# Лекция 6. Графы. Наследственные свойства графов. Оценка числа ребер в графах с наследственным свойством. Наибольшее число ребер в планарных графах и графах без треугольников с заданным числом вершин.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова

Лекции на сайте https://mk.cs.msu.ru

# Наследственное свойство графа

Свойство $P$ графов называется **наследственным**, если из его выполнения для графа $G$ следует его выполнение и для любого подграфа графа $G$.

# Оценка числа ребер

Обозначение: $P(n)$ — наибольшее число ребер в графах с наследственным свойством $P$, содержащих $n$ вершин.

**Теорема 1**. *Если $P$ — наследственное свойство графов, то* $P(n) \leqslant \frac{n}{n-2} \cdot P(n-1)$, $n \geqslant 3$.

**Доказательство**. Пусть $G = (V, E)$ — граф с наследственным свойством $P$, где $|V| \geqslant 3$ и $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

# Оценка числа ребер

**Доказательство**. Рассмотрим графы $G_i = G - v_i = (V_i, E_i)$: $V_i = V \setminus \{v_i\}$, $|E_i| = |E| - d_G(v_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

Графы $G_i$ — также с наследственным свойством $P$, откуда

$$|E| - d_G(v_i) = |E_i| \leqslant P(n-1)$$

для всех $i = 1, \ldots, n$. Сложим все неравенства:

$$n \cdot |E| - \sum_{i=1}^{n} d_G(v_i) \leqslant n \cdot P(n-1).$$

# Оценка числа ребер

**Доказательство**. По формуле Эйлера для степеней вершин $\sum\limits_{i=1}^{n} d_G(v_i) = 2 \cdot |E|$, поэтому

$$|E| \leqslant \frac{n}{n-2} \cdot P(n-1).$$

Неравенство выполняется для любого графа с наследственным свойством $P$, а значит, и для графа $G = (V, E)$ с $|E| = P(n)$.

$\square$

# Планарный граф

Граф $G = (V, E)$ называется **планарным**, если найдется такое его отображение на плоскость, что

1) каждой *вершине* $v \in V$ сопоставлена **точка** плоскости, причем разным вершинам — разные точки;

2) каждому *ребру* $(v, w) \in E$ сопоставлена непрерывная **кривая**, соединяющая точки, соответствующие вершинам $v$ и $w$, и не проходящая через точки, соответствующие другим вершинам;

3) кроме того, *кривые, соответствующие различным ребрам, не пересекаются* за исключением своих концов.

Такое отображение планарного графа на плоскость называется его **укладкой** на плоскости.

# Грани

Области плоскости, ограниченные ребрами и вершинами планарного графа при его укладке на плоскости, называются **гранями**, неограниченная область — **внешней гранью**.

# Формула Эйлера

**Теорема 2 (формула Эйлера для планарных графов).** *Если $G = (V, E)$ — связный планарный граф с $p$ вершинами и $q$ ребрами, то для для каждой его укладки на плоскости верно равенство $p - q + r = 2$, где $r$ — число граней в этой укладке.*

**Доказательство** проведем индукцией по $q$ при заданном $p$.

*Базис индукции*: если $q = p - 1$, то $G$ — дерево.

Каждое дерево — планарный граф с одной гранью, поэтому формула верна.

# Формула Эйлера

**Доказательство**. *Индуктивный переход*: пусть граф $G$ содержит $q \geqslant p$ ребер.

Тогда в $G$ найдется хотя бы один цикл, пусть $e$ — ребро из какого-то его цикла.

Граф $G' = G - e$ — связный и планарный с $p$ вершинами и $(q-1)$ ребрами, и его укладка на плоскости содержит $(r-1)$ граней.

Для графа $G'$ верно предположение индукции, т. е. $p - (q-1) + (r-1) = 2$, откуда $p - q + r = 2$.

$\square$

# Планарные графы

Планарность графов — наследственное свойство.

# Число ребер в планарных графах

**Теорема 3**. *Наибольшее число ребер в планарных графах (без петель и кратных ребер) с $p$, $p \geqslant 3$, вершинами равно* $3p - 6$.

**Доказательство**. Можно рассматривать связные графы.

1. *Верхняя оценка*. Пусть $G = (V, E)$ — связный планарный граф с $p$ вершинами и $q$ ребрами.

Рассмотрим укладку $G$ на плоскости, и пусть $q_i$ — число ребер при обходе границы $i$-й грани в этой укладке, $i = 1, \ldots, r$.

Тогда $\sum\limits_{i=1}^{r} q_i = 2q$, т. к. каждое ребро $e \in E$ считается два раза: либо оно разделяет две различные грани, либо оно считается дважды при обходе границы некоторой грани.

Но $q_i \geqslant 3$, поэтому $3r \leqslant 2q$, или $r \leqslant \frac{2}{3}q$.

По формуле Эйлера $r = q - p + 2$, откуда $q \leqslant 3p - 6$.

# Число ребер в планарных графах

**Доказательство**. 2. *Достижимость верхней оценки*. Покажем, что эта оценка достигается на **триангуляциях**, т. е. связных планарных графах, при укладке на плоскости каждая грань которых (включая внешнюю) ограничена циклом длины три.

Если $p = 3$, то $G_p = K_3$.

Пусть уже построен связный планарный граф $G_p$ с $p$ вершинами и $3p - 6$ ребрами, каждая грань которого ограничена треугольником. Тогда граф $G_{p+1}$ получается из графа $G_p$ добавлением новой вершины внутри какой-то грани и ребер, соединяющих эту вершину с тремя вершинами границы этой грани.

$\square$

# Число граней в планарных графах

**Следствие 3.1**. *Наибольшее число граней в укладке планарных графов (без петель и кратных ребер) с $p$, $p \geqslant 3$, вершинами равно $2p - 4$.*

# Графы без полных подграфов $K_n$

Отсутствие в графах подграфа $K_n$ — наследственное свойство.

Обозначение: $ex(p, K_n)$ — наибольшее число ребер в графах с $p$ вершинами, не содержащих подграф $K_n$.

# Число ребер в графах без треугольников

**Теорема 4**. *Наибольшее число ребер в графах (без петель и кратных ребер) без треугольников с $p$, $p \geqslant 1$, вершинами равно $\lfloor p^2/4 \rfloor$, т. е.*

$$ex(p, K_3) = \lfloor p^2/4 \rfloor.$$

**Доказательство**. 1. *Верхнюю оценку* установим индукцией по числу вершин $p$.

Сначала рассмотрим случай четного $p$.

*Базис индукции* $p = 2$ верен.

# Число ребер в графах без треугольников

**Доказательство**. *Индуктивный переход*: пусть утверждение верно для всех графов с $p = 2s$ вершинами.

Рассмотрим граф $G = (V, E)$ с $(p + 2)$ вершинами.

Выберем в графе $G$ *две смежные* вершины $w_1, w_2 \in V$ и рассмотрим граф $G' = G - \{w_1, w_2\}$.

Граф $G' = (V', E')$ не содержит треугольников и для него верно предположение индукции, т. е. $|E'| \leqslant s^2$.

Тогда

$$|E| \leqslant s^2 + (d_G(w_1) - 1) + (d_G(w_2) - 1) + 1,$$

где единица в сумме соответствует ребру $(w_1, w_2) \in E$.

# Число ребер в графах без треугольников

**Доказательство**. Граф $G$ не содержит треугольников, поэтому вершины $w_1$ и $w_2$ не могут быть одновременно смежны с какой-то вершиной $u \in V'$, а значит,

$$(d_G(w_1) - 1) + (d_G(w_2) - 1) \leqslant p.$$

Следовательно,

$$|E| \leqslant s^2 + 2s + 1 = (s+1)^2.$$

Случай нечетного $p$ доказывается аналогично.

# Число ребер в графах без треугольников

**Доказательство**. 2. *Достижимость верхней оценки*. Граф называется **двудольным**, если найдется разбиение его вершин на две непустые непересекающиеся части (доли), при котором смежны только вершины из разных долей.

Двудольный граф с долями из $m$ и $n$ вершин, в котором смежны любые две вершины из разных долей, называется **полным двудольным** графом $K_{m,n}$.

Графы без треугольников $K_{s,s}$ и $K_{s,(s+1)}$ при четном $p = 2s$ и нечетном $p = 2s + 1$ соответственно показывает достижимость верхней оценки.

$\square$

# Число ребер в графах без подграфов $K_n$

**Теорема 5 (Турана).** *При $p \geqslant 1$, $n \geqslant 3$ верно равенство*

$$ex(p, K_n) = \frac{(n-2)(p^2 - r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2},$$

*где $r$ — остаток от деления $p$ на $(n-1)$.*

# Задачи

**1**. Является ли свойство $P$ графов наследственным, если

1) $P$ — «граф связный»;
2) $P$ — «граф несвязный»;
3) $P$ — «граф без циклов»;
4) $P$ — «граф двудольный»?

Ответ обосновать.

**2**. Существует ли связный планарный граф (без петель и кратных ребер) $G = (V, E)$, в котором

1) 7 вершин и 16 ребер;
2) 8 вершин и 17 ребер;
3) 6 вершин и 9 граней;
4) 9 ребер и 6 граней?

Ответ обосновать.

# Задачи

**3**. Изобразить связный планарный граф (без петель и кратных ребер) $G = (V, E)$ с наибольшим числом ребер, в котором

1) 4 вершины;
2) 5 вершин;
3) 6 вершин;
4) 7 вершин.

**4**. Изобразить граф (без петель и кратных ребер) без треугольников $G = (V, E)$ с наибольшим числом ребер, в котором

1) 4 вершины;
2) 5 вершин;
3) 6 вершин;
4) 7 вершин.

# Задачи

**5**. Какое наименьшее число вершин может содержать связный планарный граф (без петель и краных ребер), в котором каждая грань ограничена циклом длины не менее 5, если степень каждой вершины в этом графе равна 3?
Изобразить такой граф с наименьшим числом вершин.