Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 25

Теорема Эрбрана
Полнота резолютивного вывода

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, февраль–май

$$
\begin{tikzcd}
\textbf{исходная формула} \; \varphi \arrow[r] & \textbf{отрицание} \; \psi = \neg\varphi \arrow[d] \\
\textbf{ССФ} \; \psi_{ssf} \arrow[d] & \textbf{ПНФ} \; \psi_{pnf} \arrow[l] \\
\textbf{система дизъюнктов} \; S_{\psi_{ssf}} \arrow[r] & \textbf{резолютивный вывод} \; \text{пустого дизъюнкта } \square \text{ из } S_{\psi_{ssf}}
\end{tikzcd}
$$

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{ssf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models S_{\psi_{ssf}}$$

$$\Leftarrow \quad \text{существует вывод } \square \text{ из } S_{\psi_{ssf}}$$

Покажем, что резолютивный вывод **полон**:
справедливо не только «$\Leftarrow$», но и «$\Rightarrow$»

Общая схема обоснования полноты

Рассмотрим невыполнимую систему дизъюнктов S

Резолютивная выводимость $\square$ из S будет обоснована так:

1. Существует конечное невыполнимое множество $\mathcal{G}$ основных примеров дизъюнктов из S (*теорема Эрбрана*)
2. Существует резолютивный вывод $\square$ из $\mathcal{G}$ (*лемма об основных дизъюнктах*)
3. Каждый шаг вывода $\square$ из $\mathcal{G}$ можно преобразовать в «аналогичный» шаг вывода из S (две *леммы о подъёме*)
4. Следовательно, весь вывод $\square$ из $\mathcal{G}$ можно преобразовать в вывод $\square$ из S (*теорема о полноте резолютивного вывода*)

Теорема Эрбрана

Система дизъюнктов невыполнима

$\Leftrightarrow$

существует конечное невыполнимое множество основных примеров дизъюнктов этой системы

Теорема Эрбрана (доказательство)

Система дизъюнктов S (*сигнатуры* σ) невыполнима

$\Leftrightarrow$ (теорема об эрбрановских интерпретациях)

S не выполняется ни в одной $\mathcal{H}$-интерпретации

$\Leftrightarrow$ (определение выполнимости и семантика квантора $\forall$)

Для каждой $\mathcal{H}$-интерпретации $\mathcal{I}$ существуют дизъюнкт $\forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \mathrm{D} \in S$
и предметы $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{H}_\sigma$, такие что $\mathcal{I} \not\models \mathrm{D}[t_1, \ldots, t_n]$

$\Leftrightarrow$ (устройство $\mathcal{H}$-интерпретаций)

Для каждой $\mathcal{H}$-интерпретации $\mathcal{I}$ существует
основной пример D' дизъюнкта $\mathrm{D} \in S$, такой что $\mathcal{I} \not\models \mathrm{D}'$

$\Leftrightarrow$ (то же другими словами)

Множество $\mathcal{G}_S$ всех основных примеров дизъюнктов из S
не выполняется ни в одной $\mathcal{H}$-интерпретации

$\Leftrightarrow$ (теорема об эрбрановских интерпретациях)

Система $\mathcal{G}_S$ невыполнима

Теорема Эрбрана (доказательство)

Вспомним теорему компактности Мальцева:
$\Gamma \models \varphi \quad \Leftrightarrow$
существует **конечное** подмножество Γ' множества Γ, такое что $\Gamma' \models \varphi$

Применив теорему к произвольной невыполнимой формуле φ, немедленно получим такое следствие:
$\not\models \Gamma \quad \Leftrightarrow$
существует конечное невыполнимое подмножество Γ' множества Γ

Приме́ним это следствие к множеству $\mathcal{G}_S$:

$\not\models S \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \not\models \mathcal{G}_S$
$\Leftrightarrow$
существует **конечное** невыполнимое подмножество $\mathcal{G}$ множества $\mathcal{G}_S$ ▼

Лемма об основных дизъюнктах

Из любой конечной невыполнимой системы основных дизъюнктов резолютивно выводи́м пустой дизъюнкт

Доказательство.

Рассмотрим произвольную конечную невыполнимую систему основных дизъюнктов S

Докажем лемму индукцией по числу $\|S\|$ различных атомов, содержащихся в дизъюнктах из S

База: $\|S\| = 0$

$$\left.\begin{array}{rr} \not\models S \quad \Rightarrow & S \neq \emptyset \\ & \|S\| = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow S = \{\square\} \Rightarrow \square \text{ резолютивно выводи́м из } S$$

Лемма об основных дизъюнктах

Доказательство.

Переход: $\not\models S$, $\|S\| = N > 0$; $S \overset{?}{\rightsquigarrow} \square$

Индуктивное предположение: $\not\models \widetilde{S}$ и $\|\widetilde{S}\| < N \quad \Rightarrow \quad \widetilde{S} \rightsquigarrow \square$

Перейдём от S к системе дизъюнктов S',
удалив все дизъюнкты вида $D \vee A \vee \neg A$

$\not\models S$, и все удаляемые дизъюнкты общезначимы,
а значит, $\not\models S'$, и достаточно предложить вывод $\square$ из S'

Перейдём от S' к системе S'' так: пока это возможно,
будем заменять дизъюнкты вида $D \vee L \vee L$ на их склейки $D \vee L$

$\not\models S'$, и дизъюнкты заменяются на равносильные выводимые
а значит, $\not\models S''$, и достаточно предложить вывод $\square$ из S''

Если $\|S''\| < N$, то обоснование завершено

Предположим теперь, что $\|S''\| = N$

Лемма об основных дизъюнктах

Доказательство.

Переход: $\not\models S''$, $\|S''\| = N > 0$,

и в S'' нет дизъюнктов вида $D \vee L \vee \neg L$ и $D \vee L \vee L$; $\quad S'' \overset{?}{\rightsquigarrow} \Box$

Индуктивное предположение: $\not\models \widetilde{S}$, $\|\widetilde{S}\| < N \quad \Rightarrow \quad \widetilde{S} \rightsquigarrow \Box$

Произвольно выберем атом A,
содержащийся хотя бы в одном дизъюнкте из S''

Разобьём S'' на три множества:

- S_+ — все дизъюнкты из S'', содержащие A без отрицания
- S_- — все дизъюнкты из S'', содержащие $\neg A$
- $S_\times$ — все остальные дизюнкты из S''

Построим все резольвенты по контрарной паре A, $\neg A$:

$$S_r = \{D_1 \vee D_2 \mid D_1 \vee A \in S_+, \; D_2 \vee \neg A \in S_-\}$$

Достаточно показать, что $\Box$ выводи́м из системы $S''' = S_r \cup S_\times$

$\|S'''\| = \|S''\| - 1 = N - 1 < N$, а значит, по предположению индукции, достаточно обосновать соотношение $\not\models S'''$

Лемма об основных дизъюнктах

Доказательство.

Переход:

$\not\models S''$: S_+ $\boxed{\ldots\ D_+ \vee A \ldots}$ S_- $\boxed{\ldots\ D_- \vee \neg A \ldots}$ $S_\times$ $\boxed{\text{дизъ. без } A}$

$\not\models?\ S'''$: S_r $\boxed{\ldots\ D_+ \vee D_-\ \ldots}$ $S_\times$ $\boxed{\text{дизъ. без } A}$

Рассмотрим произвольную $\mathcal{H}$-интерпретацию $\mathcal{I}$

По теореме об эрбрановских интерпретациях,
достаточно обосновать соотношение $\mathcal{I} \not\models S'''$

Так как система S'' невыполнима, верно $\mathcal{I} \not\models S''$

Случай 1: $\mathcal{I} \not\models S_\times$. Так как $S_\times \subseteq S'''$, верно и $\mathcal{I} \not\models S'''$

Случай 2: $\mathcal{I} \models S_\times$, $A \in \mathcal{I}$

$A \in \mathcal{I} \Rightarrow \mathcal{I} \models S_+$

$\mathcal{I} \models S_+ \cup S_\times$ и $\mathcal{I} \not\models S_+ \cup S_\times \cup S_- \Rightarrow \mathcal{I} \not\models S_-$
$\Rightarrow$ в S_- содержится дизъюнкт $D_- \vee \neg A$, такой что $\mathcal{I} \not\models D_- \vee \neg A$
$\Rightarrow \mathcal{I} \not\models D_-$

Лемма об основных дизъюнктах

Доказательство.

Переход:

$\not\models S''$: $S_+ \boxed{\dots\ D_+ \vee A\ \dots}$ $\quad S_- \boxed{\dots\ D_- \vee \neg A\ \dots}$ $\quad S_\times \boxed{\text{дизъ. без } A}$

$\mathcal{I} \not\models ?\ S'''$: $\quad S_r \boxed{\dots\ D_+ \vee D_-\ \dots}$ $\quad S_\times \boxed{\text{дизъ. без } A}$

Случай 2: $\mathcal{I} \models S_\times$, $A \in \mathcal{I}$; получено: $\mathcal{I} \not\models D_-$, $D_- \vee \neg A \in S_-$

Рассмотрим $\mathcal{H}$-интерпретацию $\mathcal{J} = \mathcal{I} \setminus \{A\}$

$\mathcal{I} \models S_\times$ и в дизъюнктах из $S_\times$ не содержится $A \Rightarrow \mathcal{J} \models S_\times$

$\not\models S'' \Rightarrow \mathcal{J} \not\models S''$

$A \notin \mathcal{J}$ и дизъюнкты из S_- имеют вид $D \vee \neg A \Rightarrow \mathcal{J} \models S_-$

$\mathcal{J} \models S_- \cup S_\times$ и $\mathcal{J} \not\models S_- \cup S_\times \cup S_+ \Rightarrow \mathcal{J} \not\models S_+ \Rightarrow$

в S_+ содержится дизъюнкт $D_+ \vee A$, такой что $\mathcal{J} \not\models D_+ \vee A \Rightarrow \mathcal{J} \not\models D_+$

$\mathcal{J} \not\models D_+$ и в D_+ не содержится атом $A \Rightarrow \mathcal{I} \not\models D_+$

$\mathcal{I} \not\models D_+$ и $\mathcal{I} \not\models D_- \Rightarrow \mathcal{I} \not\models D_+ \vee D_-$

$\mathcal{I} \not\models D_+ \vee D_-$ и $D_+ \vee D_- \in S_r \Rightarrow \mathcal{I} \not\models S_r \Rightarrow \mathcal{I} \not\models S'''$

Случай 3: $\mathcal{I} \models S_\times$, $A \notin \mathcal{I}$ — аналогичен случаю 2 ▼

Лемма о подъёме для правила резолюции

Пусть:

- D_1, D_2 — **дизъюнкты, и** $\mathrm{Var}_{D_1} \cap \mathrm{Var}_{D_2} = \emptyset$**;**
- D_1', D_2' — **основные примеры дизъюнктов** D_1, D_2 **соответственно;**
- D' — **резольвента дизъюнктов** D_1', D_2'**.**

Тогда существует резольвента D **дизъюнктов** D_1, D_2**, примером которой является** D'**.**

$$\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[dd, "\theta_1"'] \arrow[dr] & & D_2 \arrow[dd, "\theta_2"] \arrow[dl] \\
& D \arrow[dd, "\theta"] & \\
D_1' \arrow[dr] & & D_2' \arrow[dl] \\
& D' &
\end{tikzcd}$$

Лемма о подъёме ... (доказательство)

$$\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[d] & & D_2 \arrow[d] \\
D_1' \arrow[dr] & & D_2' \arrow[dl] \\
& D' &
\end{tikzcd}$$

Лемма о подъёме ... (доказательство)

$$
\begin{array}{ccccc}
D_1 & & & & D_2 \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
D_1'' \vee A & \searrow & & \swarrow & D_2'' \vee \neg A \\
& & D_1'' \vee D_2'' & &
\end{array}
$$

Выделим в D_1', D_2' контрарную пару A, $\neg A$ для резольвенты D'

Лемма о подъёме ... (доказательство)

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
D_1 \arrow[d, "\theta_1"'] & & D_2 \arrow[d, "\theta_2"] \\
D_1'' \vee A \arrow[dr] & & D_2'' \vee \neg A \arrow[dl] \\
& D_1'' \vee D_2'' &
\end{tikzcd}
$$

Выделим в D_1', D_2' контрарную пару A, $\neg A$ для резольвенты D'

Пусть, для ясности, $D_1' = D_1\theta_1$ и $D_2' = D_2\theta_2$

Лемма о подъёме ... (доказательство)

$$\begin{array}{ccccc}
D_1''' \vee B_1 & & & & D_2''' \vee \neg B_2 \\
\theta_1 \downarrow & & & & \downarrow \theta_2 \\
(D_1''' \vee B_1)\theta_1 & \longrightarrow & D_1'''\theta_1 \vee D_2'''\theta_2 & \longleftarrow & (D_2''' \vee \neg B_2)\theta_2
\end{array}$$

Выделим в D_1', D_2' контрарную пару A, $\neg A$ для резольвенты D'

Пусть, для ясности, $D_1' = D_1\theta_1$ и $D_2' = D_2\theta_2$

Выделим в D_1, D_2 литеры B_1, $\neg B_2$, породившие контрарную пару

Лемма о подъёме ... (доказательство)

$$
\begin{array}{ccccc}
D_1''' \vee B_1 & & & & D_2''' \vee \neg B_2 \\
\eta \big\downarrow & & & & \big\downarrow \eta \\
(D_1''' \vee B_1)\eta & \longrightarrow & (D_1''' \vee D_2''')\eta & \longleftarrow & (D_2''' \vee \neg B_2)\eta
\end{array}
$$

Выделим в D_1', D_2' контрарную пару A, $\neg A$ для резольвенты D'

Пусть, для ясности, $D_1' = D_1\theta_1$ и $D_2' = D_2\theta_2$

Выделим в D_1, D_2 литеры B_1, $\neg B_2$, породившие контрарную пару

Без ограничения общности положим, что $\mathrm{Dom}_{\theta_1} \cap \mathrm{Dom}_{\theta_2} = \emptyset$

Тогда для подстановки $\eta = \theta_1 \cup \theta_2$ верно $D_1' = D_1\eta$ и $D_2' = D_2\eta$

Лемма о подъёме ... (доказательство)

$$\begin{tikzcd}
D_1''' \vee B_1 \arrow[d, "\eta"'] \arrow[r] & (D_1''' \vee D_2''')\mu & D_2''' \vee \neg B_2 \arrow[l] \arrow[d, "\eta"] \\
(D_1''' \vee B_1)\eta \arrow[r] & (D_1''' \vee D_2''')\eta & (D_2''' \vee \neg B_2)\eta \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Выделим в D_1', D_2' контрарную пару A, $\neg A$ для резольвенты D'

Пусть, для ясности, $D_1' = D_1\theta_1$ и $D_2' = D_2\theta_2$

Выделим в D_1, D_2 литеры B_1, $\neg B_2$, породившие контрарную пару

Без ограничения общности положим, что $\mathrm{Dom}_{\theta_1} \cap \mathrm{Dom}_{\theta_2} = \emptyset$

Тогда для подстановки $\eta = \theta_1 \cup \theta_2$ верно $D_1' = D_1\eta$ и $D_2' = D_2\eta$

По теореме об унификации,
существует наиболее общий унификатор μ атомов B_1, B_2

Значит, $(D_1''' \vee D_2''')\mu$ — резольвента дизъюнктов D_1, D_2

Лемма о подъёме ... (доказательство)

$$\begin{tikzcd}
D_1''' \vee B_1 \arrow[r] \arrow[d, "\mu\theta"'] & (D_1''' \vee D_2''')\mu & D_2''' \vee \neg B_2 \arrow[l] \arrow[d, "\mu\theta"] \\
(D_1''' \vee B_1)\mu\theta \arrow[dr] & & (D_2''' \vee \neg B_2)\mu\theta \arrow[dl] \\
& (D_1''' \vee D_2''')\mu\theta &
\end{tikzcd}$$

Выделим в D_1', D_2' контрарную пару A, $\neg A$ для резольвенты D'

Пусть, для ясности, $D_1' = D_1\theta_1$ и $D_2' = D_2\theta_2$

Выделим в D_1, D_2 литеры B_1, $\neg B_2$, породившие контрарную пару

Без ограничения общности положим, что $\mathrm{Dom}_{\theta_1} \cap \mathrm{Dom}_{\theta_2} = \emptyset$

Тогда для подстановки $\eta = \theta_1 \cup \theta_2$ верно $D_1' = D_1\eta$ и $D_2' = D_2\eta$

По теореме об унификации,
существует наиболее общий унификатор μ атомов B_1, B_2

Значит, $(D_1''' \vee D_2''')\mu$ — резольвента дизъюнктов D_1, D_2

По определению наиболее общего унификатора,
существует подстановка θ, такая что $\eta = \mu\theta$

Лемма о подъёме … (доказательство)

$$\begin{tikzcd}
D_1''' \vee B_1 \arrow[r] \arrow[d, "\mu\theta"'] & (D_1''' \vee D_2''')\mu \arrow[dd, "\theta"] & D_2''' \vee \neg B_2 \arrow[l] \arrow[d, "\mu\theta"] \\
(D_1''' \vee B_1)\mu\theta \arrow[dr] & & (D_2''' \vee \neg B_2)\mu\theta \arrow[dl] \\
& (D_1''' \vee D_2''')\mu\theta &
\end{tikzcd}$$

Выделим в D_1', D_2' контрарную пару A, $\neg A$ для резольвенты D'

Пусть, для ясности, $D_1' = D_1\theta_1$ и $D_2' = D_2\theta_2$

Выделим в D_1, D_2 литеры B_1, $\neg B_2$, породившие контрарную пару

Без ограничения общности положим, что $\mathrm{Dom}_{\theta_1} \cap \mathrm{Dom}_{\theta_2} = \emptyset$

Тогда для подстановки $\eta = \theta_1 \cup \theta_2$ верно $D_1' = D_1\eta$ и $D_2' = D_2\eta$

По теореме об унификации,
существует наиболее общий унификатор μ атомов B_1, B_2

Значит, $(D_1''' \vee D_2''')\mu$ — резольвента дизъюнктов D_1, D_2

По определению наиболее общего унификатора,
существует подстановка θ, такая что $\eta = \mu\theta$, и $D' = D\theta$ ▼

Лемма о подъёме для правила склейки

Пусть:

- D_1, D_1' — **дизъюнкт и его основной пример;**
- D' — **склейка дизъюнкта** D_1'.

Тогда существует склейка D **дизъюнкта** D_1**,**
примером которой является D'**.**

$$
\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[dd, "\theta_1"'] \arrow[dr] & \\
& D \arrow[dd, "\theta"] \\
D_1' \arrow[dr] & \\
& D'
\end{tikzcd}
$$

Доказательство.

$\boxed{\text{Аналогично предыдущей лемме, в чём можете убедиться сами}}$

Теорема о полноте резолютивного вывода

Из любой невыполнимой системы дизъюнктов резолютивно выводи́м пустой дизъюнкт

Доказательство.

Рассмотрим произвольную невыполнимую систему дизъюнктов S

По теореме Эрбрана, существует конечное невыполнимое множество $\mathcal{G}$ основных примеров дизъюнктов из S

По лемме об основных дизъюнктах,
существует вывод $D'_1, \ldots, D'_n, \square$ из $\mathcal{G}$

Теорема о полноте резолютивного вывода

Из любой невыполнимой системы дизъюнктов резолютивно выводи́м пустой дизъюнкт

Доказательство. ($D'_1, \ldots, D'_n, \square$ — вывод из $\mathcal{G}$)

Рассмотрим такую последовательность дизъюнктов $\mathfrak{S} = (D_1, \ldots, D_n, \square)$:

- если D'_i — **пример** дизъюнкта D из S, то D_i — вариант D
- если D'_i — **резольвента** D'_j и D'_k ($j < i$, $k < i$), то D_i — резольвента D_j и D_k, примером которой является D'_j
- если D'_i — **склейка** D'_j ($j < i$), то D_i — склейка D_j, примером которой является D'_j
- подстановки (переименования и унификаторы) выберем так, чтобы множества Var_{D_i} попарно непересекались

Корректность задания $\mathfrak{S}$ обеспечивается леммами о подъёме

По определению резолютивного вывода, $\mathfrak{S}$ — вывод $\square$ из S ▼

Теорема о полноте резолютивного вывода

В доказательстве теоремы о полноте табличного вывода приводилась стратегия построения успешного табличного вывода:
свод правил, которых достаточно придерживаться,
чтобы получить успешный вывод для **любой** невыполнимой таблицы

В доказательстве теоремы о полноте резолютивного вывода
свод правил такого рода явно не формулировался

А как можно устроить такую стратегию для резолютивного вывода?