

# Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы  
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

## Блок 38

Машины Тьюринга

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

[valdus@yandex.ru](mailto:valdus@yandex.ru)

ВМК МГУ, 2025, сентябрь–декабрь

# Вступление

Хорновские логические программы — это вычислительная модель, основанная на проверке невыполнимости **систем дизъюнктов частного вида** (**хорновских дизъюнктов**) при помощи **одного частного способа построения резольютивного вывода** (**входная резольюция**)

При обсуждении **полноты операционной семантики ХЛП** было показано, что входная резольюция полна для систем хорновских дизъюнктов, но этими дизъюнктами выражаются только знания, «уложенные» в одну из двух частных строгих форм:

1.  $A$ ; утверждение, записанное как атом  $A$ , верно
2.  $A \leftarrow B_1, \dots, B_k$ ; если утверждения, записанные как атомы  $B_1, \dots, B_k$ , верны, то верно и утверждение, записанное как атом  $A$

**А не оказываются ли ХЛП слишком невыразительными из-за ограничений на форму представления знаний?**

**Какие задачи можно решить с помощью ХЛП, а какие нельзя?**

# Вступление

Есть много разных вычислительных моделей, предназначенных для работы с данными принципиально разного устройства: строками, числами, графами, типами, молекулами ДНК, запросами к ХЛП, ...

Естественно возникает потребность **сравнивать** между собой такие модели независимо от природы их данных

Естественный способ сравнения вычислительных моделей основан на том, что их данными **кодируются** неотрицательные целые числа ( $\mathbb{N}_0$ ), и сравниваются возможности вычисления функций вида  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$

**Тезис Чёрча-Тьюринга:** все (частичные) функции вида  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ , которые вычисляются алгоритмами в нестрогом понимании, — это в точности все функции, вычислимы на **машинах Тьюринга**

# Вступление

Тезис Чёрча-Тьюринга невозможно сформулировать строго и тем более обосновать, но подтверждением можно считать то, что многие модели, придумывавшиеся как формализация понятия алгоритма, оказались в точности такими же выразительными, как и машины Тьюринга:

- ▶ Нормальные алгорифмы Маркова
- ▶ Частично рекурсивные функции
- ▶ Машины Поста
- ▶ Машины Минского
- ▶  $\lambda$ -исчисление
- ▶ Системы переписывания строк (полу-Тью)
- ▶ RAM-машины
- ▶ ... ..

Такие модели, в конечном итоге описывающие возможности вычисления одного и того же класса функций, принято называть **алгоритмически полными**

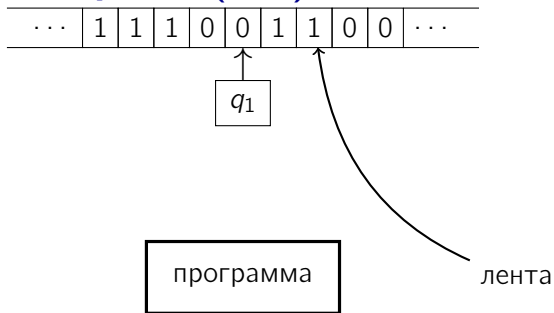
# Вступление

А является ли модель ХЛП алгоритмически полной, или же есть что-то такое, что могут вычислять полные модели, а ХЛП не могут?

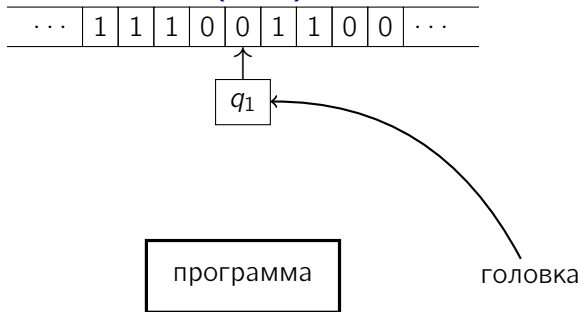
Обсуждение этого вопроса начнём с напоминания о том, что такое машина Тьюринга

Существует немало вариантов этой модели и немало способов её введения, поэтому дальнейшее можно расценивать не только как напоминание, но и как выбор варианта и системы обозначений

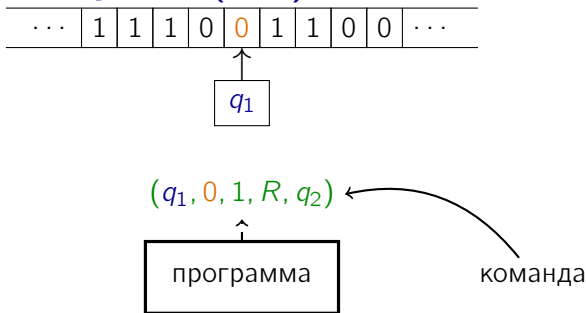
# Машины Тьюринга (МТ)



# Машины Тьюринга (МТ)



# Машины Тьюринга (МТ)

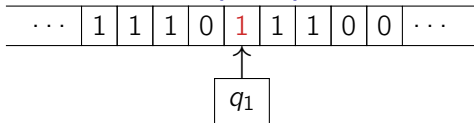


Шаг вычисления выглядит так:

- ▶ по текущему состоянию и обозреваемому символу выбираем команду



# Машины Тьюринга (МТ)



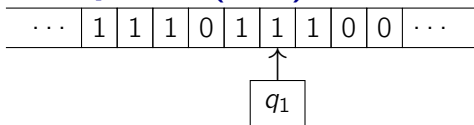
$(q_1, 0, 1, R, q_2)$

программа

Шаг вычисления выглядит так:

- ▶ по текущему состоянию и обозреваемому символу выбираем команду
- ▶ записываем в ячейку **новый символ**

# Машины Тьюринга (МТ)



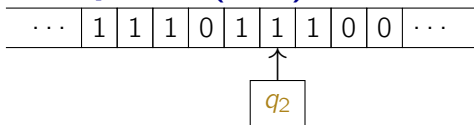
$(q_1, 0, 1, R, q_2)$

программа

Шаг вычисления выглядит так:

- ▶ по текущему состоянию и обозреваемому символу выбираем команду
- ▶ записываем в ячейку новый символ
- ▶ **сдвигаем** головку

# Машины Тьюринга (МТ)



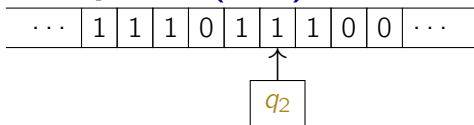
$(q_1, 0, 1, R, q_2)$

программа

Шаг вычисления выглядит так:

- ▶ по текущему состоянию и обозреваемому символу выбираем команду
- ▶ записываем в ячейку новый символ
- ▶ сдвигаем головку
- ▶ **меняем состояние**

# Машины Тьюринга (МТ)



$(q_1, 0, 1, R, q_2)$

программа

Шаг вычисления выглядит так:

- ▶ по текущему состоянию и обозреваемому символу выбираем команду
- ▶ записываем в ячейку новый символ
- ▶ сдвигаем головку
- ▶ меняем состояние

Определим всё это по порядку, детально и строго

# MT: синтаксис

Алфавит — это непустое конечное множество символов (букв)

Машина Тьюринга (MT)<sup>1</sup> — это система  $(\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \pi)$ , где

- ▶  $\mathfrak{A}$  — алфавит ленты
- ▶  $\Lambda \in \mathfrak{A}$  — пустой символ
- ▶  $\mathcal{Q}$  — алфавит состояний
- ▶  $q_0, q_f \in \mathcal{Q}$  — соответственно начальное состояние и заключительное состояние
- ▶  $\pi : (\mathcal{Q} \setminus \{q_f\}) \times \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A} \times \{L, R\} \times \mathcal{Q}$  — программа

Программа MT также будет пониматься как множество команд:

$$(q, a, b, S, p) \in \pi \Leftrightarrow \pi(q, a) = (b, S, p)$$

---

<sup>1</sup> Здесь обсуждается только один из вариантов определения машины Тьюринга, удобный для сравнения с ХЛП

# МТ: семантика

$$M = (\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \pi)$$

**Слово** в алфавите  $\Sigma$  — это конечная последовательность букв из  $\Sigma$

В записи слов принято опускать  
разделители (запятые) между символами:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad x_1 x_2 \dots x_n$$

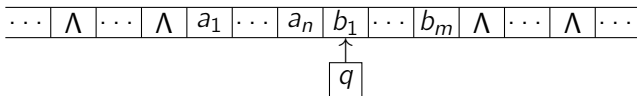
$\Sigma^*$  — множество всех слов в алфавите  $\Sigma$

$\Sigma^+$  — множество всех непустых слов в алфавите  $\Sigma$

**Ленточное слово** — это слово в алфавите  $\mathfrak{A}$

**Конфигурация** машины Тьюринга — это набор  $(\alpha, q, \beta)$ ,  
где  $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}^+$  и  $q \in \mathcal{Q}$

**Пояснение:** конфигурация  $(a_1 \dots a_n, q, b_1 \dots b_m)$  означает, что МТ  
находится в состоянии  $q$ , на ленте записано слово  $a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$ ,  
окружённое пустыми символами, и обозревается символ  $b_1$



# МТ: семантика

$$M = (\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \pi)$$

Способ преобразования конфигураций командой  $C$  можно задать как двуместное отношение  $\rightarrow_C$  на множестве конфигураций

Если  $C = (q, a, b, R, p)$ , то  $\rightarrow_C$  состоит из следующих пар:

$$\begin{aligned}(\alpha, q, ax\beta) &\rightarrow_C (\alpha b, p, x\beta) \\(\alpha, q, a) &\rightarrow_C (\alpha b, p, \Lambda)\end{aligned}$$

Если  $C = (q, a, b, L, p)$ , то  $\rightarrow_C$  состоит из следующих пар:

$$\begin{aligned}(\alpha x y, q, a\beta) &\rightarrow_C (\alpha x, p, yb\beta) \\(y, q, a\beta) &\rightarrow_C (\Lambda, p, yb\beta)\end{aligned}$$

$$(\alpha, \beta \in \mathfrak{A}^*; x, y \in \mathfrak{A})$$

Отношение переходов  $\rightarrow_M$  МТ  $M$  — это

объединение отношений  $\rightarrow_C$  по всем командам  $C$  МТ  $M$

Трасса МТ  $M$  — это последовательность конфигураций,

в которой каждая пара соседних конфигураций  $\sigma_i, \sigma_{i+1}$

входит в отношение переходов:  $\sigma_i \rightarrow_M \sigma_{i+1}$

$\rightarrow_M^*$  — это **рефлексивно-транзитивное замыкание** отношения  $\rightarrow_M$ :

$$\sigma_1 \rightarrow_M^* \sigma_2 \iff \text{существует трасса с началом } \sigma_1 \text{ и концом } \sigma_2$$

# МТ: семантика

$$M = (\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \pi)$$

Конфигурация  $(\alpha, q, \beta)$  — **заключительная**, если  $q = q_f$

**Вычисление** МТ  $M$  на ленточном слове  $w$  — это трасса,

- ▶ начинающаяся в конфигурации  $(\Lambda, q_0, w\Lambda)$  и
- ▶ либо бесконечная,  
либо оканчивающаяся в заключительной конфигурации

**Утверждение.** Для любой МТ  $M$  и любого ленточного слова  $w$  существует единственное вычисление  $M$  на  $w$

**Доказательство.**

Достаточно заметить, что в соотношении  $\sigma_i \rightarrow_M \sigma_{i+1}$

- ▶  $\sigma_i$  может быть любой незаключительной конфигурацией и не может быть заключительной, и
- ▶  $\sigma_{i+1}$  однозначно определяется конфигурацией  $\sigma_i$  ▼

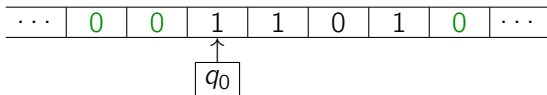


# МТ: пример

**Пример:**  $M = (\{0, 1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \pi)$ , где:

$$\begin{aligned}\pi(q_0, 0) &= (0, L, q_1) & \pi(q_1, 0) &= (0, R, q_f) \\ \pi(q_0, 1) &= (1, R, q_0) & \pi(q_1, 1) &= (0, L, q_1)\end{aligned}$$

Вычисление  $M$  на слове 1101:  
(0,  $q_0$ , 11010)



# МТ: пример

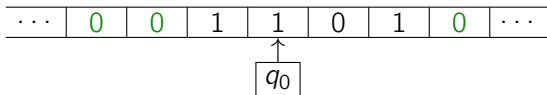
**Пример:**  $M = (\{0, 1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \pi)$ , где:

$$\pi(q_0, 0) = (0, L, q_1) \quad \pi(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$

$$\pi(q_0, 1) = (1, R, q_0) \quad \pi(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление  $M$  на слове 1101:

$$\begin{array}{l} (0, \quad q_0, \quad 11010) \\ (01, \quad q_0, \quad 1010) \end{array} \rightarrow_M$$



# МТ: пример

**Пример:**  $M = (\{0, 1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \pi)$ , где:

$$\pi(q_0, 0) = (0, L, q_1) \quad \pi(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$

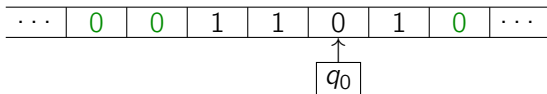
$$\pi(q_0, 1) = (1, R, q_0) \quad \pi(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление  $M$  на слове 1101:

$$(0, q_0, 11010) \rightarrow_M$$

$$(01, q_0, 1010) \rightarrow_M$$

$$(011, q_0, 010)$$



# МТ: пример

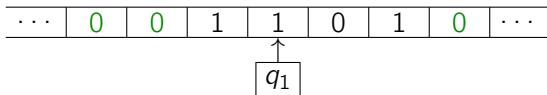
**Пример:**  $M = (\{0, 1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \pi)$ , где:

$$\pi(q_0, 0) = (0, L, q_1) \quad \pi(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$

$$\pi(q_0, 1) = (1, R, q_0) \quad \pi(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление  $M$  на слове 1101:

$$\begin{array}{lll} (0, q_0, 11010) & \rightarrow_M \\ (01, q_0, 1010) & \rightarrow_M \\ (011, q_0, 010) & \rightarrow_M \\ (01, q_1, 1010) & \end{array}$$



# МТ: пример

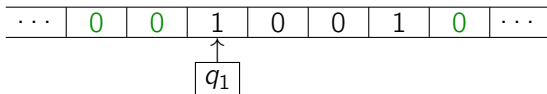
**Пример:**  $M = (\{0, 1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \pi)$ , где:

$$\pi(q_0, 0) = (0, L, q_1) \quad \pi(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$

$$\pi(q_0, 1) = (1, R, q_0) \quad \pi(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление  $M$  на слове 1101:

$$\begin{array}{lll} (0, q_0, 11010) & \rightarrow_M \\ (01, q_0, 1010) & \rightarrow_M \\ (011, q_0, 010) & \rightarrow_M \\ (01, q_1, 1010) & \rightarrow_M \\ (0, q_1, 10010) & \end{array}$$



# МТ: пример

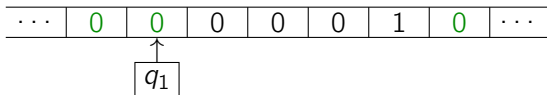
**Пример:**  $M = (\{0, 1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \pi)$ , где:

$$\pi(q_0, 0) = (0, L, q_1) \quad \pi(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$

$$\pi(q_0, 1) = (1, R, q_0) \quad \pi(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление  $M$  на слове 1101:

$$\begin{array}{lll} (0, q_0, 11010) & \rightarrow_M & \\ (01, q_0, 1010) & \rightarrow_M & \\ (011, q_0, 010) & \rightarrow_M & \\ (01, q_1, 1010) & \rightarrow_M & \\ (0, q_1, 10010) & \rightarrow_M & \\ (0, q_1, 000010) & & \end{array}$$



# МТ: пример

**Пример:**  $M = (\{0, 1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \pi)$ , где:

$$\pi(q_0, 0) = (0, L, q_1) \quad \pi(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$

$$\pi(q_0, 1) = (1, R, q_0) \quad \pi(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление  $M$  на слове 1101:

$$\begin{array}{lll} (0, q_0, 11010) & \rightarrow_M \\ (01, q_0, 1010) & \rightarrow_M \\ (011, q_0, 010) & \rightarrow_M \\ (01, q_1, 1010) & \rightarrow_M \\ (0, q_1, 10010) & \rightarrow_M \\ (0, q_1, 000010) & \rightarrow_M \\ (00, q_f, 00010) & \end{array}$$

