1 Семинирское занятие. Машины Тьюринга.

Задача 1. Докажите, что машина Минского с тремя счетчиками может моделировать одноленточную машину Тьюринга.

Задача 2. Какие из приведенных ниже множеств являются а) рекурсивными, б) рекурсивно перечислимыми, в) рекурсивно неперечислимыми:

1. множество простых чисел,
2. множество всех таких чисел n, что в дробной части числа π есть не менее n девяток, идущих подряд;
3. множество всех общезначимых формул логики предикатов;
4. множество всех выполнимых формул логики предикатов;
5. множество всех семейств пар слов, для которых Проблема соответствий Поста имеет решение;
6. $\{\mathcal{M} : |L(\mathcal{M})| \geq 99\}$,
7. $\{\mathcal{M} : |L(\mathcal{M})| \leq 99\}$,
8. $\{\mathcal{M} : L(\mathcal{M}) = \varnothing$,
9. $\{\mathcal{M} : L(\mathcal{M}) = \Sigma^*$,
10. $\{\mathcal{M} : L(\mathcal{M})$ конечно$\}$,
11. $\{\mathcal{M} : L(\mathcal{M})$ бесконечно$\}$,
12. $\{\mathcal{M} : L(\mathcal{M})$ — регулярный язык$\}$,

Задача 3. Докажите, что непустое множество слов является рекурсивным тогда и только тогда, когда оно может быть перечислено некоторой тотальной Т-вычислимой функцией в порядке лексикографического неубывания.

Задача 4. Докажите, что каждое рекурсивно-перечислимое множество слов содержит бесконечное рекурсивное подмножество.

Задача 5. Можно ли свести

1. проблему самоприменимости МТ к проблеме останова МТ на пустом слове?
2. проблему останова МТ на пустом слове к проблеме самоприменимости?
3. проблему бесконечности языка МТ к проблеме останова МТ на пустом слове?
4. проблему останова МТ на пустом слове к проблеме бесконечности языка МТ?

Задача 6. Выясните, являются ли алгоритмически разрешимыми следующие задачи: для заданной машины Тьюринга выяснить,

1. существует ли такая начальная конфигурация, при работе на которой эта машина останавливается спустя не более 99^{99} тактов;
2. существует ли такая начальная конфигурация, при работе на которой эта машина останавливается спустя более 99^{99} тактов;
3. верно ли, что эта машина останавливается спустя не более 99^{99} тактов при работе на любой начальной конфигурации;
4. верно ли, что существует не более 99^{99} различных машин Тьюринга, эквивалентных заданной;
5. верно ли, что эта машина останавливается не более, чем на 99^{99} различных начальных конфигурациях;

Задача 7. Выясните, являются ли алгоритмически разрешимыми следующие задачи: для заданной пары машин Тьюринга $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ выяснить, верно ли, что

1. $L(\mathcal{M}_1) = L(\mathcal{M}_2)$;
2. $L(\mathcal{M}_1) \cap L(\mathcal{M}_2) = \varnothing$;
3. $L(\mathcal{M}_1) \cap L(\mathcal{M}_2)$ — рекурсивное множество слов;
4. $L(\mathcal{M}_1) \cap L(\mathcal{M}_2)$ — рекурсивно перечислимое множество слов;
5. $L(\mathcal{M}_1) \cap L(\mathcal{M}_2)$ — конечное множество слов;

Задача 8. Является ли Проблема соответствий Поста алгоритмически разрешимой в случае $|\Sigma| = 1$?

Задача 9. Рассмотрим одноленточную одностороннюю машину Тьюринга, которой запрещено изменять содержимое тех ячеек ленты, на которых записано входное слово. Эта машина может делать записи только в тех ячейках ленты, которые расположены справа от входного слова. Докажите, что такая машина Тьюринга может распознавать только регулярные множества слов.