Лекция 3. Разложение функции алгебры логики по переменным. ДНФ, совершенная ДНФ. КНФ, совершенная КНФ. Полные системы.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте https://mk.cs.msu.ru

Подфункции

Если $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2^{(n)}$ и $\sigma \in E_2^k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, то положим

$$f_\sigma(x_{k+1}, \ldots, x_n) = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Функция f_σ называется σ-**подфункцией** функции f по k первым переменным.

При этом функции f_0 и f_1 соответственно называются 0-**подфункцией** и 1-**подфункцией** функции f по первой переменной.

Подфункции

Пример. Найдем подфункцию f_0 и подфункцию f_1 функции $f(x_1, x_2, x_3)$ по переменной x_1:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Получаем:

$$f_0(x_2, x_3) = f(0, x_2, x_3) = x_2 \cdot x_3,$$
$$f_1(x_2, x_3) = f(1, x_2, x_3) = x_2 \vee x_3.$$

Переменная или ее отрицание

Если $\sigma \in E_2$, то введем обозначение: $x^\sigma = \begin{cases} x, & \sigma = 1; \\ \bar{x}, & \sigma = 0. \end{cases}$

Отметим, что $x^\sigma = 1$ в том и только в том случае, когда $x = \sigma$.

Выражение x^σ иногда будем называть **литералом** (переменной x).

Дизъюнктивное разложение функции по переменным

Теорема 3.1. *При $n \geqslant 1$ и $1 \leqslant k \leqslant n$ каждая функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ может быть представлена в следующем виде:*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\sigma \in E_2^k} x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{\sigma_k} \cdot f(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный набор $\alpha \in E_2^n$ и подставим его в левую и правую части равенства из утверждения. Получаем:

$$f(\alpha) = \bigvee_{\sigma \in E_2^k} \alpha_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot \alpha_k^{\sigma_k} \cdot f(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n).$$

Дизъюнктивное разложение функции по переменным

Рассмотрим набор $\beta \in E_2^k$, где $\beta_i = \alpha_i$ для всех $i = 1, \ldots, k$. Набор σ пробегает все наборы из множества E_2^k, а набор β — какой-то набор из E_2^k.

1. Если $\sigma \neq \beta$, то найдется такое i, $1 \leqslant i \leqslant k$, что $\sigma_i \neq \alpha_i$. Значит, $\alpha_i^{\sigma_i} = 0$, откуда в этом случае

$$\alpha_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot \alpha_{i-1}^{\sigma_{i-1}} \cdot 0 \cdot \alpha_{i+1}^{\sigma_{i+1}} \cdot \ldots \cdot \alpha_k^{\sigma_k} \cdot f(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n) = 0.$$

2. Если $\sigma = \beta$, то для всех i, $i = 1, \ldots, k$, верно $\sigma_i = \alpha_i$, а значит, $\alpha_i^{\sigma_i} = 1$. Поэтому в этом случае

$$1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot f(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha).$$

Следовательно,

$$f(\alpha) = 0 \vee \ldots \vee 0 \vee f(\alpha) \vee 0 \vee \ldots \vee 0 = f(\alpha).$$

Дизъюнктивное разложение функции по переменным

Пример. Применим дизъюнктивное разложение функции $f(x_1, x_2, x_3)$ по переменной x_1:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Получаем:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \bar{x}_1 \cdot f(0, x_2, x_3) \vee x_1 \cdot f(1, x_2, x_3) = \\ &= \bar{x}_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) \vee x_1 \cdot (x_2 \vee x_3). \end{aligned}$$

Полиномиальное разложение функции по переменным

Теорема 3.2. *При $n \geqslant 1$ и $1 \leqslant k \leqslant n$ каждая функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ может быть представлена в следующем виде:*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigoplus_{\sigma \in E_2^k} x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{\sigma_k} \cdot f(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Доказательство повторяет доказательство предыдущего утверждения.

Полиномиальное разложение функции по переменным

Пример. Применим полиномиальное разложение функции $f(x_1, x_2, x_3)$ по переменной x_1:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Получаем:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \bar{x}_1 \cdot f(0, x_2, x_3) \oplus x_1 \cdot f(1, x_2, x_3) = \\ &= \bar{x}_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) \oplus x_1 \cdot (x_2 \vee x_3). \end{aligned}$$

Конъюнктивное разложение функции по переменным

Теорема 3.3. *При $n \geqslant 1$ и $1 \leqslant k \leqslant n$ каждая функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ может быть представлена в следующем виде:*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge_{\sigma \in E_2^k} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \ldots \vee x_k^{\bar{\sigma}_k} \vee f(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)).$$

Доказательство аналогично доказательству предыдущих утверждений.

Конъюнктивное разложение функции по переменным

Пример. Применим конъюнктивное разложение функции $f(x_1, x_2, x_3)$ по переменной x_1:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Получаем:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 \vee f(0, x_2, x_3)) \cdot (\bar{x}_1 \vee f(1, x_2, x_3)) = \\ &= (x_1 \vee (x_2 \cdot x_3)) \cdot (\bar{x}_1 \vee (x_2 \vee x_3)). \end{aligned}$$

Элементарные конъюнкции

Выражение (формула) вида

$$x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_k}^{\sigma_k},$$

где $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ — различные переменные и $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in E_2$, называется **элементарной конъюнкцией** (ЭК) **ранга** k, $k \geqslant 1$.

Элементарной конъюнкцией ранга 0 назовем константу 1.

Например, 1, x_2, $\bar{x}_1 x_3 x_4$ — элементарные конъюнкции.

Считаем, что две ЭК совпадают, если они отличаются только порядком входящих в них переменных.

Дизъюнктивные нормальные формы

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) длины l, $l \geqslant 1$, назовем дизъюнкцию l различных ЭК.

Дизъюнктивной нормальной формой длины 0 назовем константу 0.

Другими словами, ДНФ называется выражение вида

$$K_1 \vee \ldots \vee K_l,$$

где K_j — различные ЭК, $l \geqslant 1$, или константа 0.

Например, x_1x_2, $x_2 \vee x_3$, $\bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2$ — ДНФ.

Считаем, что две ДНФ совпадают, если они отличаются только порядком входящих в них ЭК.

Каждая ДНФ с переменными $x_1, \ldots, x_n$ определяет какую-то функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2^{(n)}$.

Совершенная ДНФ

Если каждая ЭК в ДНФ содержит все переменные этой ДНФ, то такая ДНФ называется **совершенной**.

Теорема 3.4 (о совершенной ДНФ). *Каждая функция* $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$, $f \neq 0$, *может быть представлена в виде совершенной ДНФ* D_f, *а именно:*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\sigma \in E_2^n : f(\sigma) = 1} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n}.$$

Совершенная ДНФ

Доказательство. Применим дизъюнктивное разложение функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ по всем n переменным:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\sigma \in E_2^n} x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n} \cdot f(\sigma).$$

Набор σ пробегает все наборы из множества E_2^n.

1. Если $f(\sigma) = 0$, то

$$x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n} \cdot 0 = 0.$$

2. Если $f(\sigma) = 1$, то

$$x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n} \cdot 1 = x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n}.$$

Следовательно,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\sigma \in E_2^n : f(\sigma) = 1} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n}.$$

Совершенная ДНФ

Пример. Найдем совершенную ДНФ функции $f(x_1, x_2, x_3)$:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Получаем:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3.$$

Элементарные дизъюнкции

Выражение (формула) вида

$$x_{i_1}^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_{i_k}^{\sigma_k},$$

где $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ — различные переменные и $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in E_2$, называется **элементарной дизъюнкцией** (ЭД) **ранга** k, $k \geqslant 1$.

Элементарной дизъюнкцией ранга 0 назовем константу 0.

Например, 0, x_2, $\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4$ — элементарные дизъюнкции.

Считаем, что две ЭД совпадают, если они отличаются только порядком входящих в них переменных.

Конъюнктивные нормальные формы

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) длины l, $l \geqslant 1$, назовем конъюнкцию l различных ЭД.

Конъюнктивной нормальной формой длины 0 назовем константу 1.

Другими словами, КНФ называется выражение вида

$$D_1 \cdot \ldots \cdot D_l,$$

где D_j — различные ЭД, $l \geqslant 1$, или константа 1.

Например, $\bar{x}_1 \vee x_2$, $x_1 \cdot \bar{x}_3$, $(\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2)$ — КНФ.

Считаем, что две КНФ совпадают, если они отличаются только порядком входящих в них ЭД.

Каждая КНФ с переменными $x_1, \ldots, x_n$ определяет какую-то функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2^{(n)}$.

Совершенная КНФ

Если каждая ЭД в КНФ содержит все переменные этой КНФ, то такая КНФ называется **совершенной**.

Теорема 3.5 (о совершенной КНФ). *Каждая функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$, $f \neq 1$, может быть представлена в виде совершенной КНФ K_f, а именно:*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge_{\sigma \in E_2^n : f(\sigma)=0} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}).$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы о совершенной ДНФ, только надо рассмотреть конъюнктивное разложение функции по всем переменным.

Совершенная КНФ

Пример. Найдем совершенную КНФ функции $f(x_1, x_2, x_3)$:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Получаем:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3).$$

Полная система

Пусть $A \subseteq P_2$. Множество A называется **полной системой**, если формулами над A можно выразить любую функцию алгебры логики.

Полнота системы $\{x \cdot y, x \vee y, \bar{x}\}$

Предложение 3.1. *Система* $A = \{x \cdot y, x \vee y, \bar{x}\}$ *является полной*.

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $f \in P_2$.

1. Если $f = 0$, то $f = \bar{x} \cdot x$.

2. Если $f \neq 0$, то представим f ее совершенной ДНФ.

$\square$

Лемма о двух системах

Покажем полноту некоторых других систем.

Для доказательства полноты нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.1. *Пусть* $A, B \subseteq P_2$. *Если* B *— полная система и каждая функция из* B *выражается формулой над множеством* A*, то* A *— также полная система*.

Лемма о двух системах

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $f \in P_2$.

Система B — полна, поэтому найдется некоторая формула F над множеством B, которая выражает функцию f.

Пусть в формуле F встречаются только функции $g_1, \ldots, g_t \in B$, т. е. $F = F[g_1, \ldots, g_t]$.

По условию утверждения каждая функция $g_i \in B$ может быть выражена некоторой формулой G_i над множеством A, $i = 1, \ldots, t$.

Тогда, подставив в формулу F вместо каждой функции g_i формулу G_i, получим формулу $F[G_1, \ldots, G_t]$ над множеством A, которая выражает функцию f.

$\square$

Некоторые полные системы

Теорема 3.6. *Следующие множества являются полными системами:*

1. $A = \{\bar{x}, x \cdot y\}$,
2. $A = \{\bar{x}, x \vee y\}$,
3. $A = \{x / y\}$,
4. $A = \{x \downarrow y\}$.

Некоторые полные системы

Доказательство. Применим лемму о двух системах.

1. Выразим все функции из полной системы $\{x \cdot y, x \vee y, \bar{x}\}$ формулами над A: $x \vee y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}$.

2. Выразим все функции из полной системы $\{x \cdot y, x \vee y, \bar{x}\}$ формулами над A: $x \cdot y = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$.

3. Выразим все функции из полной системы $\{x \cdot y, \bar{x}\}$ формулами над A: $\bar{x} = x/y$, $x \cdot y = \overline{x/y} = (x/y)/(x/y)$.

4. Выразим все функции из полной системы $\{x \vee y, \bar{x}\}$ формулами над A: $\bar{x} = x \downarrow y$, $x \vee y = \overline{x \downarrow y} = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$.

$\square$

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите теоремы 3.2, 3.3 и 3.5.

2. По аналогии с ДНФ введите полиномиальные нормальные формы (ПНФ), совершенную ПНФ и докажите теорему о представлении функции алгебры логики в виде совершенной ПНФ.

3. Докажите полноту системы $A = \{x \cdot y, x \oplus y, 1\}$.

Литература к лекции

1. Алексеев В. Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра-М, 2012.

2. Марченков С. С. Основы теории булевых функций. М.: Физматлит, 2014.

3. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001.

4. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004. С. 39–43, 52–56.