Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР:
Владимир Анатольевич Захаров

zakh@cs.msu.su

http://mk.cs.msu.ru/

Лекция 2.

Классическая логика предикатов первого порядка
Синтаксис. Термы и формулы. Семантика. Интерпретация. Выполнимость формул.

ПРЕДИКАТ

(от лат. praedicatum — высказанное)

термин, обозначающий член предложения — сказуемое.

Студент	**уныло**	**слушает**	**лектора**
Субъект	*Атрибут*	*Предикат*	*Объект*

Другое значение термина «предикат» — отношение между лицами, предметами, событиями, явлениями.

ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

изучает законы причинно-следственной зависимости между событиями, представленными в виде отношений. Для этого вводится формальный язык, выражения которого предназначены для описания отношений между произвольными предметами.

Язык логики предикатов определяется

1. **алфавитом,**
2. **синтаксисом,**
3. **семантикой.**

АЛФАВИТ

Базовые символы.

Предметные переменные	$Var = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$;
Предметные константы	$Const = \{c_1, c_2, \ldots, c_l, \ldots\}$;
Функциональные символы	$Func = \{f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \ldots, f_r^{(n_r)}, \ldots\}$;
Предикатные символы	$Pred = \{P_1^{(m_1)}, P_2^{(m_2)}, \ldots, P_s^{(m_s)}, \ldots\}$.

n_r — местность функционального символа f_r;
m_s — местность предикатного символа P_s.

Тройка $\langle Const, Pred, Func \rangle$ называется сигнатурой алфавита.

АЛФАВИТ

Базовые символы.

Предметные константы	— это имена предметов;
Функциональные символы	обозначают операции над предметами;
Предикатные символы	обозначают отношения между предметами.

Пример.

Константы	$0,\ 1,\ \pi, \ldots;$
Функциональные символы	$+,\ \times,\quad \mathrm{mod}\ , \ldots;$
Предикатные символы	$=,\ <, \ldots.$

АЛФАВИТ

Логические связки и кванторы.

Конъюнкция	(логическое И)	$\&$
Дизъюнкция	(логическое ИЛИ)	$\vee$
Отрицание	(логическое НЕ)	$\neg$
Импликация	(логическое ЕСЛИ-ТО)	$\rightarrow$
Квантор всеобщности	(«для каждого»)	$\forall$
Квантор существования	(«хотя бы один»)	$\exists$

Знаки препинания.

Разделитель	,
Скобки	( )

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Предметы, вступающие в отношения друг с другом, описываются термами.

Определение терма.

Терм — это

x	, если $x \in Var$	x — переменная;
c	, если $c \in Const$	c — константа;
$f^{(n)}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$	, если $f^{(n)} \in Func$ $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы	составной терм.

$Term$ — множество термов заданного алфавита.

Var_t — множество переменных, входящих в состав терма t.

$t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — запись обозначающая терм t, у которого $Var_t \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Если $Var_t = \emptyset$, то терм t называется основным термом .

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Примеры термов.

x_2	т. к. $x_2 \in Var$;
c_1	т. к. $c_1 \in Const$;
$f^{(2)}(x_2, c_1)$	т. к. $f^{(2)} \in Func, \quad x_2, c_1 \in Term$;
$\times(x, +(1, \exp(2, y)))$	т. к. $\times, +, \exp \in Func$, $1, 2 \in Const, \quad x, y \in Var$;
$x \times (1 + 2^y)$	инфиксная форма записи термов;
$f(c_1, g(h(c_1), c_2))$	основной терм.

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Для описания отношений между предметами используются формулы.

Определение формулы.

Формула — это

атомарная формула

$P^{(m)}(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, если $P^{(m)} \in Pred$, $\{t_1, t_2, \ldots, t_m\} \subseteq Term$;

составная формула

$(\varphi \& \psi)$, если φ, ψ — формулы;

$(\varphi \vee \psi)$

$(\varphi \to \psi)$

$(\neg \varphi)$

$(\forall x\ \varphi)$, если $x \in Var$, φ — формула.

$(\exists x\ \varphi)$

$Form$ — множество всех формул заданного алфавита.

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

$P^{(m)}(t_1, t_2, \ldots, t_m)$	«значения термов $t_1, t_2, \ldots, t_m$ находятся в отношении $P^{(m)}$»;
$(\varphi \& \psi)$	«φ и ψ»;
$(\varphi \vee \psi)$	«φ или ψ»;
$(\varphi \to \psi)$	«если φ, то ψ»;
$(\neg\varphi)$	«неверно, что φ»;
$(\forall x \varphi)$	«для любого значения x верно φ»;
$(\exists x \varphi)$	«существует такое значение x, для которого верно φ».

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Примеры формул.

$P^{(2)}(x_1, f(c, x_2))$ т. к. $P^{(2)} \in Pred$, $x_1, f(c, x_2) \in Term$;

$R^{(1)}(x_1)$ т. к. $R^{(1)} \in Pred$, $x_1 \in Term$;

$(\neg R^{(1)}(x_1))$

$(\forall x_1(\neg R^{(1)}(x_1)))$

$((\forall x_1(\neg R^{(1)}(x_1))) \to P^{(2)}(x_1, f(c, x_2)))$

$(\exists x_2((\forall x_1(\neg R^{(1)}(x_1))) \to P^{(2)}(x_1, f(c, x_2))))$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

$$(\exists\, x_2\ ((\forall x_1\ (\neg R^{(1)}(x_1))) \to P^{(2)}(x_1, f(c, x_2)))\ )$$

связанные вхождения переменной x_2

переменная, связанная квантором $\exists$

Область действия квантора $\exists$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

$$(\exists\, x_2\, ((\forall\, x_1(\neg R^{(1)}(x_1))) \to P^{(2)}(x_1, f(c, x_2))))$$

связанные вхождения переменной x_1

переменная, связанная квантором $\forall$

Область действия квантора $\forall$

свободные вхождения переменной x_1

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

$$(\exists\, x_2\ ((\forall x_1(\neg R^{(1)}(x_1))) \to P^{(2)}(x_1, f(c, x_2)))\ )$$

свободные вхождения переменной x_1

связанные вхождения переменной x_1

связанные вхождения переменной x_2

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним.

Вхождение переменной в области действия квантора, связывающего эту переменную, называется **связанным** .

Вхождение переменной в формулу, не являющееся связанным, называется **свободным** .

Переменная называется **свободной** , если она имеет свободное вхождение в формулу.

Пример .

$$\varphi \;=\; (\exists x_2\ ((\forall x_1\ (\neg R^{(1)}(x_1))) \to P^{(2)}(x_1, f(c, x_2)))\ )$$

Формула φ имеет единственную свободную переменную x_1.

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

Var_φ — множество свободных переменных формулы φ.

$$\varphi = P^{(m)}(t_1, t_2, \ldots, t_m) \qquad Var_\varphi = \bigcup_{i=1}^{m} Var_{t_i};$$

$$\begin{aligned} \varphi &= (\psi_1 \& \psi_2) \\ \varphi &= (\psi_1 \vee \psi_2) \\ \varphi &= (\psi_1 \to \psi_2) \end{aligned} \qquad Var_\varphi = Var_{\psi_1} \cup Var_{\psi_2};$$

$$\varphi = (\neg\psi) \qquad Var_\varphi = Var_\psi;$$

$$\begin{aligned} \varphi &= (\forall x\ \psi) \\ \varphi &= (\exists x\ \psi) \end{aligned} \qquad Var_\varphi = Var_\psi \setminus \{x\}.$$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — запись, обозначающая формулу φ, у которой $Var_\varphi \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Если $Var_\varphi = \emptyset$, то формула φ называется **замкнутой формулой**, или **предложением**.

$CForm$ — множество всех замкнутых формул.

Соглашение о приоритете логических операций

В порядке убывания приоритета связки и кванторы располагаются так:

$$\neg,\ \forall,\ \exists$$

$$\&$$

$$\vee$$

$$\rightarrow$$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Пример правильного восстановления скобок

$$\forall x_1\ \neg P(x_1)\ \&\ \exists x_2\ R(x_1, x_2)\ \rightarrow\ \exists x_1\ (\neg P(x_1) \vee P(x_2))$$

$$\Big(\forall x_1\ \big(\neg P(x_1)\big)\Big)\ \&\ \Big(\exists x_2\ R(x_1, x_2)\Big)\ \rightarrow\ \Big(\exists x_1\ \big(\big(\neg P(x_1)\big) \vee P(x_2)\big)\Big)$$

$$\Big((\forall x_1\ (\neg P(x_1)))\ \&\ (\exists x_2\ R(x_1, x_2))\Big)\ \rightarrow\ (\exists x_1\ ((\neg P(x_1)) \vee P(x_2)))$$

$$\Big(((\forall x_1\ (\neg P(x_1)))\ \&\ (\exists x_2\ R(x_1, x_2)))\ \rightarrow\ (\exists x_1\ ((\neg P(x_1)) \vee P(x_2)))\Big)$$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Пример формулы, выражающей математическое определение

Алфавит

Константы

0 — константа, действительное число ноль;

Функциональные символы

$h^{(2)}(x, y)$ — «абсолютная разность чисел x и y»;

Предикатные символы

$R^{(1)}(x)$ — «x — действительное число»;

$N^{(1)}(x)$ — «x — натуральное число»;

$S^{(1)}(x)$ — «x — последовательность действительных чисел»;

$E^{(3)}(x, y, z)$ — «x — это y-ый член последовательности z»;

$<^{(2)}(x, y)$ — «число x меньше числа y».

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Пример формулы, выражающей математическое определение

Формула $limit(x, y)$

«действительное число x — предел последовательности действительных чисел y».

$$limit(x, y):$$

$$R(x) \ \& \ S(y) \ \& \ \forall z \Big(R(z) \ \& \ <(0, z) \ \rightarrow$$
$$\exists u \Big(N(u) \ \& \ \forall v \Big(N(v) \ \& \ <(u, v) \ \rightarrow$$
$$\exists w \big(E(w, v, y) \ \& \ <(h(w, x), z) \big) \Big) \Big) \Big)$$

СЕМАНТИКА: ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Семантика — это свод правил, наделяющих значением (смыслом) синтаксические конструкции языка.

В языке логики предикатов значением термов являются функции, а значением формул — отношения (предикаты).

Значения термов и формул определяются на основе алгебраических систем .

Алгебраические системы, используемые в таком качестве, называются интерпретациями .

Интерпретации — это математические миры, в которых оценивается выполнимость отношений, представленных логическими формулами.

СЕМАНТИКА: ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Интерпретация сигнатуры $\langle Const, Func, Pred \rangle$ — это алгебраическая система $I = \langle D_I, \overline{Const}, \overline{Func}, \overline{Pred} \rangle$, где

- D_I — непустое множество, которое называется областью интерпретации, предметной областью, или универсумом ;
- $\overline{Const} \ : \ Const \ \rightarrow \ D_I$ — оценка констант, сопоставляющая каждой константе c элемент (предмет) $\bar{c}$ из области интерпретации;
- $\overline{Func} \ : \ Func^{(n)} \ \rightarrow \ (D_I^n \ \rightarrow \ D_I)$ — оценка функциональных символов, сопоставляющая каждому функциональному символу $f^{(n)}$ местности n всюду определенную n-местную функцию $\bar{f}^{(n)}$ на области интерпретации;
- $\overline{Pred} \ : \ Pred^{(m)} \ \rightarrow \ (D_I^m \ \rightarrow \ \{\mathbf{true}, \mathbf{false}\})$ — оценка предикатных символов, сопоставляющая каждому предикатному символу $P^{(m)}$ местности m всюду определенное m-местное отношение $\bar{P}^{(m)}$ на области интерпретации.

СЕМАНТИКА: ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Пример

Сигнатура $Const = \{c_1, c_2\}, Func = \{f^{(1)}\}, Pred = \{P^{(1)}, R^{(2)}\}$.

Интерпретация $I = \langle D_I, \overline{Const}, \overline{Func}, \overline{Pred} \rangle$:

Область интерпретации $D_I = \{d_1, d_2, d_3\}$;

Оценка констант $\mathrm{c}_1 = d_1,\ \mathrm{c}_2 = d_3$;

Оценка функциональных и предикатных символов

f(x)

x	f
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

P(x)

x	P
d_1	**true**
d_2	**false**
d_3	**true**

R(x, y)

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**true**	**true**	**false**
d_2	**true**	**false**	**true**
d_3	**false**	**true**	**true**

СЕМАНТИКА: ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Значение терма

Пусть заданы интерпретация $I = \langle D_I, \overline{Const}, \overline{Func}, \overline{Pred} \rangle$, терм $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и набор $d_1, d_2, \ldots, d_n$ элементов (предметов) из области интерпретации D_I.

Значение $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$ терма $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на наборе $d_1, d_2, \ldots, d_n$ определяется рекурсивно.

- Если $t(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$, то
$$t(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n] = d_i;$$
- Если $t(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c$, то
$$t(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n] = \bar{c};$$
- Если $t(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(t_1, \ldots, t_k)$, то
$$t(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n] = \bar{f}(t_1[d_1, d_2, \ldots, d_n], \ldots, t_k[d_1, d_2, \ldots, d_n]).$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Отношение выполнимости формул

Значение формул в интерпретации определяется при помощи отношения выполнимости $\models$.

Пусть заданы интерпретация $I = \langle D_I, \overline{Const}, \overline{Func}, \overline{Pred} \rangle$, формула $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и набор $d_1, d_2, \ldots, d_n$ элементов (предметов) из области интерпретации D_I.

Отношение выполнимости $I \models \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$ формулы φ в интерпретации I на наборе $d_1, d_2, \ldots, d_n$ определяется рекурсивно.

Запись $I \models \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$ означает, что в интерпретации I отношение, представленное формулой $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выполняется на наборе значений переменных $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Отношение выполнимости формул

- **атомарная формула**
  Если $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(t_1, \ldots, t_m)$, то

$$I \models \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\overline{\mathrm{P}}(t_1[d_1, d_2, \ldots, d_n], \ldots, t_m[d_1, d_2, \ldots, d_n]) = \textbf{true};$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Отношение выполнимости формул

- **конъюнкция**

  Если $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi_1 \& \psi_2$, то

  $$I \models \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$$

  $$\Longleftrightarrow$$

  $$\begin{cases} I \models \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n] \\ I \models \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n] \end{cases}$$

- **дизъюнкция**

  Если $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi_1 \vee \psi_2$, то

  $$I \models \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$$

  $$\Longleftrightarrow$$

  $$I \models \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$$

  или

  $$I \models \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Отношение выполнимости формул

- **импликация**

  Если $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi_1 \to \psi_2$, то

  $$I \models \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$$

  $$\Longleftrightarrow$$

  $$I \not\models \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$$

  или

  $$I \models \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$$

- **отрицание**

  Если $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \neg\psi$, то

  $$I \models \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$$

  $$\Longleftrightarrow$$

  $$I \not\models \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Отношение выполнимости формул

- **квантор всеобщности**
  Если $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \forall x_0\ \psi(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то
  $$I \models \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$$
  $$\Longleftrightarrow$$
  для **любого** элемента d_0, $d_0 \in D_I$, имеет место
  $$I \models \psi(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_0, d_1, d_2, \ldots, d_n]$$

- **квантор существования**
  Если $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \exists x_0\ \psi(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то
  $$I \models \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$$
  $$\Longleftrightarrow$$
  для **некоторого** элемента d_0, $d_0 \in D_I$, имеет место
  $$I \models \psi(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_0, d_1, d_2, \ldots, d_n]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Немного об импликации

Обратите внимание на то, что в классической логике импликация $\to$ не в полной мере отражает смысл утверждений вида «если ψ_1, то ψ_2». Об этом свидетельствуют так называемые парадоксы материальной импликации. Например, если утверждение ψ_2 истинно, то импликация позволяет считать истинным также и утверждение $\psi_1 \to \psi_2$ независимо от посылки ψ_1. А если утверждение ψ_1 ложно, то утверждение $\psi_1 \to \psi_2$ истинно независимо от следствия ψ_2.

Если у кошки четыре ноги, то у орла два крыла.

Если кошка — сороконожка, то у орла два крыла.

Если кошка — сороконожка, то орлы не летают.

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Пример

Рассмотрим интерпретации, предметная область которых состоит из квадратов и шаров черного и белого цвета, расположенных на плоскости.

Сигнатура Σ состоит из пяти предикатных символов, которые обозначают следующие свойства и отношения:

$C(x)$ — «предмет x — квадрат»;

$S(x)$ — «предмет x — шар»;

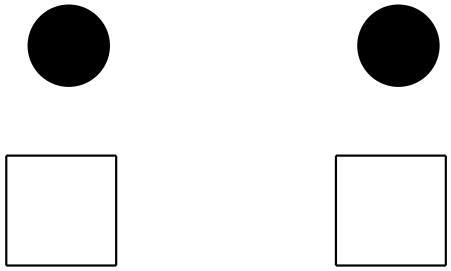
$B(x)$ — «x — черный предмет»;

$W(x)$ — «x — белый предмет»;

$U(x, y)$ — «предмет y лежит над предметом x».

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Интерпретация I:



$$\varphi = \forall x\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \rightarrow\ \exists y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \&\ U(x,y)))$$

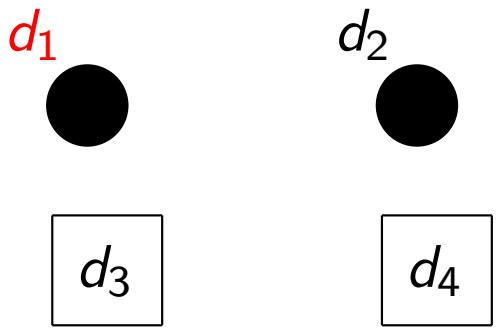
Для каждого предмета x, если x является белым и является квадратом, то существует предмет y, который является черным и является шаром и лежит над предметом x.

Каждый белый квадрат лежит под каким-то черным шаром.

Проверим выполнимость формулы φ в интерпретации I.

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Интерпретация I:



$$\varphi_1 = \forall x\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \rightarrow\ \exists y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \&\ U(x,y)))$$

Рассмотрим последовательно все предметы мира I в качестве значений связанной переменной x.

1. Если значением x является предмет d_1, то

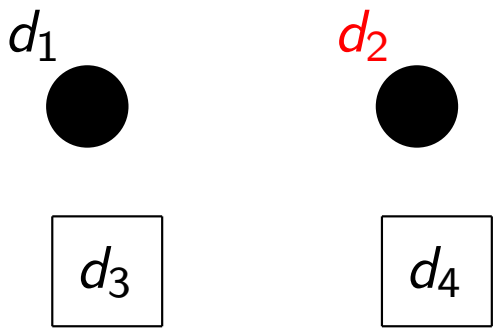
$I \not\models\ W(x)[d_1]$, (в мире I предмет d_1 не является белым)

$I \not\models\ (W(x)\ \&\ C(x))\ [d_1]$,

$I \models\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \rightarrow\ \exists y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \&\ U(x,y)))\ [d_1]$.

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Интерпретация I:



$$\varphi_1 = \forall x\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \rightarrow\ \exists y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \&\ U(x,y)))$$

2. Если значением x является предмет d_2, то

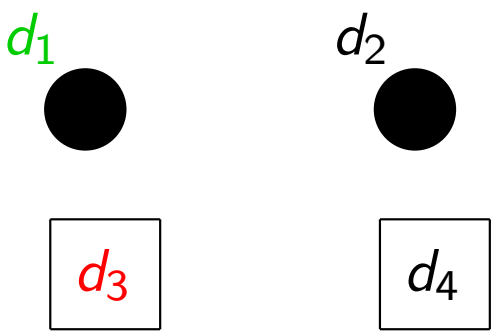
$I \not\models\ W(x)[d_2]$, (в мире I предмет d_2 не является белым)

$I \not\models\ (W(x)\ \&\ C(x))\ [d_2]$,

$I \models\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \rightarrow\ \exists y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \&\ U(x,y)))\ [d_2]$.

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Интерпретация I:



$$\varphi_1 = \forall x\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \rightarrow\ \exists y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \&\ U(x,y)))$$

3. Если значением x является предмет d_3, то

$I \models\ B(y)[d_1]$, (в мире I предмет d_1 является черным)

$I \models\ S(y)[d_1]$, (в мире I предмет d_1 является шаром)

$I \models\ U(x,y)[d_3, d_1]$, (в мире I предмет d_1 лежит над d_3)

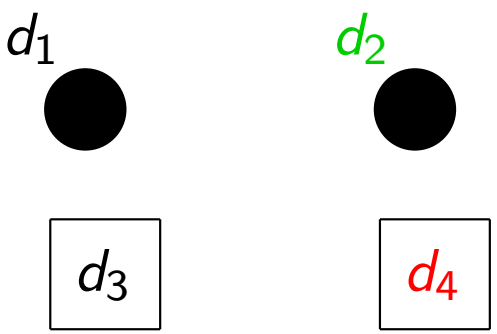
$I \models\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \&\ U(x,y))\ [d_3, d_1]$,

$I \models\ \exists y(B(y)\ \&\ S(y)\ \&\ U(x,y))\ [d_3]$,

$I \models\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \rightarrow\ \exists y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \&\ U(x,y)))\ [d_3]$.

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Интерпретация I:



$$\varphi_1 = \forall x\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \rightarrow\ \exists y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \&\ U(x,y)))$$

4. Если значением x является предмет d_4, то

$I \models\ B(y)[d_2]$, (в мире I предмет d_2 является черным)

$I \models\ S(y)[d_2]$, (в мире I предмет d_2 является шаром)

$I \models\ U(x,y)[d_4, d_2]$, (в мире I предмет d_2 лежит над d_4)

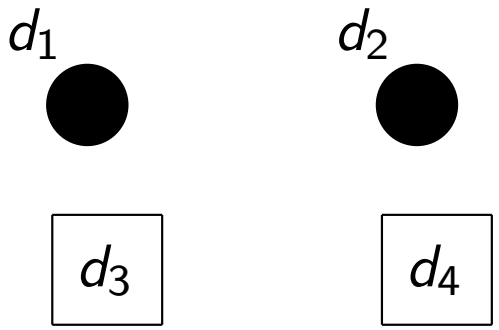
$I \models\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \&\ U(x,y))\ [d_4, d_2]$,

$I \models\ \exists y(B(y)\ \&\ S(y)\ \&\ U(x,y))\ [d_4]$,

$I \models\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \rightarrow\ \exists y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \&\ U(x,y)))\ [d_4]$.

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Интерпретация I:



$$\varphi_1 = \forall x\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \rightarrow\ \exists y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \&\ U(x,y)))$$

Итак, мы имеем:

$$I \models\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \rightarrow\ \exists y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \&\ U(x,y)))\ [d_1],$$

$$I \models\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \rightarrow\ \exists y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \&\ U(x,y)))\ [d_2],$$

$$I \models\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \rightarrow\ \exists y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \&\ U(x,y)))\ [d_3],$$

$$I \models\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \rightarrow\ \exists y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \&\ U(x,y)))\ [d_4],$$

Значит,

$$I \models\ \forall x\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \rightarrow\ \exists y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \&\ U(x,y))).$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Интерпретация

$$I = \langle D_I, \overline{Const}, \overline{Func}, \overline{Pred} \rangle$$

Область интерпретации $D_I = \{d_1, d_2, d_3\}$;

Оценка констант $c_1 = d_1,\ c_2 = d_3$;

Оценка функциональных и предикатных символов

f(x)

x	f
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

P(x)

x	P
d_1	**true**
d_2	**false**
d_3	**true**

R(x, y)

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**true**	**true**	**false**
d_2	**true**	**false**	**true**
d_3	**false**	**true**	**true**

Формула

$$\varphi = \forall x_1\ (P(x_1) \rightarrow \exists x_2 (R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2))))$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

f(x)

x	f
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

P(x)

x	P
d_1	**true**
d_2	**false**
d_3	**true**

R(x, y)

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**true**	**true**	**false**
d_2	**true**	**false**	**true**
d_3	**false**	**true**	**true**

$I \models R(x_1, x_2)[d_1, d_1]$

$I \not\models P(f(x_2))[d_1] \;\Rightarrow\; I \models \neg P(f(x_2))[d_1]$

$I \models R(x_1, x_2) \;\&\; \neg P(f(x_2))[d_1, d_1]$

$I \models \exists x_2(R(x_1, x_2) \;\&\; \neg P(f(x_2)))[d_1]$

$$I \models P(x_1) \rightarrow \exists x_2(R(x_1, x_2) \& \neg P(f(x_2)))[d_1]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

f(x)

x	f
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

P(x)

x	P
d_1	**true**
d_2	**false**
d_3	**true**

R(x, y)

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**true**	**true**	**false**
d_2	**true**	**false**	**true**
d_3	**false**	**true**	**true**

$I \not\models P(x_1)[d_2]$

$$I \models P(x_1) \to \exists x_2(R(x_1, x_2) \& \neg P(f(x_2)))[d_2]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

f(x)

x	f
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

P(x)

x	P
d_1	**true**
d_2	**false**
d_3	**true**

R(x, y)

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**true**	**true**	**false**
d_2	**true**	**false**	**true**
d_3	**false**	**true**	**true**

$I \models P(x_1)[d_3]$

$I \not\models R(x_1, x_2)[d_3, d_1] \;\Rightarrow\; I \not\models R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2))[d_3, d_1]$

$I \not\models \neg P(f(x_2))[d_2] \;\Rightarrow\; I \not\models R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2))[d_3, d_2]$

$I \not\models \neg P(f(x_2))[d_3] \;\Rightarrow\; I \not\models R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2))[d_3, d_3]$

$I \not\models \exists x_2\ (R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2)))[d_3]$

$$I \not\models P(x_1) \to \exists x_2 (R(x_1, x_2) \& \neg P(f(x_2)))[d_3]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Итак, мы имеем

$$I \models (P(x_1) \rightarrow \exists x_2(R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2))))[d_1]$$

$$I \models (P(x_1) \rightarrow \exists x_2(R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2))))[d_2]$$

$$I \not\models (P(x_1) \rightarrow \exists x_2(R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2))))[d_3]$$

Значит,

$$I \not\models \forall x_1 \ (P(x_1) \rightarrow \exists x_2(R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2))))$$

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 2.