

$$\widehat{\psi}(y_1, \ldots, y_p) = y_1^{(0)} \cdot \varphi_j\big(y^{(1)}\big) \vee \ldots \vee y_t^{(0)} \cdot \varphi_j\big(y^{(t)}\big).$$

Обозначим через $\widehat{G}$ стандартное $\widehat{\psi}$-УМ порядка m и высоты s вида (4.6), которое в случае $k_j = 0$ является ДУМ порадка m и ранга t. В остальных случаях построим $\widehat{G}$ на основе соответствующего разбиения куба B^m так, что для любых систем ФАЛ $g^{(1)}, \ldots, g^{(t)}$, взятых из тех компонент $\widehat{G}$, которые связаны с наборами БП $y^{(1)}, \ldots, y^{(t)}$ соответственно и любого набора α значений БП x не более одной из ФАЛ $h^{(i)}(\alpha) = \varphi_j\big(g^{(i)}(\alpha)\big)$, где $i = 1, \ldots, t$, обращается в 1.

Действительно, пусть $M, M \in B^{k_j, k_j}$, — матрица существенной зависимости ФАЛ φ_j, а γ и β — некоторые наборы из B^{k_j} такие, что $\varphi_j(\gamma) = 0$ и $\varphi_j(\beta) = 1$. Тогда аналогичная матрица $\widehat{M}$ для ФАЛ $\widehat{\psi}$, дающая множество $\widehat{G}$ с требуемыми свойствами ортогональности ФАЛ $h^{(i)}(x)$, имеет вид

		$y^{(0)}_1$		$y^{(1)}$			$y^{(0)}_t$		$y^{(t)}$	
		1	2	...	b_j+1		$p-k_j$	$p-k_j+1$	...	p
$y^{(0)}_1$	1	0		β			0		γ	
	2	1					0		γ	
$y^{(1)}$		⋮		M			⋮			
	k_j+1	1					0		γ	
$y^{(0)}_t$	$p-k_j$	0			0		0		β	
	$p-k_j+1$	0		γ			1			
$y^{(t)}$							⋮		M	
	p	0		γ			1			

Построим ИКС $\widehat{\Sigma}_f$ аналогично тому, как строилась СФЭ Σ_f при доказательстве Утв. 5.1, на основе разложений (5.7) и (5.8) с использованием ФАЛ $\widehat{\psi}$ вместо ФАЛ ψ, ИКС $\widehat{\mathcal{F}}_t$ вместо формулы $\mathcal{F}_t$ и множества $\widehat{G}$ вместо множества G.

Пусть $\lambda = |\widehat{G}|$ и пусть $(1, \lambda)$-КС $\widehat{\Sigma}_{\widehat{G}}$ построена по Утв. 4.2 из контактов базиса Б, моделирующих замыкающий и размыкающий контакты стандартного базиса (см. вопрос 2), реализует систему из ФАЛ множества $\widehat{G}$ и имеет сложность

$$\mathcal{L}\left(\widehat{\Sigma}_{\widehat{G}}\right) = O(p \cdot 2^s + p \cdot 2^{m+s/2}). \tag{5.12}$$

Заметим, что в силу $\widehat{\psi}$-универсальности множества ФАЛ $\widehat{G}$ для любой ФАЛ $g(x')$ справедливо представление

$$g(x') = \widehat{\psi}(g_1, \ldots, g_p) \tag{5.13}$$

где $g_j \in \widehat{G}$ для всех j, $j = 1, \ldots, p$. Для реализации данного представления достаточно входы $y_1, \ldots, y_p$ КС $\widehat{\mathcal{F}}_t$ присоединить к выходам КС $\widehat{\Sigma}_{\widehat{G}}$ в соответствии с (5.13). При этом указанная реализация является корректной суперпозицией соответствующих схем либо в силу ориентированности контактов $\mathcal{K}_j$ КС $\widehat{\mathcal{F}}_t$, которая обязательно имеет место в случае $k_j = 0$, либо в силу отмеченных выше свойств ортогональности ФАЛ $h^{(i)}(x)$ при различных $i, i = 1, \ldots, p$.

Пусть ИКС $\widehat{\Sigma}'$ от БП x' содержит в качестве подсхемы КС $\widehat{\Sigma}_{\widehat{G}}$ и реализует каждую ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$, $\sigma'' \in B^{n-q}$, на одном из своих 2^{n-q} выходов согласно (5.13), используя для этого схему $\widehat{\mathcal{F}}_t$, входы которой присоединены к выходам $\widehat{\Sigma}_{\widehat{G}}$ соответствующим образом.
Искомая ИКС $\widehat{\Sigma}_f$ содержит ИКС $\widehat{\Sigma}'$ в качестве подсхемы и представляет собой результат корректной суперпозиции вида $\Sigma_f = \widehat{\Sigma}''(\widehat{\Sigma}')$, где $\widehat{\Sigma}''$ — $(2^{n-q}, 1)$-КС, моделирующая в базисе Б контактное дерево от БП x'', входы (листья) которого присоединены к выходам $\widehat{\Sigma}'$ в соответствии с (5.7).
Сложности ИКС $\widehat{\Sigma}'$ и КС $\widehat{\Sigma}''$ удовлетворяют неравенствам

$$\mathcal{L}\left(\widehat{\Sigma}'\right) \leqslant \mathcal{L}\left(\widehat{\Sigma}_{\widehat{G}}\right) + 2^{n-q} \cdot t \cdot \mathcal{L}_j, \qquad \mathcal{L}\left(\widehat{\Sigma}''\right) = O(2^{n-q})$$

и, следовательно,

$$\mathcal{L}\left(\Sigma_f\right) \leqslant \mathcal{L}_j \cdot 2^{n-q} \cdot t + O\left(2^{n-q}\right) + O\left(p \cdot 2^s + p \cdot 2^{m+s/2}\right).$$

Оценка (5.11) получается из последнего неравенства при тех же значениях параметров, что и в теореме 5.1, при которых, начиная с достаточно большого n, выполнены все необходимые соотношения.

Утверждение доказано. □

Следствие

Из (5.11) с учётом нижней оценки вопроса 3 вытекает соотношение

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}(n) \sim \hat{\rho}_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}.$$

6. Асимптотически наилучший метод синтеза формул и контактных схем в произвольном базисе

При синтезе СФЭ в базисе $Б = \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{b}$ мы использовали некоторые формулы $\mathcal{F}_{\&}$, $\mathcal{F}_{\vee}$ и $\mathcal{F}_{\neg}$ из $\mathcal{U}_{Б}^{Ф}$, реализующие ФАЛ $x_1 \cdot x_2$, $x_1 \vee x_2$ и $\overline{x}_1$ соответственно, для моделирования конъюнктивных и дизъюнктивных представлений ФАЛ. При этом возможность такого моделирования и его сложность не налагали на данные формулы каких-либо структурных или параметрических ограничений. В то же время при использовании формул $\mathcal{F}_{\&}$, $\mathcal{F}_{\vee}$, $\mathcal{F}_{\neg}$ для аналогичного моделирования конъюнктивных и дизъюнктивных представлений ФАЛ в классе $\mathcal{U}_{Б}^{Ф}$ необходимо обеспечить отсутствие «внутренних» ветвлений в получающихся схемах за счёт определенных ограничений на их структуру.

Напомним, что БП, встречающаяся в записи формулы только один раз, считается **бесповторной** БП этой формулы и что формула, все БП (соответственно, все существенные БП) которой бесповторны, называется **бесповторной** (соответственно, **квазибеспоторной**). В [1] было доказано следующее утверждение.

Утверждение 6.1

Существуют квазибесповторные формулы $\mathcal{F}_{\neg}$, $\mathcal{F}_{\&}$ и $\mathcal{F}_{\vee}$ над базисом Б, которые реализуют ФАЛ $\overline{x}_1$, $x_1 \cdot x_2$ и $x_1 \vee x_2$ соответственно.

Доказательство.

В силу полноты системы ФАЛ $\{\varphi_i\}_{i=1}^{b}$ можно построить формулы $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1$ от БП y над Б, которые реализуют константы $0, 1$ и являются квазибесповторными в связи с отсутствием существенных БП. Из полноты следует также, что среди базисных ФАЛ есть немонотонная ФАЛ $\varphi'(x_1, \ldots, x_{k'})$ и нелинейная ФАЛ $\varphi''(x_1, \ldots, x_{k''})$. В силу леммы о немонотонной ФАЛ, найдется набор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k'})$ из $B^{k'}$ и число $i, 1 \leqslant i \leqslant k'$, такие, что

$$\varphi'(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, x_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{k'}) = \overline{x}_i.$$

Следовательно, формула

$$\mathcal{F}_\neg(x) = \mathcal{F}_\neg(x, y) = \varphi'(\mathcal{F}_{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{F}_{\alpha_{i-1}}, x, \mathcal{F}_{\alpha_{i+1}}, \ldots, \mathcal{F}_{\alpha_{k'}})$$

является квазибесповторной формулой над Б, реализующей ФАЛ $\bar{x}$.

Положим:

$$\mathcal{F}_{\neg}^{(1)}(x, y) = \mathcal{F}_{\neg}(x) \quad \text{и} \quad \mathcal{F}_{\neg}^{(0)}(x, y) = x.$$

Из доказательства леммы о нелинейной ФАЛ следует, что найдется такой набор $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{k''})$ из $B^{k''}$, натуральные числа i и j, $1 \leqslant i < j \leqslant k''$, а также константа $\gamma, \gamma \in B$, для которых

$$\varphi''(\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, x_i \oplus \beta_i, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_{j-1}, x_j \oplus \beta_j, \beta_{j+1}, \ldots, \beta_{k''}) = x_i \cdot x_j \oplus \gamma.$$

Тогда формула $\mathcal{F}_{\&}$ вида

$$\mathcal{F}_{\&}(x_1, x_2, y) = \mathcal{F}_{\neg}^{(\gamma)}(\varphi''(\mathcal{F}_{\beta_1}, \ldots, \mathcal{F}_{\beta_{i-1}}, \mathcal{F}_{\neg}^{(\beta_i)}(x_1, y),$$
$$\mathcal{F}_{\beta_{i+1}}, \ldots, \mathcal{F}_{\beta_{j-1}}, \mathcal{F}_{\neg}^{(\beta_j)}(x_2, y), \mathcal{F}_{\beta_{j+1}}, \ldots, \mathcal{F}_{\beta_{k''}}), y)$$

является квазибесповторной формулой над Б и реализует ФАЛ $x_1 \cdot x_2$.

Квазибесповторная формула $\mathcal{F}_{\vee}(x_1, x_2, y)$, которая реализует ФАЛ $x_1 \vee x_2$, получается из формулы

$$\mathcal{F}_{\neg}(\mathcal{F}_{\&}(\mathcal{F}_{\neg}(x_1, y), \mathcal{F}_{\neg}(x_2, y), y), y)$$

«удалением» всех вхождений двух последовательных формул $\mathcal{F}_{\neg}$.

Утверждение доказано. $\square$

Напомним, далее, что (см., например, [1]) множество δ, $\delta \subseteq B^q$ называется m-**регулярным** множеством наборов куба B^q, если $m < q$, $|\delta| = 2^m$ и все префиксы[1] длины m наборов из δ различны. Заметим, что m-регулярному множеству δ, $\delta \subseteq B^q$, можно взаимнооднозначно сопоставить систему ФАЛ $g = (g_1, \ldots, g_{q-m})$ из $P_2^{q-m}(m)$ так, что набор $\alpha = (\beta, \gamma)$, где $\beta \in B^m$ и $\gamma \in B^{q-m}$, принадлежит δ тогда и только тогда, когда $g(\beta) = \gamma$. Заметим также, что любая ФАЛ g, $g \in P_2(q)$, совпадает на m-регулярном множестве наборов δ, $\delta \subseteq B^q$, с некоторой ФАЛ из $P_2(m)$, если рассматривать $P_2(m)$ как множество всех ФАЛ из $P_2(q)$ с несущественными БП $x_{m+1}, \ldots, x_q$. При этом любая ФАЛ из связанной с δ системы функций совпадает на δ с соответствующей БП куба B^q.

[1] Для слова (набора) α вида $\alpha = \beta\gamma$ слово β (γ) считается его префиксом (соответственно суффиксом).

Распространим операцию сложения двоичных наборов (слов) по модулю 2 на тот случай, когда длина второго слагаемого может быть больше длины первого. Для наборов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in B^m$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in B^n$, где $n \geqslant m$, определим их сумму $\alpha \oplus \beta$ как набор $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in B^n$, который представляет собой поразрядную сумму по модулю 2 префикса длины n набора $(\underbrace{\alpha, \ldots, \alpha}_{a \text{ раз}})$, где $a = \lceil n/m \rceil$, с набором β и заметим, что при этом уравнение $\alpha \oplus \beta = \gamma$ имеет единственное относительно β решение при любых α, $\alpha \in B^m$, и γ, $\gamma \in B^n$.

На основе введённой операции при любых β, $\beta \in B^t$, и $\lambda \leqslant t$ обычным образом определяется сумма $\delta \oplus \beta$, где $\delta \subseteq B^\lambda$, а также сумма $g \oplus \beta$, где $g = (g_1, \ldots, g_\lambda) \in P_2^\lambda(m)$. При этом последняя сумма является набором длины t, который по-прежнему состоит из ФАЛ системы g или их отрицаний и задаёт m-регулярное множество наборов куба B^t. Заметим также, что любая ФАЛ системы g хотя бы один раз входит в систему $g \oplus \beta$ без отрицания, если для каждого i, $i = 1, \ldots, \lambda$, хотя бы один из разрядов набора β с номером $i + \lambda \cdot j$, где $0 \leqslant j \leqslant \lceil t/\lambda \rceil$ и $i + \lambda \cdot j \leqslant t$, равен 0.

Пусть $G \subseteq P_2(m)$ и $|G| = \lambda$, а $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^{q-m}})$, где $q > m$, — разбиение куба B^q на m-регулярные компоненты. Будем говорить, что разбиение Δ *моделирует ФАЛ из G с помощью БП или их отрицаний*, если для любого i, $i \in [1, 2^{q-m}]$, любая ФАЛ g, $g \in G$, совпадает на δ_i с некоторой буквой x_j^{σ}, где $1 \leqslant j \leqslant q$ и $\sigma \in B$. Компонента δ_i считается при этом *хорошей компонентой* разбиения Δ (относительно множества G) в том случае, когда для любой ФАЛ g, $g \in G$, указанное совпадение имеет место при $\sigma = 1$.

Утверждение 6.2

Пусть $G \subseteq P_2(m)$, $|G| = \lambda$, $q = m + a\lambda$ *и пусть* δ_i, $i = 1, \ldots, 2^{q-m}$, *— m-регулярное разбиение куба* B^q, *которое соответствует системе ФАЛ* $\overrightarrow{G} \oplus \beta$, *где* $\beta \in B^{q-m}$ *и* $\nu(\beta) = i - 1$. *Тогда система множеств* $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^{q-m}})$ *образует m-регулярное разбиение куба* B^q, *которое моделирует ФАЛ из G с помощью БП или их отрицаний и имеет при этом долю «плохих» компонент не больше, чем* $\frac{\lambda}{2^a}$.

Доказательство.

Покажем сначала, что система множеств Δ является разбиением куба B^q. Для этого в силу того, что мощность каждого из них равна 2^m, достаточно убедиться в том, что Δ — покрытие куба B^q, то есть любой набор γ, $\gamma \in B^q$, входит хотя бы в одно из множеств δ_i, $i \in [1, 2^{q-m}]$.

Действительно, представим набор γ в виде $\gamma = (\alpha, \hat{\gamma})$, где $\alpha \in B^m$, и найдём набор β, $\beta \in B^{q-m}$, который является единственным решением уравнения $\overrightarrow{G}(\alpha) \oplus \beta = \hat{\gamma}$. Следовательно, $\gamma \in \delta_i$, где $\nu(\beta) = i - 1$, и система множеств Δ является разбиением куба B^q.

Заметим, что в силу отмеченных выше свойств операции сложения по модулю 2, разбиение Δ обладает всеми необходимыми для моделирования множества ФАЛ G свойствами, и что при этом число его «плохих» компонент не больше, чем $\lambda \cdot 2^{q-m-a}$.

Утверждение доказано. $\square$

Утверждение 6.3

Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$ существует реализующая её формула $\mathcal{F}_f$, $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$, такая, что

$$L(\mathcal{F}_f) \leqslant \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{\log n}\left(1 + \frac{\log\log n + O(1)}{\log n}\right). \tag{6.1}$$

Доказательство.

Выберем ФЭ $\mathcal{E}_j$, введём натуральные параметры m, s, t, p, l, λ и определим разбиение П, формулу $\mathcal{F}_t$, ФАЛ ψ, ψ-УМ G порядка m так, как это было сделано в доказательстве Утв. 5.1 и так, чтобы выполнялись соотношения (5.2)–(5.5) и (4.7).

Выберем, далее, натуральные параметры q и a так, что

$$q = m + a\lambda \leqslant n \tag{6.2}$$

и построим по Утв. 6.2 для множества ФАЛ G соответствующее m-регулярное разбиение $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^{q-m}})$ куба B^q от БП $x' = (x_1 \ldots x_q)$. Заметим, что для произвольной ФАЛ $g(x')$ и любого i, $i \in [1, 2^{q-m}]$, в силу ψ-универсальности множества G, m-регулярности разбиения Δ и возможности моделировать ФАЛ из G на компонентах Δ с помощью БП или их отрицаний всегда найдутся такие натуральные числа $j_1, \ldots, j_p$ из $[m+1, q]$ и булевы константы $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, которые равны 1, если δ_i — «хорошая» компонента, и для которых равенство

$$g(x') = \psi\left(x_{j_1}^{\alpha_1}, \ldots, x_{j_p}^{\alpha_p}\right) \tag{6.3}$$

выполняется на любом наборе из δ_i.

Возьмём (см. (5.7)) разложение ФАЛ f по БП $x'' = (x_{q+1} \dots x_n)$ и продолжим его на основе (6.3) так, что

$$f(x', x'') = \bigvee_{\sigma'' \in B^{n-q}} K_{\sigma''}(x'') \cdot f_{\sigma''}(x') = \bigvee_{i=1}^{2^{q-m}} \chi_i(x') \cdot \bigvee_{\sigma'' \in B^{n-q}} K_{\sigma''}(x'') \cdot \psi\left(x_{j_{1,i,\sigma''}}^{\alpha_{1,i,\sigma''}}, \dots, x_{j_{p,i,\sigma''}}^{\alpha_{p,i,\sigma''}}\right), \tag{6.4}$$

где $\chi_i(x')$ — характеристическая ФАЛ компоненты δ_i разбиения Δ. Искомая формула $\mathcal{F}_f$ получается из последнего представления (6.4) ФАЛ f следующим образом:

1) характеристическая ФАЛ χ_i, $i \in [1, 2^{q-m}]$, реализуется по своей совершенной ДНФ;
2) мультиплексорная ФАЛ μ_{n-q} порядка $(n-q)$ от адресных БП x'', связанная с разложением f по этим БП, реализуется с помощью бесповторной по информационным БП формулы из $\mathcal{U}^{\mathsf{C}}$ сложности не больше, чем $4 \cdot 2^{n-q}$ (см. [2]);
3) каждая ФАЛ вида (6.3) реализуется одной формулой $\mathcal{F}_t$ с необходимыми инверсиями её БП в случае «плохой» компоненты δ_i;
4) все используемые при реализации формул из пунктов 1-3 элементы базиса Б_0 заменяются соответствующими им бесповторными формулами $\mathcal{F}_{\&}$, $\mathcal{F}_{\vee}$, $\mathcal{F}_{\neg}$ из Утв. 6.1.

Для сложности построенной таким образом формулы $\mathcal{F}_f$ будет (ср. с (5.9)) справедливо неравенство

$$\mathcal{L}\left(\mathcal{F}_f\right) \leqslant \mathcal{L}_j \cdot t \cdot 2^{n-m} + O\left(2^{n-m}\left(1 + \frac{p \cdot \lambda}{2^a}\right) + q \cdot 2^q\right), \tag{6.5}$$

которое при значениях параметров

$$m = \lfloor 3 \log \log n \rfloor, \qquad s = \lfloor \log n - 3 \log \log n \rfloor - 1, \qquad a = \lceil \log n \rceil - 1$$

удовлетворяющих при достаточно больших n условиям (6.2), даёт оценку (6.1).

Утверждение доказано. $\square$

Утверждение 6.4

Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, существует реализующая её КС Σ_f, $\Sigma_f \in \mathcal{U}^{\text{К}}_{\text{Б}}$, такая, что

$$\mathcal{L}(\Sigma_f) \leqslant \pi_{\text{Б}} \frac{2^n}{n} \left(1 + O\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right)\right). \tag{6.6}$$

Доказательство.

Найдём среди ФПЭ базиса Б, Б $= \{\mathcal{K}_i\}_{i=1}^{b}$, элемент $\mathcal{K}_j$, для которого $\mathcal{L}_j = \pi_{\text{Б}}$ (см. вопросы 2, 3), то есть

$$\mathcal{L}_j = \min_{1 \leqslant i \leqslant b} \mathcal{L}_i = \pi_{\text{Б}}.$$

В том случае, когда $\varphi_j \equiv 1$, то есть ФПЭ $\mathcal{K}_j$ является вентилем, искомая КС Σ_f была построена при доказательстве Утв. 5.2. В остальных случаях ФАЛ φ_j существенно зависит хотя бы от одной БП.

Пусть для определённости, из базисной ФАЛ φ_j (см. вопрос 3) подстановкой констант можно получить ФАЛ x_1, а из ФАЛ φ_r, $1 \leqslant r \leqslant b$, — ФАЛ $\overline{x}_1$.
Обозначим через $\widehat{\mathcal{K}}$ и $\check{\mathcal{K}}$ получающиеся при этом из $\mathcal{K}_j$ и $\mathcal{K}_r$ замыкающий и размыкающий контакты соответственно и положим $\widehat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_j$, $\check{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_r$.
Будем строить КС Σ_f из контактов $\widehat{\mathcal{K}}$ и $\check{\mathcal{K}}$ в соответствии с асимптотически наилучшим методом синтеза КС в стандартном базисе (см. [1]) с использованием Утв. 6.2 для того, чтобы долю контактов $\check{\mathcal{K}}$ в Σ_f можно было сделать бесконечно малой.
Пусть m, s и t — натуральные числа такие, что

$$s \leqslant 2^m, \qquad t = \left\lceil \frac{2^m}{s} \right\rceil, \tag{6.7}$$

а $\Pi = (\pi_1, \ldots, \pi_t)$ — разбиение куба B^m на последовательные отрезки длины не больше, чем s.

Обозначим через G стандартное ДУМ порядка m и ранга t от БП $(x_1, \ldots, x_m)$, которое связано с разбиением П, и пусть

$$\lambda = |G| \leqslant t \cdot 2^s, \tag{6.8}$$

а $h_1, \ldots, h_t$ — входящие в него характеристические ФАЛ отрезков $\pi_1, \ldots, \pi_t$ соответственно. Напомним, что при этом $G = G^{(1)} \cup \ldots \cup G^{(t)}$, где $G^{(i)}$, $i = 1, \ldots, t$, состоит из всех ФАЛ g, для которых $g \leqslant h_i$.

Введём натуральный параметр a, положим

$$q = m + a \cdot t \leqslant n \tag{6.9}$$

и рассмотрим разбиение $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^{q-m}})$ куба B^q от БП $x' = (x_1, \ldots, x_q)$ на m-регулярные компоненты, построенное по Утв. 6.2 для системы ФАЛ $h = (h_1, \ldots, h_t)$.

Пусть по-прежнему (см. вопрос 5) $\widehat{\mathcal{F}}_t$ — $(t, 1)$-КС из t контактов $\widehat{\mathcal{K}}$ от БП $y^{(0)} = (y_1, \ldots, y_t)$, соответствующих её «проводящим» входам и БП $y^{(1)} = (y_{t+1}, \ldots, y_{2t})$, управляющих её контактами, которая реализует ФАЛ

$$\widehat{\psi}\bigl(y^{(0)}, y^{(1)}\bigr) = y_1 y_{t+1} \vee \ldots \vee y_t y_{2t}.$$

Заметим, что любая ФАЛ $g(x')$ на любой компоненте δ_i разбиения Δ совпадает с ФАЛ

$$g_i(x') = \widehat{\psi}\bigl(g_{i,1}, \ldots, g_{i,t},\ x_{j_{i,\mathbf{1}}}^{\tau_{i,\mathbf{1}}}, \ldots, x_{j_{i,t}}^{\tau_{i,t}}\bigr), \tag{6.10}$$

где $g_{i,r} \in G^{(r)}$, $m + 1 \leqslant j_{i,r} \leqslant q$ и $\tau_{i,r} \in B$ при всех r, $r = 1, \ldots, t$, причём $\tau_{i,1} = \ldots = \tau_{i,t} = 1$, если δ_i — «хорошая» компонента.

Полагая, как и раньше, $x'' = (x_{q+1}, \ldots, x_n)$, разложим реализуемую ФАЛ $f(x', x'')$ следующим образом

$$f(x', x'') = \bigvee_{i=1}^{2^{q-m}} \chi_i(x') \Big(\bigvee_{\sigma'' \in B^{n-q}} K_{\sigma''}(x'') \cdot f_{\sigma'',i}(x') \Big), \tag{6.11}$$

где $\chi_i(x')$ — характеристическая ФАЛ компоненты δ_i, $i = 1, \ldots, 2^t$, а ФАЛ $f_{\sigma'',i}(x')$, $\sigma'' \in B^{n-q}$, имеет вид правой части равенства (6.10) для ФАЛ $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$.

Пусть $(1,\lambda)$-КС Σ_G, построенная из контактов $\widehat{\mathcal{K}}$ и $\check{\mathcal{K}}$, реализует систему ФАЛ $\overrightarrow{G}$ на основе совершенных ДНФ входящих в неё ФАЛ с использованием контактного дерева от БП $(x_, \ldots, x_m)$ со сложностью

$$\mathcal{L}(\Sigma_G) \leqslant \big(\widehat{\mathcal{L}} + \check{\mathcal{L}}\big) \cdot 2^m \cdot \lambda. \tag{6.12}$$

Пусть для каждого i, $i = 1, \ldots, 2^{q-m}$, $(1, 2^{n-q})$-КС Σ_i' содержит КС Σ_G в качестве своей подсхемы и реализует каждую ФАЛ $f_{\sigma'',i}$, $\sigma'' \in B^{n-q}$, на одном из своих выходов в соответствии с (6.10). Для этого используется либо КС $\widehat{\mathfrak{F}}_t$, если δ_i — «хорошая» компонента, либо КС, которая получается из $\widehat{\mathfrak{F}}_t$ заменой части контактов $\widehat{\mathfrak{K}}$ контактами $\check{\mathfrak{K}}$, в остальных случаях.

Заметим, что указанные схемы являются разделительными по входам на компоненте δ_i, что обеспечивает корректность применяемых операций суперпозиции на ней.

Определим $(1, 2^{n-m})$-КС Σ' как КС, которая получается отождествлением входов у всех КС Σ_i', $i = 1, \ldots, 2^{q-m}$, и реализует на своих 2^{n-m} выходах все ФАЛ вида $f_{\sigma'',i}(x')$.

Рассмотрим $(2^{q-m},1)$-КС $\widetilde{\Sigma}$, которая получается из $(2^q,1)$-КД от БП x' отождествлением для каждого i, $i=1,\ldots,2^{q-m}$, тех его листьев, которые соответствуют конъюнкциям вида $x_1^{\sigma_1}\cdot\ldots\cdot x_q^{\sigma_q}$, где $(\sigma_1,\ldots,\sigma_q)\in\delta_i$.

Построим $(2^{n-m},1)$-КС Σ'', которая получается в результате присоединения к каждому входу КС $\widetilde{\Sigma}$ выхода (корня) $(2^{n-q},1)$-контактного дерева от БП x''.

Заметим, что все операции суперпозиции, использованные при построении КС Σ'', являются корректными и поэтому Σ'' разделительна по входам, а система ФАЛ проводимости между её входами и выходом состоит из всех ФАЛ вида $\chi_i(x')\cdot K_{\sigma''}(x'')$, где $i\in[1,2^{q-m}]$ и $\sigma''\in B^{n-q}$.

Искомая КС Σ_f содержит КС Σ' в качестве подсхемы и представляет собой результат суперпозиции вида $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$, при выполнении которой входы Σ'' присоединяются к выходам Σ' в соответствии с (6.11). В силу разделительности КС Σ'' по входам указанная суперпозиция является корректной и поэтому КС Σ_f действительно реализует ФАЛ f.

Из (6.7)–(6.9), (6.12) с учётом того, что число контактов в контактном дереве от d БП равно $2^{d+1} - 2$, вытекает неравенство (ср. с (6.5))

$$\mathcal{L}\left(\Sigma_f\right) \leqslant \widehat{\mathcal{L}} \cdot 2^{n-m} \cdot t + O\Big(2^q \cdot (1+\lambda) + 2^{n-m}\Big(1 + \frac{t^2}{2^a}\Big)\Big).$$

Оценка (6.6) получается из последнего неравенства при следующих значениях параметров

$$a = \lfloor \log n \rfloor, \qquad m = \left\lfloor \frac{3}{2} \log n \right\rfloor, \qquad s = \left\lceil n - 3a\sqrt{n} \right\rceil,$$

при которых, начиная с достаточно большого n, выполнены все необходимые соотношения и, в частности, неравенства (6.9).

Утверждение доказано. □

Следствие

Из (6.6) с учётом нижней оценки вопроса 3 вытекает соотношение

$$L^{\mathrm{K}}_{\mathrm{Б}}(n) \sim \pi_{\mathrm{Б}} \frac{2^n}{n}.$$

7. Поведение функции Шеннона для задержки ФАЛ в произвольном базисе. Синтез СФЭ асимптотически оптимальных как по сложности, так и по задержке

Рассмотрим вопросы оптимизации по глубине (задержке) формул или СФЭ в произвольном базисе, реализующих мультиплексорные ФАЛ, а также вопросы получения достаточно точных оценок функции Шеннона для задержки ФАЛ.

Напомним, что ФАЛ μ_n, то есть стандартная мультиплексорная ФАЛ порядка n, зависит от n адресных БП $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и 2^n информационных БП $u = (u_0, \ldots, u_{2^n-1})$ так, что

$$\mu_n(x,\ u) = \bigvee_{\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\in B^n} K_\sigma(x) u_{\nu(\sigma)}$$

Заметим, что любую ФАЛ g от БП $x = (x_1, \ldots, x_n)$ можно получить в результате подстановки набора констант $\tilde{\beta}_g$, являющегося столбцом ее значений, вместо набора БП $u = (u_0, \ldots, u_{2^n-1})$ в ФАЛ $\mu_n(x, u)$, то есть

$$g(x) = \mu_n(x, \tilde{\beta}_g). \tag{7.1}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$T_{\text{Б}}(n) \leqslant T_{\text{Б}}(\mu_n) + c_5, \tag{7.2}$$

где $c_5 = \max\{T_{\text{Б}}(0), T_{\text{Б}}(1)\}$.

Утверждение 7.1

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *и* $u = (u_0, \ldots, u_{2^n-1})$, *где* $n = 1, 2, \ldots,$ *— наборы БП. Тогда в* $\mathfrak{U}^{\Phi}_{Б}$ *существует бесповторная по БП из u формула* $\mathcal{F}_n(x, u)$ *, реализующая ФАЛ* $\mu_n(x, u)$ *и такая, что*

$$T(\mathcal{F}_n) \leqslant \tau_{Б} \cdot n + c_6 \cdot \log n, \mathcal{L}(\mathcal{F}_n) \leqslant c_7 \cdot n \cdot 2^n. \qquad (7.3)$$

Доказательство.

Заметим, что так как $\mu_n(x, u) = \mu_{n+1}(0, x_1, \ldots, x_n; u_0, \ldots, u_{2^{n+1}-1})$, то если уже построена формула $\mathcal{F}_{n+1}$, реализующая μ_{n+1}, то существует формула $\mathcal{F}_n$, реализующая μ_n, такая что $T(\mathcal{F}_n) \leqslant T(\mathcal{F}_{n+1}) + c_5$ и $\mathcal{L}(\mathcal{F}_n) \leqslant \mathcal{L}(\mathcal{F}_{n+1}) + c_{10}$, для некоторых констант c_5, c_{10}.

Искомые формулы $\mathcal{F}_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ будем строить индуктивно на основе дихотомии набора ее адресных БП.

Пусть:

1. $m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, $x' = (x_1, \ldots, x_m)$, $x'' = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$ и, тем самым, $x = (x', x'')$;
2. $v = (v_0, \ldots, v_{2^m-1})$ и $u = (u_0, \ldots, u_{2^n-1}) = \left(u^{(0)}, \ldots, u^{(2^m-1)}\right)$ — наборы информационных БП, где $u^{(i)}$, $i = 0, \ldots, 2^m - 1$, — наборы из 2^{n-m} подряд идущих БП набора u.

Легко видеть, что при этом

$$\mu_n(x, u) = \mu_m\left(x', \mu_{n-m}(x'', u^{(0)}), \ldots, \mu_{n-m}(x'', u^{(2^m-1)})\right). \tag{7.4}$$

Напомним (см. Утв. 6.1), что $\mathcal{F}_{\&}$, $\mathcal{F}_{\vee}$ и $\mathcal{F}_{\neg}$ — бесповторные по существенным БП формулы из $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$, реализующие ФАЛ $x_1 \cdot x_2$, $x_1 \vee x_2$ и $\bar{x}_1$ соответственно, для которых

$$\max\{T(\mathcal{F}_{\&}), T(\mathcal{F}_{\vee}), T(\mathcal{F}_{\neg})\} = c_8, \quad \max\{\mathcal{L}(\mathcal{F}_{\&}), \mathcal{L}(\mathcal{F}_{\vee}), \mathcal{L}(\mathcal{F}_{\neg})\} = c_9.$$

Построим, кроме того, в базисе Б формулы $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$, реализующие константы 0 и 1 соответственно такие, что

$$\max\{T(\mathcal{F}_0), T(\mathcal{F}_1)\} = c_5, \quad \max\{\mathcal{L}(\mathcal{F}_0), \mathcal{L}(\mathcal{F}_1)\} = c_{10}.$$

Положим:

1. $\mathcal{E}_r$ — функциональный элемент Б такой, что $\tau_r = \tau_{Б}$;
2. $t = \left\lceil \frac{2^m - 1}{k_r - 1} \right\rceil$, $p = t(k_r - 1) + 1 \geqslant 2^m$ и $l = \lceil \log_{k_r} p \rceil$;
3. Формула Ф представляет собой квазиполное l-ярусное k_r-ичное дерево с p листьями, построенное из t ФЭ $\mathcal{E}_r$, и реализует существенную ФАЛ $\psi(y_1, \ldots, y_p)$.

По Утв. 4.1 найдем такие ФАЛ $g_j(x', v_j)$, $j = 0, \ldots, 2^m - 1$, и ФАЛ $g_j(x')$, $j = 2^m, \ldots, (p-1)$, для которых

$$\mu_m(x, v) = \psi\big(g_0(x', v_0), \ldots, g_{2^m-1}(x', v_{2^m-1}), g_{2^m}(x'), \ldots, g_{p-1}(x')\big). \qquad (7.5)$$

При этом в силу замечаний 2 и 3 к Утв. 4.1 ФАЛ $g_j(x', v_j)$ для каждого j, $j = 0, \ldots, 2^m - 1$, и соответствующего ему булевского значения α_j имеет вид

$$g_j(x', v_j) = \hat{g}_j(x') \vee K_j(x') \cdot v_j^{\alpha_j}, \qquad (7.6)$$

где $K_j(x')$ — элементарная конъюнкция ранга m от БП x', обращающаяся в единицу на том (единственном) наборе значений БП x', на котором отличаются ФАЛ $g_j(x', 0)$ и $g_j(x', 1)$, а $\hat{g}_j(x')$ — минимальная из этих ФАЛ.

Тогда в качестве искомой формулы $\mathcal{F}_n(x, u)$ можно взять формулу, которая получается в результате следующих преобразований правой части равенства (7.5):

1. заменой ФАЛ ψ формулой Φ;
2. заменой каждой ФАЛ $g_j(x', v_j)$, $j = 0, 1, \ldots, 2^m - 1$, на правую часть (7.6) с подстановкой вместо ФАЛ $\hat{g}_j$ формулы $\mathcal{F}_m(x', \tilde{\beta}_{\hat{g}_j})$ согласно (7.1) и использованием формул $\mathcal{F}_\&$, $\mathcal{F}_\vee$, $\mathcal{F}_\neg$ и $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_1$ вместо ФЭ базиса Б_0 и констант соответственно;
3. подстановкой формулы $\mathcal{F}_{n-m}(x'', u^{(j)})$ вместо БП v_j, $j = 0, \ldots, 2^m - 1$;
4. подстановкой формулы $\mathcal{F}_m(x', \tilde{\beta}_{g_j})$ вместо ФАЛ $g_j(x')$, $j = 2^m, \ldots, p$.

Полученная таким образом формула $\mathcal{F}_n(x,u)$ будет реализовывать ФАЛ $\mu_n(x,u)$ в соответствии с (7.4) –(7.6). Из ее построения, а также описания введенных выше параметров и констант вытекают неравенства:

$$\begin{aligned} T(\mathcal{F}_n) \leqslant\ & l \cdot T_r + c_8 + \\ & + \max\left\{ T(\mathcal{F}_m) + c_5, c_8 + \max\left\{ \left(\lceil \log m \rceil + 1\right) c_8, T(\mathcal{F}_{n-m}) + c_8 \right\} \right\}, \end{aligned} \tag{7.7}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathcal{F}_n) \leqslant t \cdot L_r + 2^m \Big(\mathcal{L}(\mathcal{F}_m) + c_{10} \cdot 2^m + \mathcal{L}(\mathcal{F}_{n-m}) + (2m-1) \cdot c_9 + 3 \cdot c_9 \Big) + \\ + \left(p - 2^m\right)\left(\mathcal{L}(\mathcal{F}_m) + c_{10} \cdot 2^m\right), \end{aligned}$$

последнее из которых переписывается в виде

$$\mathcal{L}(\mathcal{F}_n) \leqslant t \cdot L_r + p(\mathcal{L}(\mathcal{F}_m) + c_{10} \cdot 2^m) + 2^m (\mathcal{L}(\mathcal{F}_{n-m}) + (2m+2) \cdot c_9). \tag{7.8}$$

Из (7.7) с учетом того, что $m \leqslant n - m$ и

$$T(\mathcal{F}_{n-m}) \geqslant c_{11}(n-m) \geqslant c_{11}m \geqslant \lceil \log m \rceil \cdot c_8,$$

если $n \geqslant c_{12}$, получим, что при $n \geqslant c_{12}$ выполняется неравенство

$$T(\mathcal{F}_n) \leqslant \tau_{\text{Б}} m + c_{13} + T(\mathcal{F}_{n-m}),$$

которое перепишем в виде

$$T(\mathcal{F}_n) - \tau_{\text{Б}} n \leqslant T(\mathcal{F}_{n-m}) - (n-m) \cdot \tau_{\text{Б}} + c_{13}. \qquad (7.9)$$

Пусть $k = \lceil \log n \rceil$. Определим последовательности чисел n_i, m_i, $i = 0, \ldots, k$:

$$n_i = \begin{cases} n, & \text{если } i = 0; \\ \left\lceil \frac{n_{i-1}}{2} \right\rceil, & \text{иначе;} \end{cases} \qquad m_i = \begin{cases} m, & \text{если } i = 0; \\ \left\lfloor \frac{m_{i-1}}{2} \right\rfloor, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Легко видеть, что $n_i \leqslant 2^{k-i}$ для всех указанных значений i.

Действительно, для $i = 0$ получаем $n_0 = n = 2^{\log n} \leqslant 2^{\lceil \log n \rceil} = 2^{k-0}$.

Предположим, что $n_j \leqslant 2^{k-j}$ и докажем соотношение для $i = j + 1$, $i \leqslant k$:

$$n_i = n_{j+1} = \left\lceil \frac{n_j}{2} \right\rceil \leqslant \left\lceil \frac{2^{k-j}}{2} \right\rceil = \left\lceil 2^{k-(j+1)} \right\rceil = 2^{k-i}.$$

В частности, для $i = k$ получаем: $n_k = 1$, $m_k = 0$.

Из невозрастания последовательности n_i следует, что можно выбрать такое натуральное k_0, $k_0 \leqslant k$, что: $n_{k_0} < c_{12}$ и $n_{k_0-1} \geqslant c_{12}$.

В силу (7.9) для всех $i = 0, \ldots, k_0 - 1$, будут выполняться неравенства

$$T(\mathcal{F}_{n_i}) - \tau_{\text{Б}} \cdot n_i \leqslant T(\mathcal{F}_{n_{i+1}}) - \tau_{\text{Б}} \cdot n_{i+1} + c_{13},$$

суммируя которые по всем указанным значениям i получим неравенство

$$T(\mathcal{F}_{n}) - \tau_{\text{Б}} \cdot n \leqslant T(\mathcal{F}_{n_{k_0}}) - \tau_{\text{Б}} \cdot n_{k_0} + c_{13} k_0,$$

в котором $n_{k_0} \leqslant c_{12}$, $T(\mathcal{F}_{n_{k_0}}) \leqslant T(\mathcal{F}_{c_{12}}) \leqslant c_{14}$, откуда вытекает справедливость первого неравенства (7.3).

Из (7.8), в свою очередь, вытекает неравенство

$$\mathcal{L}(\mathcal{F}_n) \leqslant 2^m(2\mathcal{L}(\mathcal{F}_{n-m}) + c_{14} \cdot 2^{n-m}),$$

из которого следует, что

$$\frac{\mathcal{L}(\mathcal{F}_n)}{2^n} \leqslant \frac{2\mathcal{L}(\mathcal{F}_{n-m})}{2^{n-m}} + c_{14}. \tag{7.10}$$

Из неравенства (7.10) выводится цепочка неравенств

$$\frac{\mathcal{L}(\mathfrak{F}_n)}{2^n} \leqslant c_{14} + 2\frac{\mathcal{L}(\mathfrak{F}_{n_1})}{2^{n_1}} \leqslant c_{14} + 2\Big(c_{14} + \frac{\mathcal{L}(\mathfrak{F}_{n_2})}{2^{n_2}}\Big) \leqslant \ldots \leqslant$$

$$\leqslant c_{14}\big(1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{k-3}\big) + \frac{\mathcal{L}(\mathfrak{F}_{n_{k-2}})}{2^{n_{k-2}}} \leqslant c_7 \cdot n,$$

которая доказывает второе неравенство (7.3), так как $n_{k-2} \leqslant 4$.

Утверждение доказано. □

Следствие

В силу (7.2) и нижней оценки Утв. 3.2 имеют место неравенства

$$\tau_{\text{Б}}(n - \log\log n - o(1)) \leqslant T_{\text{Б}}(n) \leqslant \tau_{\text{Б}} n + O(\log n).$$

Утверждение 7.2

При всех $n = 1, 2, \ldots$ для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, сущестует реализующая ее СФЭ Σ_f такая, что

$$T(\Sigma_f) \lesssim \tau_{\text{Б}} \cdot n, \mathcal{L}(\Sigma_f) \lesssim \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}.$$

Доказательство.

Искомая СФЭ Σ_f строится аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы 5.1, с той лишь разницей, что в качестве СФЭ Σ'', реализующей ФАЛ μ_{n-q} от адресных БП x'', используется формула $\mathcal{F}_{n-q}$, построенная по Утв. 7.1.

При этом параметры m, q, s выбираются так, чтобы по-прежнему выполнялось соотношение $\mathcal{L}(\Sigma'') = o\left(\frac{2^n}{n}\right)$. Достаточно, например, положить

$$q = m = \lceil 2 \log n \rceil, \; s = \lceil n - 4 \log n \rceil.$$

Утверждение доказано. □

Следствие

Для почти всех ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, можно построить реализующую ее СФЭ Σ_f, $\Sigma_f \in \mathcal{U}^{\text{С}}_{\text{Б}}$, с асимптотически оптимальными как по сложности, так и по задержке значениями.

II. Некоторые вопросы надежности схем из функциональных элементов

8. Вероятностное описание источников помех и повреждений СФЭ. Невозможность построения сколь угодно надежных схем для источников неймановского типа

Для определения уровня надёжности схемы часто применяется вероятностный подход. Следуя курсу ОК, будем считать, что $\mathcal{M} = (\Sigma, И)$ — ненадежная схема Σ от переменных $x_1, \ldots, x_n$, переходящая под действием источника неисправностей И в состояния $\Sigma = \Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}, \ldots, \Sigma^{(t)}$, в которых реализуются функции $F = F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots, F^{(t)}$ соответственно, определённые на множестве наборов $\mathcal{N} = \{\beta_1 \ldots, \beta_p\}$. Пусть далее вероятность того, что схема Σ находится в состоянии $\Sigma^{(i)}$, известна и равна π_i, где $i = 1, \ldots, t$, $0 \leqslant \pi_i \leqslant 1$ и $\sum_{i=1}^{t} \pi_i = 1$.

В дальнейшем, вместо пары $\mathcal{M} = (\Sigma, И)$ будем, как правило, указывать просто Σ, если из контекста ясно, какой источник неисправностей имеется в виду.

Введём следующие величины, характеризующие ненадёжность схемы Σ в модели $\mathcal{M} = (\Sigma, \text{И})$:

$$\xi(\mathcal{M}) = \sum_{\substack{F^{(j)} \neq F \\ 2 \leqslant j \leqslant t}} \pi_j, \tag{8.1}$$

$$\xi(\mathcal{M}, \beta) = \sum_{\substack{F^{(j)}(\beta) \neq F(\beta) \\ 2 \leqslant j \leqslant t}} \pi_j, \tag{8.2}$$

где $\beta \in \mathcal{N}$, а затем положим

$$\eta(\mathcal{M}) = \max_{\beta \in \mathcal{N}} \xi(\mathcal{M}, \beta), \tag{8.3}$$

$$q_{\mathcal{M}}(x_1, \ldots, x_n) = \xi(\mathcal{M}, (x_1, \ldots, x_n)). \tag{8.4}$$

Заметим, что величина $\xi(\Sigma)$ ($\xi(\Sigma, \beta)$) задаёт вероятность того, что схема Σ реализует функцию, не равную F (соответственно не равную F на наборе β), и поэтому

$$\eta(\Sigma) \leqslant \xi(\Sigma) \leqslant p\eta(\Sigma), \tag{8.5}$$

откуда следует, в частности, что $\eta(\Sigma) = 0$ тогда и только тогда, когда $\xi(\Sigma) = 0$. Схема Σ считается *абсолютно надёжной* в модели $\mathcal{M}$, если $\eta(\Sigma) = 0$ (или $\xi(\Sigma) = 0$). Это означает, что все состояния схемы Σ, имеющие положительную вероятность, эквивалентны Σ. Заметим также, что абсолютно надёжная (в модели $\mathcal{M}$) схема - это *самокорректирующаяся* (в модели $\mathcal{M}$) схема.

Функция $q_\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ называется *функцией вероятности неправильного срабатывания схемы* Σ.

Таким образом, имеется два способа описания работы ненадёжной схемы Σ: 1) задание вероятностей её переходов в различные возможные неисправные состояния — т.н. *распределение режимов*; 2) задание функции вероятности её неправильного срабатывания на наборах области определенности.

Заметим, что по распределению режимов вида $\begin{bmatrix} f_1; & \ldots; & f_t \\ \pi_1; & \ldots; & \pi_t \end{bmatrix}$ ненадежной схемы $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; z_1)$ функция $q_\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ вероятностей её неправвльного срабатывания на наборах куба B^n вычисляется следующим образом:

$$q_\Sigma(x_1, \ldots, x_n) = \pi_2 \cdot (f_1 \oplus f_2) + \ldots + \pi_t \cdot (f_1 \oplus f_t). \tag{8.6}$$

С другой стороны, для любой функции $q(x_1,\ldots,x_n)$, которая на наборах куба B^n принимает действительные значения из отрезка $[0,1]$, и любой ФАЛ $f(x_1,\ldots,x_n)$ существует такое распределение режимов $\begin{bmatrix} f_1; & \ldots; & f_t \\ \pi_1; & \ldots; & \pi_t \end{bmatrix}$, которое её порождает, и для которого $f_1 = f$. Действительно, пусть $\beta_1,\ldots,\beta_{t-1}$ — все те наборы куба B^n, для которых $q(\beta) > 0$ и пусть, для определенности, $q(\beta_1) \leqslant \cdots \leqslant q(\beta_{t-1})$. Тогда в качестве искомого распределения режимов можно взять распределение вида $\begin{bmatrix} f_1; & \ldots; & f_t \\ \pi_1; & \ldots; & \pi_t \end{bmatrix}$, где $\pi_1 = 1 - q(\beta_{t-1})$, $\pi_2 = q(\beta_1)$ и $\pi_i = q(\beta_{i-1}) - q(\beta_{i-2})$ при $i = 3,\ldots,t$, а функции $f_1,\ldots,f_t$ определяются из соотношений $f_i = g_i \oplus f_1$ и таблицы 1.

Пусть $\mathfrak{U}$ — полный класс схем, то есть класс, в котором можно реализовать любую систему ФАЛ, а И — источник неисправностей, действующий на схемы из $\mathfrak{U}$. Тогда будем говорить, что $(\mathfrak{U}, \text{И})$ — класс ненадёжных схем. Считается, что ФАЛ f допускает сколь угодно надёжную реализацию в классе $\mathfrak{U}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует схема Σ, $\Sigma \in \mathfrak{U}$, которая реализует f и для которой $\eta(\Sigma) < \varepsilon$. Из (8.5) следует, что при этом ФАЛ f допускает сколь угодно надёжную реализацию и относительно функционала $\xi(\Sigma)$.

Рассмотрим вероятностный подход на примере ненадёжных СФЭ над базисом $Б = \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^b$ где ФЭ $\mathcal{E}_i$ реализует булеву функцию $\varphi_i(x_1, \ldots, x_{k_i})$. Пусть для каждого i, $i = 1, \ldots, b$ известно *распределение режимов работы* ФЭ $\mathcal{E}_i$, то есть для каждого j, $j = 1, \ldots, 2^{2^{k_i}}$ известна и равна $\pi_{i,j}$ вероятность того, что ФЭ $\mathcal{E}_i$ реализует j-ю булеву функцию от булевых переменных $x_1, \ldots, x_{k_i}$ (если считать, что все булевы функции от переменных $x_1, \ldots, x_{k_i}$ упорядочены в соответствии с номерами их столбцов значений). При нахождении ненадежности схемы Σ над базисом Б будем считать, что все ее ФЭ переходят в свои состояния независимо друг от друга, и что любое состояние СФЭ Σ определяется состояниями ФЭ Σ.

В соответствии с этим на основе введённых выше соотношений (8.1)–(8.4) можно найти значения ненадёжности $\xi(\Sigma)$ и $\eta(\Sigma)$ для СФЭ Σ, а также распределение режимов её работы и функцию $q_{\Sigma}(x_1, \ldots, x_n)$.

Таким образом, оба способа описания ненадёжности СФЭ обладают свойством полноты, то есть, зная соответствующее описание для элементов базиса, его можно определить и для любой СФЭ в данном базисе. При этом пространство событий (состояний) схемы Σ будет состоять из наборов всевозможных режимов её элементов и всевозможных наборов значений в её вершинах, при первом и втором способах описания соответственно.

Будем говорить, что источник неисправностей И для класса $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{C}$ является[1] источником *неймановского* типа, если $\pi_{i,j} > 0$ для каждого $i = 1, \ldots, b$ и каждого $j = 1, \ldots, 2^{2^{k_i}}$.

Для базиса Б из ненадёжных функциональных элементов введем величины

$$\widehat{\xi}_{\text{Б}} = \min_{1 \leqslant i \leqslant b} \min_{1 \leqslant j \leqslant 2^{2^{k_i}}} \pi_{ij}, \; \widehat{\eta}_{\text{Б}} = \min_{1 \leqslant i \leqslant b} \min_{\beta \in B^{k_i}} \min\{\xi(\mathcal{E}_i, \beta), 1 - \xi(\mathcal{E}_i, \beta)\}, \qquad (8.7)$$

где величина $\xi(\mathcal{E}_i, \beta)$ определяется в соответствии с (8.2). Заметим, что $\widehat{\xi}_{\text{Б}} > 0$ и $\widehat{\eta}_{\text{Б}} > 0$, если Б — базис неймановского типа.

[1] Предполагается, что И задает распределение режимов элементов базиса Б, которое, в дальнейшем, будем считать атрибутом этих ненадёжных элементов.

Утверждение 8.1 (Теорема Неймана)

Для любой СФЭ Σ в базисе Б из ненадёжных функциональных элементов, единственный выход которой является выходом элемента, выполняются неравенства

$$\xi(\Sigma) \geqslant \widehat{\xi}_{Б}, \qquad \eta(\Sigma) \geqslant \widehat{\eta}_{Б}. \tag{8.8}$$

Доказательство.

Пусть $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; z_1)$ и пусть единственный выход z_1 СФЭ Σ является выходом ее элемента $\mathcal{E}_i$, входы которого присоединены к вершинам $v_1, \ldots, v_{k_i}$, являющимся либо входами Σ, либо выходами элементов, связанными с «внутренними» переменными $u_1, \ldots, u_{k_i}$.

Для наборов α, $\alpha \in B^n$ и γ, $\gamma \in B^{k_i}$, обозначим через $p(\alpha, \gamma)$ вероятность того, что при $x = (x_1, \ldots, x_n) = \alpha$ набор БП $u = (u_1, \ldots, u_{k_i})$ принимает значения γ. Из (8.7) следует, что при $u = \gamma$ вероятность $q(\gamma, \alpha)$ появления на выходе $\mathcal{E}_i$ значения $\overline{f(\alpha)}$ не меньше, чем $\widehat{\eta}_{\text{Б}}$. Это означает, что вероятность появления при $x = \alpha$ значения $\overline{f(\alpha)}$ на выходе z_1 оценивается как

$$\Sigma_{\gamma \in B^{k_i}} p(\alpha, \gamma) \cdot q(\gamma, \alpha) \geqslant \widehat{\eta}_{\text{Б}} \cdot \Sigma_{\gamma \in B^{k_i}} p(\alpha, \gamma) = \widehat{\eta}_{\text{Б}}$$

и, тем самым, не меньше, чем $\widehat{\eta}_{\text{Б}}$.

Первое неравенство (8.8) доказывается аналогично.

Утверждение доказано. $\square$

Следствие

Для любой отличной от БП ФАЛ f в классе $\mathfrak{U}^{C}_{\text{Б}}$, где Б — базис неймановского типа, невозможна сколь угодно надёжная реализация ФАЛ, отличных от входных БП.

9. Эффект нарастания ненадежности. Построение сколь угодно надёжных СФЭ в базисе из ненадёжных элементов $\{\&, \vee, \neg\}$ и абсолютно надёжного элемента голосования

Ненадежность СФЭ в базисах из ненадёжных функциональных элементов характеризуются рядом интересных и, иногда, неожиданных эффектов. Одним из них является т.н. эффект нарастающей ненадёжности. Рассмотрим его на примере двух (неполных) базисов: $Б_{\oplus} = \{\mathcal{E}_{\oplus}\}$ и $Б_{\&} = \{\mathcal{E}_{\&}\}$, где элементы $\mathcal{E}_{\&}$ и $\mathcal{E}_{\oplus}$ характеризируются следующим распределением режимов:

$$\mathcal{E}_{\&} : \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_2; & 0 \\ 1-p; & p \end{bmatrix} \text{ и } \mathcal{E}_{\oplus} : \begin{bmatrix} x_1 \oplus x_2; & \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \\ 1-p; & p \end{bmatrix}, 0 < p < 1.$$

Исследуем сначала СФЭ $\Sigma_{\&}^{(n)}$ в базисе $\text{Б}_{\&}$, которая имеет входы $x_1, \ldots, x_n$, выход z_1 и представляет собой цепочку из $(n-1)$ последовательно соединенных элементов $\mathcal{E}_{\&}$ (см. Рис. 9.1).

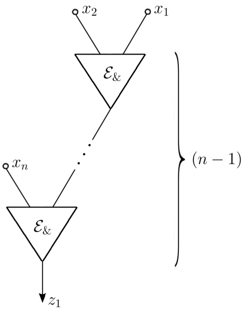


Рис.: 9.1

Заметим, что $\Sigma_{\&}^{(n)}$ реализует ФАЛ $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$, если все её элементы работают правильно, и ФАЛ 0 в остальных случаях. Следовательно,

$$\xi(\Sigma_{\&}^{(n)}) = \\ = \eta(\Sigma_{\&}^{(n)}) = \eta(\Sigma_{\&}^{(n)}, (1, \ldots, 1)) = \\ = (1-p)^{n-1}$$

и, тем самым, ненадёжность $\Sigma_{\&}^{(n)}$ (в любом смысле) стремится к 1 при n, стремящемся к ∞.

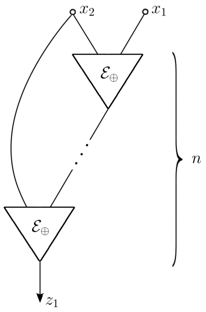


Рис.: 9.2

Рассмотрим, далее, СФЭ $\Sigma_\oplus^{(n)}$ в базисе $\text{Б}_\oplus$, которая имеет входы x_1, x_2 и представляет собой цепочку из n последовательно соединенных по вторым входам элементов $\mathcal{E}_\oplus$, первые входы которых присоединены к входу x_2 (см. Рис. 9.2).

Пусть n - нечетное число. Заметим, что в данном случае СФЭ $\Sigma_\oplus^{(n)}$ реализует ФАЛ $x_1 \oplus x_2$ как в исправном состоянии, так и в любом из неисправных состояний, если при этом $x_2 = 1$, так как $x_1 \oplus 1 = \bar{x}_1 \vee \bar{1} = \bar{x}_1$. Легко видеть также, что, если $x_2 = 0$ и хотя бы один элемент схемы сработал неправильно, на её выходе появится 1.

Таким образом, СФЭ $\Sigma_{\oplus}^{(n)}$ реализует ФАЛ $x_1 \oplus x_2$ в исправном состоянии и ФАЛ $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$ в любом из неисправных состояний, т.е.

$$\xi(\Sigma_{\oplus}^{(n)}) = (1-p)^n = \eta(\Sigma_{\oplus}^{(n)}) = \eta(\Sigma_{\oplus}^{(n)}, (0,0)),$$

и, тем самым, ненадёжность $\Sigma_{\oplus}^{(n)}$ (в любом смысле) стремится к 1 при n, стремящемся к ∞.

Заметим также, что хотя базис $\text{Б}_{\oplus}$ формально не является полным, в нем возможна сколь угодно надежная реализация Шефферовой ФАЛ $\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$ и, тем самым, сколь угодно надежная реализация произвольной ФАЛ.

Перейдем к вопросу о возможности построения сколь угодно надёжных СФЭ для произвольных ФАЛ в исходном базисе Б. Докажем, что такое построение возможно, если в базисе Б имеется абсолютно надёжный ФЭ $\mathcal{E}_i$, реализующий функцию голосования $H(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$. Действительно, если СФЭ Σ реализует ФАЛ f и $\eta(\Sigma) = \varepsilon$, то для надежности СФЭ $\Sigma^{(1)}$, показанной на Рис. 9.3.a, которая тоже реализует f, имеет место равенство

$$\eta(\Sigma^{(1)}) = \theta(\varepsilon) = 3\epsilon^2 - 2\epsilon^3$$

(график функции $\tau = \theta(\varepsilon)$ показан на Рис. 9.3.b).

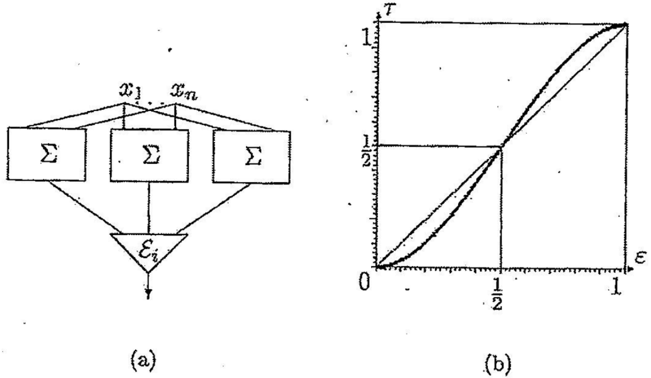


Рис.: 9.3

Заметим, что $\theta(0) = 0$, $\theta(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, что первые две производные функции $\theta(\varepsilon)$ на отрезке $[0; \frac{1}{2}]$ неотрицательны, причём $\theta''(0) = \theta''(\frac{1}{2}) = 0$ и $\theta'(\frac{1}{2}) > 0$, $\theta'(0) > 0$, и что $\theta(\varepsilon) < \varepsilon$, если $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Поэтому, рекурсивно применяя указанную процедуру повышения надёжности к СФЭ $\Sigma^{(k)}$, результатом которой является СФЭ $\Sigma^{(k+1)}$, $k = 1, 2, \ldots$, построим последовательность СФЭ $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}, \ldots, \Sigma^{(k)}, \ldots$, реализующих f, для которой

$$\eta(\Sigma^{(k)}) \leqslant \theta(\eta(\Sigma^{(k-1)})) \leqslant \theta_k(\eta(\Sigma)) \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

где $\theta_0(\varepsilon) = \varepsilon$, $\theta_k(\varepsilon) = \theta(\theta_{k-1}(\varepsilon))$. Заметим, что если при этом $\varepsilon < \frac{1}{6}$, то

$$\theta_k(\varepsilon) \leqslant \frac{1}{3}(3\varepsilon)^{2^k}. \tag{9.1}$$

Заметим также, что СФЭ $\Sigma^{(k)}$ содержит 3^k подсхем вида Σ и $1 + 3 + \cdots + 3^{k-1} = \frac{3^k - 1}{2}$ ФЭ $\mathcal{E}_i$, то есть

$$\mathcal{L}(\Sigma^{(k)}) \leqslant 3^k \mathcal{L}(\Sigma) + \frac{3^k}{2} \mathcal{L}(\mathcal{E}_i) \qquad (9.2)$$

Аналогичные построения и оценки применимы и для повышения ξ-ненадёжности СФЭ.

Пусть базис Б допускает построение сколь угодно надёжных СФЭ для любой ФАЛ. Определим в этой случае для произвольной ФАЛ f и любого ε, $0 \leqslant \varepsilon < 1$, функционал сложности $\mathcal{L}_{\text{Б}}^{C}(f, \varepsilon)$, равный минимальной из сложностей тех СФЭ Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{C}$, которые реализуют ФАЛ f и для которых $\eta(\Sigma) \leqslant \varepsilon$. Затем введём соответствующую функцию Шеннона

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{C}(n, \varepsilon) = \max_{f \in P_2(n)} \mathcal{L}_{\text{Б}}^{C}(f, \varepsilon),$$

для которой (см. следствие 2 утв. 3.2) будет справедлива нижняя мощностная оценка

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{C}(n, \varepsilon) \gtrsim \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}, \tag{9.3}$$

где $\rho_{\text{Б}}$ - приведённый вес базиса Б.

Заметим, что в соответствии с высказанными ранее соображениями для любого действительного δ, $0 \leqslant \delta < \frac{1}{2}$, указанным свойством полноты обладает базис $\widehat{\text{Б}}_\delta$, состоящий из ФЭ веса 1 $\mathcal{E}_{\&}, \mathcal{E}_{\vee}, \mathcal{E}_{\neg}$ и $\mathcal{E}_H$ с базисными ФАЛ $x_1 \cdot x_2$, $x_1 \vee x_2$, $\bar{x}_1$ и $H(x_1, x_2, x_3)$ соответственно, для которого $\eta(\mathcal{E}_H) = 0$ и $\eta(\mathcal{E}_{\&}) = \eta(\mathcal{E}_{\vee}) = \eta(\mathcal{E}_{\neg}) = \delta$. Так как при этом $\rho_{\widehat{\text{Б}}_\delta} = \frac{1}{2}$, то в силу (9.3)

$$\mathcal{L}^{C}_{\widehat{\text{Б}}_\delta}(n, \varepsilon) \gtrsim \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{n}. \tag{9.4}$$

Утверждение 9.1

Для любого δ, $0 \leqslant \delta < \frac{1}{2}$ и $n = 1, 2, \ldots$ существует стремящаяся к нулю неотрицательная последовательность $\varepsilon = \varepsilon(n)$ такая, что

$$\mathcal{L}^{C}_{\widehat{\text{Б}}_\delta}(n, \varepsilon(n)) \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{n}.$$

Доказательство.

Требуемая нижняя асимптотическая оценка теоремы вытекает из (9.4).

Для получения необходимой верхней асимптотической оценки теоремы возьмём произвольную ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, и построим такую реализующую её СФЭ $\tilde{\Sigma}_f$, сложность которой асимптотически не больше, чем $\frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{n}$, а η-ненадёжность не превосходит $\varepsilon(n)$.

Для этого в соответствии с асимптотически наилучшим методом синтеза СФЭ в произвольном базисе Б (см. утв. 5.1) выберем для базиса $\text{Б} = \widehat{\text{Б}}_\delta$ натуральные параметры m, s, t и p, причем s —четное, такие, что (см. (5.3) и (5.4))

$$m < n, \quad s \leqslant 2^m, \quad p = 2t + 1, \quad \frac{2^m}{s} \leqslant p < \frac{2^m}{s} + 2, \tag{9.5}$$

а в качестве элемента $\mathcal{E}_j$ будем использовать элемент $\mathcal{E}_H$.

Построим по утв. 5.1 СФЭ Σ_f, реализующую ФАЛ f, так, чтобы в соответствии с неравенством (5.9) число элементов $\mathcal{E}_H$ в Σ_f, то есть $L_{\mathcal{E}_H}(\Sigma_f)$, и число элементов базиса Б_0 в Σ_f, то есть $L_{\text{Б}_0}(\Sigma_f)$, удовлетворяли неравенствам

$$L_H(\Sigma_f) \leqslant t \cdot 2^{n-m} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{2^m}{s}+1\right) \cdot 2^{n-m} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{s} + 2^{n-m-1}, \qquad (9.6)$$

$$L_{\text{Б}_0}(\Sigma_f) \leqslant O\left(2^{n-m} + \left(\frac{2^m}{s}+2\right)\left(2^{m+\frac{s}{2}} + 2^s\right)\right) \qquad (9.7)$$

Будем повышать надёжность СФЭ Σ_f с помощью абсолютно надёжного ФЭ $\mathcal{E}_H$ и тех приёмов, которые описаны в начале данного вопроса.

Найдём натуральное k, для которого $\theta_k(\delta) = \hat{\delta} < \frac{1}{6}$, и построим СФЭ $\widehat{\Sigma}_f$ заменой каждого ФЭ $\mathcal{E}_\varphi$, $\varphi \in Б_0$, в СФЭ Σ_f макроэлементом $\widehat{\mathcal{E}}_\varphi = \mathcal{E}_\varphi^{(k)}$.

Пусть l — натуральный параметр, а СФЭ $\widetilde{\Sigma}_f$ получается из СФЭ $\widehat{\Sigma}_f$ заменой каждого её макроэлемента $\widehat{\mathcal{E}}_\varphi$, $\varphi \in Б_0$, схемой $\widehat{\mathcal{E}}_\varphi^{(l)}$.

Схема $\widetilde{\Sigma}_f$ реализует, очевидно, ФАЛ f, а из неравенств (9.6), (9.7) и $\hat{\delta} < \frac{1}{6}$ с учётом приведённых в начале данного вопроса соотношений, касающихся повышения надёжности, следует, что

$$\mathcal{L}(\widetilde{\Sigma}_f) \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{s} + O\left(3^l \left(2^{n-m} + \frac{2^{m+s}}{s} + \frac{2^{2m+\frac{s}{2}}}{s}\right)\right), \tag{9.8}$$

$$\eta(\widetilde{\Sigma}_f) = O\left(3^l \left(2^{n-m} + \frac{2^{m+s}}{s} + \frac{2^{2m+\frac{s}{2}}}{s}\right) \cdot 2^{-2^l}\right). \tag{9.9}$$

Из полученных оценок следует, что при достаточно больших значениях n и

$$l = \lceil \log n \rceil, \quad m = 2l + \lceil 2 \log n \rceil, \quad s = \lceil n - 2m - l \cdot \log 3 \rceil \tag{9.10}$$

условия (9.5) будут выполнены, а построенная СФЭ $\widetilde{\Sigma}_f$ в силу (9.8), (9.9) будет удовлетворять требуемым соотношениям

$$\mathcal{L}(\widetilde{\Sigma}_f) \lesssim \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{n}, \quad \eta(\widetilde{\Sigma}_f) = o(1).$$

Утверждение доказано. $\square$

10. Самокорректирующиеся СФЭ в базисах из ненадёжных элементов $\{\&, \vee, \neg\}$ и абсолютно надёжного элемента голосования, асимптотически наилучшие методы их синтеза

Пусть базис Б $= \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{b}$, где ФЭ $\mathcal{E}_i$, $i = 1, \ldots, b$, имеет вес $\mathcal{L}_i$ и реализует ФАЛ $\varphi_i(x_1, \ldots, x_{k_i})$ с η-ненадёжностью η_i, $0 \leqslant \eta_i < \frac{1}{2}$. При этом ФЭ $\mathcal{E}_i$, $i \in [1, b]$, в соответствии с вопросом 9 считается (*абсолютно*) *надежным*, если $\eta_i = 0$ и *ненадёжным* в противном случае. Предполагается, что ненадёжный ФЭ $\mathcal{E}_i$ при выходе из строя может переходить в любое из $2^{2^{k_i}}$ неисправных состояний, в которых реализуется все различные ФАЛ от его входных БП.

Будем говорить, что СФЭ Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{C}$, *корректирует* d *ошибок*, если она не изменяет своё функционирование при выходе из строя любых не более, чем d, ненадёжных элементов.

Заметим, что если в базисе Б возможна (см. вопрос 9) сколь угодно надёжная реализация произвольной ФАЛ, то для любого натурального d и любой ФАЛ в нём возможно построение СФЭ, которая реализует эту ФАЛ и корректирует d ошибок.

В указанном случае для произвольной ФАЛ f и натурального d определим функционал сложности $\mathcal{L}_{\text{Б}}^{C}(f, d)$, равный минимальной сложности тех СФЭ Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{C}$, которые реализуют ФАЛ f и корректируют d ошибок. Затем введём соответствующую функцию Шеннона

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{C}(n, d) = \max_{f \in P_2(n)} \mathcal{L}_{\text{Б}}^{C}(f, d),$$

для которой согласно следствие 2 утв. 3.2 будет справедлива нижняя мощностная оценка

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{C}(n, d) \gtrsim \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}. \tag{10.1}$$

Будем рассматривать далее базис $\widehat{\text{Б}}_0$, состоящий из ФЭ $\mathcal{E}_{\&}$, $\mathcal{E}_{\vee}$, $\mathcal{E}_{\neg}$ и $\mathcal{E}_H$ веса 1, из которых абсолютно надёжным является только ФЭ $\mathcal{E}_H$, а также базис $\check{\text{Б}}_0$, который отличается от $\widehat{\text{Б}}_0$ лишь тем, что «вес» $\mathcal{L}_H$ ФЭ $\mathcal{E}_H$ в нём больше двух.

Поскольку в каждом из базисов возможна сколь угодно надёжная реализация произвольной ФАЛ (см. вопрос 9), то для них определены введённые выше фукнционалы сложности и функции Шеннона, которые в силу (10.1) удовлетворяют асимптотическим оценкам

$$\mathcal{L}^{C}_{\widehat{\text{Б}}_{\mathbf{0}}}(n,d) \gtrsim \frac{1}{2}\cdot\frac{2^n}{n}, \qquad \mathcal{L}^{C}_{\check{\text{Б}}_{\mathbf{0}}}(n,d) \gtrsim \frac{2^n}{n}, \tag{10.2}$$

так как $\rho_{\widehat{\text{Б}}} = \frac{1}{2}$, $\rho_{\check{\text{Б}}} = 1$.

Для построения самокорректирующихся СФЭ в базисах $\widehat{\text{Б}}_0$, $\check{\text{Б}}_0$ воспользуемся конструкциями вопроса 9. Так, индукцией по $l = 1, 2, \ldots$ легко показать, что СФЭ $\Sigma^{(l)}$, построенная там по СФЭ Σ, корректирует $(2^l - 1)$ ошибок.

Утверждение 10.1

Для $n = 1, 2, \ldots$ и любой натуральной последовательности $d = d(n)$, такой что $\log d(n) = o(n)$, справедливо асимптотическое равенство

$$\mathcal{L}^{C}_{\widehat{\text{Б}}_0}(n, d(n)) \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{n}.$$

Доказательство. Требуемая нижняя асимптотическая оценка функции Шеннона $\mathcal{L}^{C}_{\widehat{\text{Б}}_0}(n, d)$ вытекает из (10.2).

Для получения необходимой верхней асимптотической оценки функции Шеннона возьмём произвольную ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, и построим такую реализующую её СФЭ $\widetilde{\Sigma}_f$, которая корректирует d ошибок и имеет сложность асимптотически не превосходящую $\frac{2^{n-1}}{n}$.

Покажем, что в качестве искомой СФЭ можно взять СФЭ $\widetilde{\Sigma}_f$, построенную при доказательстве утв. 9.1, если считать, что $k = 0$ и $l = \lceil \log (d + 1) \rceil$, а остальные параметры конструкции выбраны согласно (9.10). Действительно, полученная таким образом СФЭ $\widetilde{\Sigma}_f$ состоит из абсолютно надёжных ФЭ $\mathcal{E}_H$ и макроэлементов вида $\mathcal{E}_{\varphi}^{(l)}$, $\varphi \in Б_0$, каждый из которых корректирует $2^l - 1 \geqslant d$ ошибок. При этом сложность СФЭ $\widetilde{\Sigma}_f$ в силу (9.8) будет асимптотически не больше, чем $\frac{2^{n-1}}{n}$.

Утверждение доказано. $\square$

Напомним, что (см., например, [3]) *шаром* радиуса r с центром в точке α, $\alpha \in B^n$, называется множество всех наборов $\beta, \beta \in B^n$, длины n, расстояние от которых до α не превосходит r. Обозначим через $S_r(n)$ число точек (наборов длины n) в шаре радиуса r. Точки шара радиуса r - это его центр, множество наборов, отличающихся от центра в одной координате, - их C_n^1, множество наборов, отличающихся от центра в двух координатах, - их C_n^2, и т.д. Следовательно,

$$S_r(n) = C_n^0 + \cdots + C_n^r.$$

Определим функцию $M_r(n)$ как максимальное число попарно не пересекающихся шаров радиуса r, укладывающихся в B^n. Справедливо следующее утверждение, доказанное в курсе ДМ.

Утверждение 10.2

Для любых натуральных n и r, где $r \leqslant n$, справедливо неравенство

$$M_r(n) \leqslant 2^n / S_{2r}(n).$$

Доказательство. Будем последовательно размещать непересекающиеся шары радиуса r в кубе B^n. Выберем в качестве центра первого шара произвольный набор α_1 куба B^n. Для выбора набора α_2 в качестве центра второго шара нельзя использовать точки, находящиеся от α_1 на расстоянии меньше, чем $2r+1$, так как иначе первый и второй шары будут пересекаться. Пусть уже выбраны наборы $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, тогда для выбора α_{k+1} число «запрещенных» точек не больше, чем $k \cdot S_{2r}(n)$, то есть, если $k \cdot S_{2r}(n) < 2^n$, то можно выбрать α_{k+1}.

Пусть таким образом выбрано m наборов $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, а выбор набора α_{m+1} в качестве центра очередного шара невозможен. Это означает, что
$m \cdot S_{2r}(n) \geqslant 2^n$, то есть

$$M_r(n) \geqslant m \geqslant \frac{2^n}{S_{2r}(n)}.$$

Утверждение доказано. □

Утверждение 10.3

Для $n = 1, 2, \ldots$ и любой натуральной последовательности $d = d(n)$, такой что $d(n) = o(n/\log n)$, справедливо асимптотическое равенство

$$\mathcal{L}^{C}_{\check{Б}_0}(n, d(n)) \sim \frac{2^n}{n}.$$

Доказательство. Требуемая нижняя асимптотическая оценка функции Шеннона $\mathcal{L}^{C}_{\check{Б}_0}(n, d)$ вытекает из (10.2).

Для получения необходимой верхней асимптотической оценки данной функции Шеннона возьмём произвольную ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, и построим такую реализующую её СФЭ Σ_f, которая корректирует d ошибок и имеет сложность, асимптотически не превосходящую $\frac{2^n}{n}$.
Выберем натуральные параматеры m, N и R такие, что

$$m < n, N = 2^m, R = N + 2d \cdot (m+1) \leqslant 2^{m+1}, \qquad (10.3)$$

для которых

$$2^N = 2^N \cdot \frac{2^{2d(m+1)}}{(2^{m+1})^{2d}} \leqslant \frac{2^R}{R^{2d}} \leqslant \frac{2^R}{C_R^0 + \cdots + C_R^{2d}} \leqslant \frac{2^R}{C_R^0 + \cdots + C_R^{2d}},$$

то есть с учётом утв. 10.2

$$2^N \leqslant M_d(R). \qquad (10.4)$$

Из (10.4) следует, что существует такое инъективное отображение ψ, которое переводит наборы куба B^N в центры непересекающихся шаров радиуса d куба B^R. На его основе определим отображение ψ^{-1}, переводящее произвольный набор β, $\beta \in B^R$, в такой набор α, $\alpha \in B^N$, для которого набор $\psi(\alpha)$ является ближайшим к β центром одного из указанных шаров. Заметим, что при этом $\psi^{-1}(\gamma) = \alpha$ для любого набора γ, принадлежащего шару с центром $\psi(\alpha)$.

Положим, как обычно, $x' = (x_1, \ldots, x_m)$, $x'' = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$ и представим ФАЛ f в виде

$$f(x', x'') = \bigvee_{\sigma' = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)} K_{\sigma'}(x') \cdot f_{\sigma'}(x''), \tag{10.5}$$

где $K_{\sigma'}(x') = x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{\sigma_m}$ и $f_{\sigma'}(x'') = f(\sigma', x'')$.

Полагая, что

$$m = m(n) = o(n) \text{ и } d \leqslant 2^l - 1, \tag{10.6}$$

где l - некоторый параметр, построим СФЭ Σ_f из следующих подсхем:

1) подсхемы Σ'' над базисом $Б_0$, которая реализует систему ФАЛ $F'' = \psi(f_{\tilde{0}}(x''), \ldots, f_{\tilde{1}}(x''))$ из $P_2^R(x'')$, получена асимптотически наилучшим методом (см., например, утв. 5.1 и неравенство (5.1)) и для которой

$$\mathcal{L}(\Sigma'') \lesssim R\frac{2^{n-m}}{n}; \tag{10.7}$$

2) подсхемы Σ_ψ над базисом $Б_0^{(l)}$ из макроэлементов $\mathcal{E}_\&^{(l)}$, $\mathcal{E}_\vee^{(l)}$, $\mathcal{E}_\neg^{(l)}$, которая реализует систему ФАЛ $\psi^{-1}(y_1, \ldots, y_R)$, получена методом Шеннона [1] и имеет сложность

$$\mathcal{L}(\Sigma_\psi) = O(2^m \cdot \frac{2^R}{R} \cdot 3^l), \tag{10.8}$$

а её входы присоединены в СФЭ Σ_f к выходам подсхемы Σ'' с теми же номерами;

3) подсхемы Σ', представляющей собой мультиплексорную СФЭ порядка m и сложности

$$\mathcal{L}(\Sigma') = O(3^l \cdot 2^m) \tag{10.9}$$

над базисом $Б_0^{(l)}$, адресными входами которой являются БП x', а её информационные входы $(u_0, \ldots, u_{2^m-1})$ присоединены к выходам подсхемы Σ_ψ с номерами $1, \ldots, 2^m$ соответственно.

Из построения СФЭ Σ_f и отмеченных выше свойств отображений ψ, ψ^{-1} следует, что она реализует ФАЛ f, корректирует, с учетом (10.6), d ошибок, а её сложность в силу (10.7)–(10.9) удовлетворяет неравенству

$$\mathcal{L}(\Sigma_f) \lesssim R \cdot \frac{2^{n-m}}{n} + O(3^l \cdot 2^m \cdot \frac{2^R}{R}).$$

Из полученной оценки следует, что при достаточно больших значениях n и

$$m = \lfloor \log n \rfloor - 1, \quad l = \lceil \log d + 1 \rceil$$

условия (10.3) и (10.6) будут выполнены, а построенная СФЭ Σ_f будет удовлетворять всем требованиям теоремы.

Утверждение доказано. $\square$

11. Сферические функции. Сложность линейной и других функций в классе контактных схем и самокорректирующихся контактных схем

Функцию f из $P_2(n)$ будем называть α–*сферической*, где $\alpha \in B^n$, если для любых наборов β и γ из B^n, отличающихся от α ровно в одном и ровно в двух разрядах соответственно, $f(\beta) = 0$ и $f(\gamma) = 1$. При этом $\tilde{0}$–сферическую ФАЛ, будем называть просто сферической. Пусть s_n^i, где $0 \leqslant i \leqslant n$, — элементарная симметрическая ФАЛ с рабочим числом i, то есть ФАЛ от БП $x_1, \ldots, x_n$, обращающаяся в 1 на всех тех наборах, которые содержат ровно i единиц. Заметим, что ФАЛ s_3^2 является сферической, а ФАЛ s_3^1 — $\tilde{1}$–сферической и что ФАЛ $\bar{l}_n$ (l_n) является α–сферической для всех наборов α из множества $B^n_{\text{чёт.}}$ $(B^n_{\text{неч.}})$, содержащего все наборы B^n с чётным (соответственно нечётным) числом единиц.

Наряду с КС из «обычных» (абсолютно надёжных) контактов будем рассматривать КС из ненадёжных контактов, которые могут выходить из строя в результате *обрыва*, когда ФАЛ проводимости контакта становится равной 0 или *замыкания*, когда эта ФАЛ становится равной 1. Будем говорить, что КС Σ *корректирует* p, $p \geqslant 0$, *обрывов и* q, $q \geqslant 0$, *замыканий, если она эквивалентна любой КС, получающейся из* Σ *в результате обрыва не более чем* p, *и замыкания не более чем* q *контактов.*

В курсе ОК рассматривались простейшие методы синтеза самокорректирующихся КС, связанные с дублированием, а также нетривиальные методы самокоррекции, основанные на коррекции одного обрыва или замыкания в однородных подсхемах.

Утверждение 11.1

Если КС Σ реализует сферическую ФАЛ f из $P_2(n)$, то в Σ встречаются замыкающие контакты всех БП $x_1, \ldots, x_n$, причём контакты всех этих типов, за исключением, быть может, двух, встречаются в ней не менее двух раз.

Доказательство.

Из сферичности ФАЛ f следует, что она существенно зависит от всех своих БП и не является антимонотонной ни по одной из них. Следовательно, в Σ имеются замыкающие контакты всех БП $x_1, \ldots, x_n$. Обозначим через a_1 и a_2 полюса КС Σ, а через E_1 (E_2) — множество тех её контактов, каждый из которых является первым (соответственно последним) замыкающим контактом для какой-либо проводящей цепи КС Σ идущей от a_1 к a_2.

Докажем, сначала, что $E_1 \cap E_2 = \varnothing$. Действительно, пусть $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$ и поэтому в КС Σ имеется контакт K вида x_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, который является первым (последним) замыкающим контактом проводящей цепи C_1 (соответственно C_2), идущей от a_1 к a_2.

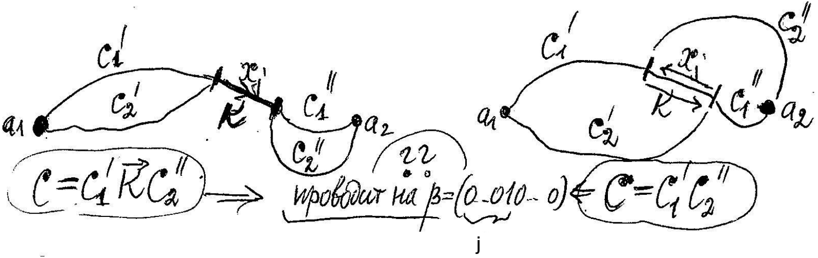


Рис.: 11.1

Для $i = 1, 2$ обозначим через C'_i и C''_i начальную (до контакта K) и заключительную (после контакта K) подцепи цепи C_i. Пусть, далее, цепь C состоит из начальной подцепи C'_1, контакта K и заключительной подцепи C''_2, если цепи C_1 и C_2 проходят контакт K в одном направлении и состоит из начальной подцепи C'_1, которая сразу переходит в заключительную подцепь C''_2 в противном случае. Заметим, что подцепи C'_1 и C''_2 по построению состоят только из размыкающих контактов, среди которых нет контактов вида $\overline{x}_j$, и поэтому цепь C будет проводить на наборе

$$\beta = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{j-1}, 1, 0, \ldots, 0),$$

что противоречит сферичности ФАЛ f.

Докажем теперь, что каждое из множеств E_s, $s = 1, 2$, содержит замыкающие контакты всех БП $x_1, \ldots, x_n$ за исключением, быть может, одной. Действительно, из сферичности ФАЛ f следует, что для любых i и j, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, в КС Σ имеется цепь C, идущая из a_1 в a_2, которая проводит на наборе

$$\gamma = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{i}, 0, \ldots 0, \underbrace{1, 0, \ldots, 0}_{n-j+1})$$

и состоит из замыкающих контактов БП x_i, x_j, а также размыкающих контактов остальных БП. Заметим, что в C не могут отсутствовать замыкающие контакты ни одной из БП x_i, x_j, так как иначе ФАЛ f обращалась бы в 1 на некотором наборе β, содержащем ровно одну 1.

Следовательно, первый из контактов вида x_i, x_j на цепи C войдёт в E_1, а последний — в E_2 и поэтому как в E_1, так и в E_2 контакты вида x_i, x_j не могут отсутствовать одновременно. Таким образом, во множестве $E_1 \cup E_2$ не могут отсутствовать замыкающие контакты трёх и более БП.

Утверждение доказано. □

Следствие 3

Если КС Σ реализует α–сферическую ФАЛ f из $P_2(n)$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, то контакты всех типов $x_1^{\overline{\alpha}_1}, \ldots, x_n^{\overline{\alpha}_n}$ встречаются в Σ по крайней мере $t = 1$ раз, причём контакты всех этих типов за исключением, быть может, двух встречаются в Σ не менее $r = 2$ раз.

Следствие 4

Если КС Σ *корректирует* p, $p \geqslant 0$, *обрывов, то в условиях следствия 3 имеем* $t \geqslant p + 1$ *и* $r \geqslant 2\left[(p+1)/2\right]$, *то есть*

$$L(\Sigma) \geqslant 2(p+1) + 2\left\lceil \frac{p+1}{2} \right\rceil (n-2).$$

Действительно, рассмотрим, для определенности, случай $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Если при этом контакт x_i встречается в Σ не более p раз, то, оборвав все эти контакты, мы получим КС, реализующую ФАЛ, которая зависит от x_i либо фиктивно, либо инмонотонно и, следовательно, не является сферической ФАЛ.

Пусть, далее, в Σ имеются три БП, например, x_1, x_2, x_3, замыкающие контакты которых встречаются в Σ меньше, чем $r = 2\left\lceil (p+1)/2 \right\rceil$ раз, но не меньше, чем $t = (p+1)$ раз. Это возможно только в том случае, когда p — четное число и, следовательно, $r = (p+2)$, а контакты вида x_i, $i = 1, 2, 3$ встречаются в Σ ровно $(p+1)$ раз. В этом случае хотя бы в одном из множеств E_1, E_2 окажется не больше, чем $p/2$, замыкающих контактов по крайней мере двух из БП x_1, x_2, x_3. Тогда, обрывая эти не более, чем p, контактов, мы устраним из данного множества 2 БП, что противоречит утверждению 11.1 в условиях самокорректируемости Σ.

Следствие 4 доказано.

Будем называть множество δ, $\delta \subseteq B^n$, *равномерным*, если для каждого i, $i \in [1, n]$, число тех наборов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ из δ, у которых $\alpha_i = 1$, равно $\frac{|\delta|}{2}$. Заметим, что каждый контакт КС $\Sigma = \Sigma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ проводит (не проводит) ровно на половине всех наборов равномерного множества δ, $\delta \subseteq B^n$, и, следовательно, в обозначениях [1] выполняются равенства[1]

$$\frac{1}{|\delta|} \sum_{\alpha \in \delta} |E(\Sigma|_{\alpha})| = \frac{1}{|\delta|} \sum_{\alpha \in \delta} |E(\Sigma|_{\overline{\alpha}})| = \frac{1}{2} L(\Sigma) \tag{11.1}$$

которые задают «среднюю» проводимость (непроводимость) контактов Σ на наборах множества δ. В качестве множества δ мы, чаще всего, будем выбирать весь единичный куб B^n, а также некоторые его подмножества и, в частности, $B^n_{\text{чет.}}$, $B^n_{\text{неч.}}$.

[1] Через $E(\Sigma|_{\alpha})$ обозначается множество контактов КС Σ, проводящих на наборе α.

Утверждение 11.2

При любом натуральном n имеют место равенства

$$L^{\mathrm{K}}(s_n^1) = L^{\mathrm{K}}(s_n^{n-1}) = 3n - 2, \tag{11.2}$$

а если $n \geqslant 2$, то

$$L^{\mathrm{K}}(l_n) = L^{\mathrm{K}}(\bar{l}_n) = 4n - 4. \tag{11.3}$$

Доказательство.

Все необходимые верхние оценки могут быть получены с помощью метода каскадов (см. курс ОК).

Пусть КС Σ реализует ФАЛ $f = s_n^{n-1}$. Из того, что ФАЛ s_n^{n-1} не является ни монотонной ни антимонотонной ни по одной из своих БП, следует что в КС Σ встречаются константы всех типов $x_1, \ldots, x_n, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$.

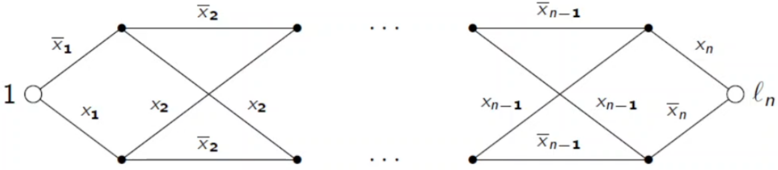


Рис.: Схема Кардо

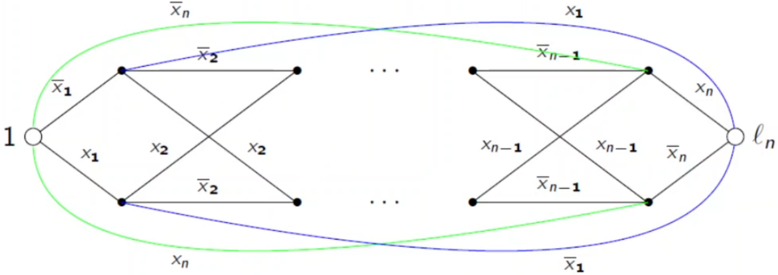


Рис.: Схема Рабиновича

Заметим, что при этом контакты всех типов $x_1, \ldots, x_n$ за исключением, быть может, двух встречаются в Σ не менее двух раз. Действительно, пусть, например, контакты типов x_1, x_2, x_3 встречаются в Σ только по одному разу. Тогда, подставив константу 1 вместо всех БП $x_4, \ldots, x_n$, мы получим КС Σ', которая реализует сферическую ФАЛ s_3^2 и содержит только по одному замыкающему контакту своих БП, что противоречит Утв. 11.1.

Следовательно,

$$L(\Sigma) \geqslant 3n - 2.$$

Случай, когда КС Σ реализует ФАЛ $f = s_n^1$, сводится к рассмотренному случаю инвертированием БП.

Таким образом, равенства (11.2) доказаны.

Пусть теперь $n \geqslant 2$ и КС Σ реализует ФАЛ $f = l_n$. Из того, что ФАЛ f является α–сферической при любом α из $B^n_{\text{неч.}}$, в силу (11.1) и следствия 3 из утв. 11.1 вытекает неравенство:

$$2^{n-2} L(\Sigma) \geqslant 2^{n-1}(2n-2),$$

из которого следует, что

$$L(\Sigma) \geqslant 4n-4.$$

Случай, когда $f = \bar{l}_n$, рассматривается аналогично.

Утверждение доказано. □

Для ФАЛ f и $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ определим «самокорректирующуюся» сложность $L^{\mathrm{K}}_{(p,q)}(f)$ как минимальную из сложностей тех КС, реализующих ФАЛ f, которые корректируют p обрывов и q замыканий.

Утверждение 11.3

При любых натуральных p и n, $n \geqslant 2$, имеют место равенства

$$L^{\mathrm{K}}_{(p,0)}(l_n) = 4(p+1) + 4\left\lceil \frac{p+1}{2} \right\rceil (n-2), \tag{11.4}$$

$$L^{\mathrm{K}}_{(1,1)}(l_n) = 8n. \tag{11.5}$$

Доказательство.

Нижняя оценка в (11.4) доказывается аналогично нижней оценке (11.3) с использованием следствия 4 утв. 11.1.

Верхнюю оценку (11.4) в случае $p = 1$ даёт схема Рабиновича из курса ОК (см. слайд 185), которая получается из КС, построенной для линейной ФАЛ по методу каскадов, добавлением 4 контактов. В общем случае при $p \geqslant 1$ искомая КС представляет собой результат параллельного соединения $\lceil (p+1)/2 \rceil$ указанных выше самокорректирующихся КС и $((p+1) - 2\lfloor (p+1)/2 \rfloor)$ КС, построенных по методу каскадов.

Верхнюю оценку в (11.5) даёт КС, которая получается в результате последовательного соединения двух упомянутых выше КС для линейной ФАЛ, корректирующих 1 обрыв.

Для доказательства нижней оценки заметим, что в силу теоремы о максимальном потоке и минимальном разрезе в КС Σ, которая реализует ФАЛ f и корректирует p обрывов, для любого набора α, $\alpha \in N_f$, существует не менее, чем $(p+1)$, не пересекающихся по контактами проводящих на наборе α цепей, соединяющих полюса Σ. Если при этом $f = I_n^\sigma$ и КС Σ корректирует q замыканий, то каждая из указанных цепей имеет длину не меньше чем $(q+1)n$, и следовательно,

$$|E(\Sigma|_\alpha)| \geqslant (p+1)(q+1)n \tag{11.6}$$

для любого набора α, $\alpha \in N_f$. Из (11.6) в силу (11.1) при $\delta = N_f$ вытекает, что

$$L^{\mathrm{K}}_{(p,q)}(I_n^\sigma) \geqslant 2(p+1)(q+1)n.$$

Утверждение доказано. □

- *Ложкин С. А.* Лекции по основам кибернетики. М.: МГУ, 2004. (Электронные версии лекций последних лет можно найти по адресу `http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_(2-й_поток,_3_курс)`).
- *Яблонский С. В.* Элементы математической кибернетики. — М.: Высшая школа, 2007.
- *Алексеев В. Б.* Лекции по дискретной математике. — М.: МГУ, 2004.