

Лекция 6. Наследственные свойства графов.
Экстремальные графы. Наибольшее число ребер в графах с наследственным свойством.
Наибольшее число ребер в планарных графах.
Наибольшее число ребер в графах без полного подграфа с n вершинами.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова

Лекции на сайте <https://mk.cs.msu.ru>

Наследственное свойство графа

Свойство P графов называется **наследственным**, если из его выполнения для графа G следует его выполнение и для любого подграфа графа G .

Пусть $P(n)$ обозначает наибольшее число ребер в графах с наследственным свойством P , содержащих n вершин.

Графы $G = (V, E)$ с наследственным свойством P , для которых выполняется $|E| = P(|V|)$, называются **экстремальными** (для этого наследственного свойства).

Оценка числа ребер

Теорема 1. Если P — наследственное свойство графов, то $P(n) \leq \frac{n}{n-2} \cdot P(n-1)$, $n \geq 3$.

Доказательство.

Пусть $G = (V, E)$ — граф с наследственным свойством P , $|V| \geq 3$, и $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Оценка числа ребер

Доказательство.

Рассмотрим графы $G_i = G - v_i = (V_i, E_i)$: $V_i = V \setminus \{v_i\}$,
 $|E_i| = |E| - d_G(v_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Графы G_i — также с наследственным свойством P , откуда

$$|E| - d_G(v_i) = |E_i| \leq P(n-1)$$

для всех $i = 1, \dots, n$. Сложим все неравенства:

$$n \cdot |E| - \sum_{i=1}^n d_G(v_i) \leq n \cdot P(n-1).$$

Оценка числа ребер

Доказательство.

По формуле Эйлера для степеней вершин $\sum_{i=1}^n d_G(v_i) = 2 \cdot |E|$,
поэтому

$$|E| \leq \frac{n}{n-2} \cdot P(n-1).$$

Неравенство выполняется для любого графа с наследственным свойством P , а значит, и для графа $G = (V, E)$ с $|E| = P(n)$. □

Планарный граф

Граф $G = (V, E)$ называется **планарным**, если его можно так отобразить на плоскость, что каждой *вершине* $v \in V$ соответствует *точка* плоскости, причем разным вершинам — разные точки; каждому *ребру* $(v, w) \in E$ — непрерывная *кривая*, соединяющая точки, соответствующие вершинам v, w , и не проходящая через точки, соответствующие другим вершинам; кроме того, кривые, соответствующие различным ребрам, не пересекаются за исключением своих концов.

Такое отображение планарного графа называется его **укладкой** на плоскости.

Связные области плоскости, ограниченные ребрами планарного графа при его укладке на плоскости, называются **гранями**, неограниченная область — **внешней гранью**.

Формула Эйлера

Теорема 2 (формула Эйлера для планарных графов).

Если $G = (V, E)$ — связный планарный граф с p вершинами и q ребрами, то для каждой его укладки на плоскости верно равенство $p - q + r = 2$, где r — число граней в этой укладке.

Доказательство: индукция по q при заданном p .

Базис индукции: если $q = p - 1$, то G — дерево.

Каждое дерево — планарный граф с одной гранью, поэтому формула верна.

Формула Эйлера

Доказательство.

Индуктивный переход: пусть для графа G верно $q \geq r$.

Тогда в графе G найдется хотя бы один цикл, пусть e — ребро из какого-то его цикла.

Граф $G' = G - e$ — связный и планарный с p вершинами и $(q - 1)$ ребрами, и его укладка на плоскости содержит $(r - 1)$ граней.

Для графа G' верно предположение индукции, т. е.

$p - (q - 1) + (r - 1) = 2$, откуда $p - q + r = 2$.



Число ребер в планарных графах

Теорема 3. *Наибольшее число ребер в планарном графе (без петель и кратных ребер) с p , $p \geq 3$, вершинами равно $3p - 6$.*

Доказательство. Можно рассматривать связные графы.

1. Пусть $G = (V, E)$ — связный планарный граф с p вершинами и q ребрами.

Рассмотрим укладку графа G на плоскости, и пусть q_i — число ребер, встречающихся при обходе границы i -ю грани в этой укладке, $i = 1, \dots, r$.

Тогда $\sum_{i=1}^r q_i = 2q$, т. к. каждое ребро либо разделяет две грани, а значит, считается при обходе границ этих двух граней; либо лежит в одной грани, а значит, при обходе ее границы считается два раза.

Из связности графа и $p \geq 3$ получаем $q_i \geq 3$, откуда $3r \leq 2q$, или $r \leq \frac{2}{3}q$.

По формуле Эйлера $r = q - p + 2$, поэтому $q \leq 3p - 6$.

Число ребер в планарных графах

Доказательство.

2. Построим графы, на которых достигается эта оценка. Это связные планарные графы, в которых любая грань (включая внешнюю) ограничена циклом длины три. Такие графы называются **триангуляциями**.

Если $p = 3$, то $G_p = K_3$.

Пусть уже построен связный планарный граф G_p с p вершинами и $3p - 6$ ребрами, каждая грань которого ограничена треугольником.

Тогда граф G_{p+1} получается из G_p добавлением новой вершины внутри какой-то грани и ребер, соединяющих эту вершину с тремя вершинами этой грани.



Число граней в планарных графах

Следствие 3.1. *Наибольшее число граней в укладке планарного графа (без петель и кратных ребер) с p , $p \geq 3$, вершинами равно $2p - 4$.*

Графы без полных подграфов K_n

Отсутствие в графах подграфа K_n — наследственное свойство.

Обозначение: $ex(p, K_n)$ — наибольшее число ребер в графах с p вершинами, не содержащих подграф K_n .

Число ребер в графах без треугольников

Теорема 4. *Справедливо равенство $ex(p, K_3) = \lfloor p^2/4 \rfloor$, $p \geq 1$.*

Доказательство верхней оценки: индукция по числу вершин p .

1. Сначала рассмотрим случай четного p .

Базис индукции $p = 2$ верен.

Индуктивный переход: пусть утверждение верно для всех графов с $p = 2s$ вершинами.

Рассмотрим граф $G = (V, E)$ с $(p + 2)$ вершинами.

Выберем в графе G две смежные вершины $w_1, w_2 \in V$ и рассмотрим граф $G' = G - \{w_1, w_2\}$.

Граф $G' = (V', E')$ не содержит треугольников и для него верно предположение индукции, т. е. $|E'| \leq s^2$.

Тогда

$$|E| \leq s^2 + (d_G(w_1) - 1) + (d_G(w_2) - 1) + 1,$$

где единица в сумме соответствует ребру $(w_1, w_2) \in E$.

Число ребер в графах без треугольников

Доказательство верхней оценки.

Граф G — без треугольников, поэтому вершины w_1 и w_2 не могут быть одновременно смежны с какой-то вершиной $u \in V'$, откуда $(d_G(w_1) - 1) + (d_G(w_2) - 1) \leq p$.

Следовательно,

$$|E| \leq s^2 + 2s + 1 = (s + 1)^2.$$

2. Случай нечетного p доказывается аналогично.

Число ребер в графах без треугольников

Доказательство нижней оценки.

Граф — **двудольный**, если его вершины можно разбить на две непересекающиеся части (доли) так, что смежны только вершины из разных частей.

Двудольный граф с долями из m и n вершин, в котором смежны любые две вершины из разных долей, называется **полным двудольным графом** $K_{m,n}$.

Графы без треугольников $K_{s,s}$ и $K_{s,(s+1)}$ при четном $p = 2s$ и нечетном $p = 2s + 1$ соответственно показывают достижимость верхней оценки.



Число ребер в графах без подграфов K_n

Теорема 5 (П. Туран, 1941). При $p \geq 1$, $n \geq 3$ справедливо равенство

$$ex(p, K_n) = \frac{(n-2)(p^2 - r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2},$$

где r — остаток от деления p на $(n-1)$.

Доказательство. Пусть $p = (n-1) \cdot s + r$, где $0 \leq r \leq n-2$. Доказательство верхней оценки проведем индукцией по s при заданном r .

Базис индукции: $s = 0$.

В этом случае $ex(r, K_n) = \frac{r(r-1)}{2}$, т. к. наибольшее число ребер содержит полный граф K_r .

Число ребер в графах без подграфов K_n

Доказательство верхней оценки.

Индуктивный переход: пусть утверждение верно для всех графов с $p = (n - 1)s + r$ вершинами.

Рассмотрим граф $G = (V, E)$ с $p + (n - 1) = (n - 1)(s + 1) + r$ вершинами, в котором нет подграфов K_n и содержится **наибольшее число ребер**.

Число ребер в графах без подграфов K_n

Доказательство верхней оценки.

В графе G обязательно найдется **полный подграф с $(n - 1)$ вершиной**.

Действительно, пусть это не так, т. е. для любых $(n - 1)$ вершин графа G хотя бы одно ребро с концами в этих вершинах в нем не содержится.

Тогда выберем $(n - 1)$ вершину $v_1, \dots, v_{n-1} \in V$ в графе G и если $e = (v_i, v_j) \notin E$, то добавим к графу G ребро e . Получим граф $G_0 = G + e$.

В графе G_0 отсутствуют полные подграфы K_n , но ребер больше, чем в графе G , чего не может быть.

Число ребер в графах без подграфов K_n

Доказательство верхней оценки.

Итак, в графе G найдется подграф $H = K_{n-1}$ и пусть $w_1, \dots, w_{n-1} \in V$ — его вершины.

Рассмотрим граф $G' = G - \{w_1, \dots, w_{n-1}\}$.

Граф $G' = (V', E')$ не содержит подграфов K_n и для него верно предположение индукции, т. е.

$$|E'| \leq \frac{(n-2)(p^2 - r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2}.$$

Число ребер в графах без подграфов K_n

Доказательство верхней оценки.

Получаем

$$|E| \leq \frac{(n-2)(p^2-r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2} + \\ + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} (d_G(w_i) - (n-2)),$$

где число $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ в сумме соответствует всем ребрам подграфа $H = K_{n-1}$.

Число ребер в графах без подграфов K_n

Доказательство верхней оценки.

Граф G не содержит подграфов K_n , поэтому вершины w_1, \dots, w_{n-1} не могут быть одновременно смежны с какой-то вершиной $u \in V'$, откуда

$$\sum_{i=1}^{n-1} (d_G(w_i) - (n-2)) \leq p(n-2).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |E| &\leq \frac{(n-2)(p^2-r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + p(n-2) = \\ &= \frac{(n-2)(p^2-r^2) + (n-1)^2(n-2) + 2p(n-1)(n-2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2} = \\ &= \frac{(n-2)((p+(n-1))^2-r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2}. \end{aligned}$$

Число ребер в графах без подграфов K_n

Доказательство нижней оценки.

Граф — k -**дольный**, $k \geq 2$, если его вершины можно разбить на k непересекающихся частей (долей) так, что смежны только вершины из разных частей.

Граф с долями из n_1, \dots, n_k вершин, в котором смежны любые две вершины из разных долей, называется **полным k -дольным графом** K_{n_1, \dots, n_k} .

Графы $K_{p_1, \dots, p_{n-1}}$ при $p = (n-1)s + r$, где $0 \leq r \leq n-2$,

$$p_1 = \dots = p_r = (s+1), \quad p_{r+1} = \dots = p_{n-1} = s,$$

показывают достижимость верхней оценки.

Число ребер в графах без подграфов K_n

Доказательство нижней оценки.

Действительно, подсчитаем число ребер q в графе $K_{p_1, \dots, p_{n-1}}$ при $p = (n-1)s + r$, где $0 \leq r \leq n-2$,

$p_1 = \dots = p_r = (s+1)$, $p_{r+1} = \dots = p_{n-1} = s$.

Итак,

$$q = \frac{1}{2} \cdot (p-r) \cdot \left(p-r - \frac{p-r}{n-1} \right) + r \cdot \left(p-r - \frac{p-r}{n-1} \right) + \frac{r(r-1)}{2},$$

где слагаемое $\frac{r(r-1)}{2}$ в сумме соответствует всем ребрам полного графа с r вершинами.

Получаем:

$$q = \frac{1}{2} \cdot (p+r) \cdot \frac{(p-r)(n-2)}{n-1} + \frac{r(r-1)}{2} = \frac{(n-2)(p^2 - r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2}.$$



Краткий итог лекции

1. Наибольшее число ребер в планарном графе (без петель и кратных ребер) с p ребрами равно $3p - 6$. Экстремальными планарными графами являются триангуляции.
2. Экстремальным графом с p вершинами без K_n является полный $(n - 1)$ -дольный граф $K_{(s+1), \dots, (s+1), s, \dots, s}$ при $p = (n - 1)s + r$, $0 \leq r \leq n - 2$, где в индексе графа число $(s + 1)$ встречается r раз и число s встречается $(n - 1 - r)$ раз.

Задачи

1. Построить планарный граф $G = (V, E)$ с наибольшим числом ребер, если:

- 1) $|V| = 4$;
- 2) $|V| = 5$;
- 3) $|V| = 6$;
- 4) $|V| = 7$.

2. Существует ли планарный граф $G = (V, E)$, если:

- 1) $|V| = 7, |E| = 16$;
- 2) $|V| = 8, |E| = 17$;
- 3) $|V| = 6$ и в G ровно 7 граней;
- 4) $|V| = 7$ и в G ровно 12 граней.

Задачи

3. Построить граф $G = (V, E)$ без треугольников с наибольшим числом ребер, если:

- 1) $|V| = 5$;
- 2) $|V| = 6$;
- 3) $|V| = 7$;
- 4) $|V| = 8$.

4. Построить граф $G = (V, E)$ без полного графа K_n с наибольшим числом ребер, если:

- 1) $|V| = 5, n = 3$;
- 2) $|V| = 6, n = 3$;
- 3) $|V| = 7, n = 4$;
- 4) $|V| = 8, n = 4$.

Задачи

- Доказать, что экстремальными планарными графами являются только триангуляции.
- Доказать, что экстремальными графами без K_n вершинами являются только $(n - 1)$ -дольные графы с максимальным возможным числом ребер.
- Найти наибольшее число ребер в графах с p вершинами без циклов (т. е. для наследственного свойства отсутствия циклов в графе). Описать все экстремальные графы для наследственного свойства отсутствия циклов.

Литература к лекции

1. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Либроком, 2009. С. 155–159.
2. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973. С. 152–153, 30–31.
3. Bondy J.A., Murty U.S.R. Graph theory. Springer, 2008. С. 301–302.