

Математическая логика

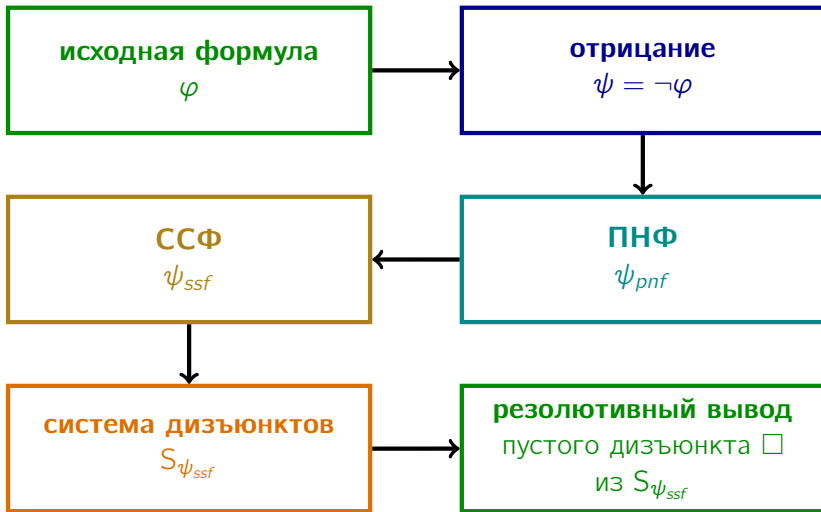
mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 22

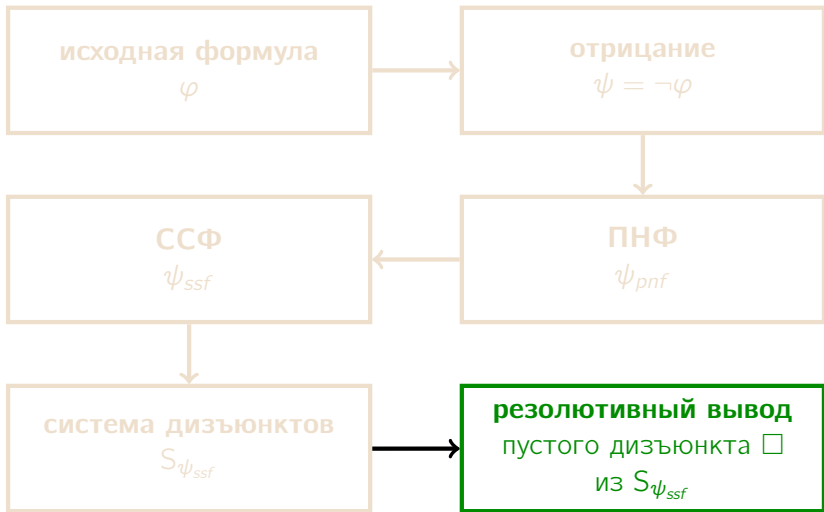
Резолютивный вывод
Корректность резолютивного вывода

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, февраль–май



$$\models \varphi \Leftrightarrow \not\models \psi \Leftrightarrow \not\models \psi_{pnf} \Leftrightarrow \not\models \psi_{ssf} \Leftrightarrow \not\models S_{\psi_{ssf}}$$



$$\models \varphi \Leftrightarrow \not\models \psi \Leftrightarrow \not\models \psi_{pnf} \Leftrightarrow \not\models \psi_{ssf} \Leftrightarrow \not\models S_{\psi_{ssf}}$$

Ещё немного определений

Положительная литера — это атом

Отрицательная литера — это отрицание атома

Если E — логическое выражение и θ — подстановка, то:

- ▶ $E\theta$ — пример выражения E
- ▶ если $\text{Var}_{E\theta} = \emptyset$, то $E\theta$ — основной пример
- ▶ если $\theta : \text{Var} \rightarrow \text{Var}$ — биекция, то
 - ▶ θ — переименование
 - ▶ $E\theta$ — вариант выражения E

Ещё немного определений

Пример

Рассмотрим выражение $E = P(x, \mathbf{f}(y)) \vee \neg R(y, \mathbf{c})$ и подстановки

$$\theta = \{x/u, y/z, u/x, z/y\}$$

$$\eta = \{x/\mathbf{g}(\mathbf{d}), y/z\}$$

$$\mu = \{z/\mathbf{c}\}$$

$$\varepsilon = \{\}$$

Тогда:

- ▶ $E\eta = P(\mathbf{g}(\mathbf{d}), \mathbf{f}(z)) \vee \neg R(z, \mathbf{c})$ — пример выражения E
- ▶ $E\eta\mu = P(\mathbf{g}(\mathbf{d}), \mathbf{f}(\mathbf{c})) \vee \neg R(\mathbf{c}, \mathbf{c})$ — основной пример выражения E
- ▶ подстановки θ и ε — переименования
- ▶ $E\theta = P(u, \mathbf{f}(z)) \vee \neg R(z, \mathbf{c})$ — вариант выражения E

Правило резолюции

Правило резолюции:

$$\frac{D_1 \vee L_1, D_2 \vee \neg L_2}{(D_1 \vee D_2)\theta}$$

Здесь

- ▶ D_1, D_2 — дизъюнкты
- ▶ L_1, L_2 — положительные литеры
- ▶ $\theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$

При использовании правила резолюции допускается перестановка слагаемых дизъюнктов

Дизъюнкт $(D_1 \vee D_2)\theta$ — **резольвента** дизъюнктов $D_1 \vee L_1, D_2 \vee \neg L_2$

Литеры $L_1, \neg L_2$ образуют **контрарную пару**

Правило резолюции

Пример

контрарная пара

$$P(x, f(y)) \vee \neg R(g(x, z), f(z))$$

$$Q(x) \vee R(y, x) \vee \neg P(g(z, y), z)$$

$$\neg R(g(g(f(y), y), f(y)), f(f(y))) \vee Q(g(f(y), y)) \vee R(y, g(f(y), y))$$

резольвента

$$\theta = \{x/g(f(y), y), z/f(y)\} \in \text{НОУ}(P(x, f(y)), P(g(z, y), z))$$

$$\text{резольвента: } (\neg R(g(x, z), f(z)) \vee Q(x) \vee R(y, x))\theta$$

Правило резолюции

Пример

контрарная пара

$$P(x, f(y)) \vee \neg R(g(x, z), f(z))$$

$$Q(x) \vee R(y, x) \vee \neg P(g(z, y), z)$$

$$P(f(z), f(g(f(z), z))) \vee Q(f(z)) \vee \neg P(g(z, g(f(z), z)), z)$$

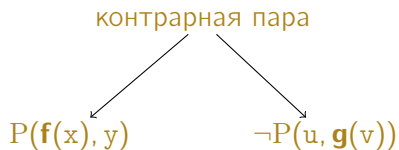
резольвента

$$\theta = \{x/f(z), y/g(f(z), z)\} \in \text{НОУ}(R(g(x, z), f(z)), R(y, x))$$

резольвента: $(P(x, f(y)) \vee Q(x) \vee \neg P(g(z, y), z))\theta$

Правило резолюции

Пример

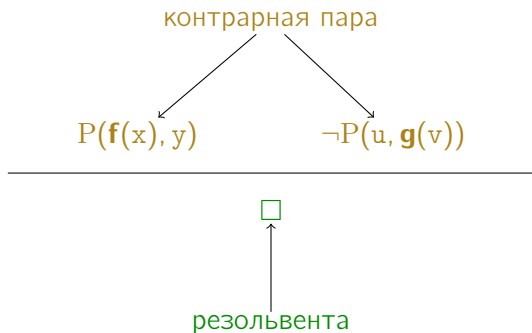


$$\theta = \{y/\mathbf{g}(v), u/\mathbf{f}(x)\} \in \text{НОУ}(P(\mathbf{f}(x), y), P(u, \mathbf{g}(v)))$$

резольвента: $(???)\theta$

Правило резолюции

Пример



$$\theta = \{y/\mathbf{g}(v), u/\mathbf{f}(x)\} \in \text{НОУ}(P(\mathbf{f}(x), y), P(u, \mathbf{g}(v)))$$

резольвента: $(\mathbf{f} \vee \mathbf{f})\theta$

Правило резолюции

Лемма (о корректности правила резолюции)

Если D — резольвента дизъюнктов D_1, D_2 , то $D_1, D_2 \models D$

Доказательство

(кванторные приставки опущены)

Пусть $D_1 = D'_1 \vee L_1$, $D_2 = D'_2 \vee \neg L_2$, $\theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$,
 $D = (D'_1 \vee D'_2)\theta$ и $L_1\theta = L_2\theta = L$

Тогда верно следующее:

$$D_1 \models D_1\theta$$

$$D_2 \models D_2\theta$$

$$D_1 \models D'_1\theta \vee L_1\theta$$

$$D_2 \models D'_2\theta \vee \neg L_2\theta$$

$$D_1 \models D'_1\theta \vee L$$

$$D_2 \models D'_2\theta \vee \neg L$$

$$D_1, D_2 \models D'_1\theta \vee L$$

$$D_1, D_2 \models D'_2\theta \vee \neg L$$

$$D_1, D_2 \models D'_1\theta \vee D'_2\theta \vee L$$

$$D_1, D_2 \models D'_1\theta \vee D'_2\theta \vee \neg L$$

Заметим, что если $\Gamma \models A \vee B$ и $\Gamma \models A \vee \neg B$, то $\Gamma \models A$ (очевидно?)

Тогда $D_1, D_2 \models D'_1\theta \vee D'_2\theta$

То есть $D_1, D_2 \models D \blacktriangledown$

Правило склейки

Применение одного только правила резолюции далеко не всегда позволяет вывести \square из невыполнимой системы

Например:

$$\begin{aligned} P(x) \vee P(c) \\ \neg P(c) \vee \neg P(y) \end{aligned}$$

Система из таких двух дизъюнктов **невыполнима**, но все резольвенты, резольвенты резольвент, ... этих дизъюнктов имеют **ровно две литеры**

Необходимо иметь правило, которое позволит получать \square и из таких систем

Правило склейки

Правило склейки

$$\frac{D \vee L_1 \vee L_2}{(D \vee L_1)\theta}$$

Здесь

- ▶ D — дизъюнкт
- ▶ L_1, L_2 — литеры
- ▶ $\theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$

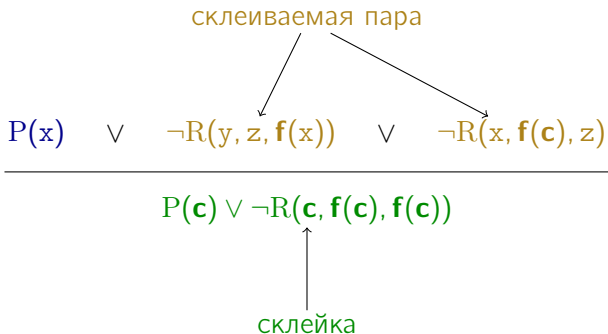
При использовании правила склейки
допускается перестановка слагаемых дизъюнктов

Дизъюнкт $(D \vee L_1)\theta$ — **склейка** дизъюнкта $D \vee L_1 \vee L_2$

Литеры L_1, L_2 образуют **склеиваемую пару**

Правило склейки

Пример



$$\theta = \{x/c, y/c, z/f(c)\} \in \text{НОУ}(\neg R(y, z, f(x)), \neg R(x, f(c), z))$$

склейка: $(P(x) \vee \neg R(y, z, f(x)))\theta$

Лемма (о корректности правила склейки)

Если D — склейка дизъюнкта D_1 , то $D_1 \models D$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы о корректности правила резолюции

Резолютивный вывод

Пусть S — система дизъюнктов

Резолютивный вывод из S — это конечная последовательность дизъюнктов

$$D_1, \dots, D_i, \dots, D_k,$$

такая что каждый дизъюнкт D_i является

- ▶ **вариантом** дизъюнкта из S ,
- ▶ **склежкой** дизъюнкта D_j , где $j < i$, или
- ▶ **резольвентой** дизъюнктов D_j, D_m , где $j < i$ и $m < i$

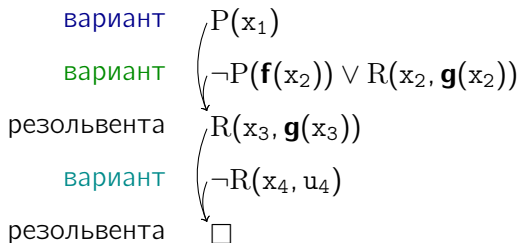
Дизъюнкт **резолютивно выводим** из S , если существует резолютивный вывод из S , оканчивающийся этим дизъюнктом

Резолютивный вывод

Пример

$$S = \left\{ \begin{array}{l} P(x) \\ \neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x, \mathbf{g}(x)) \\ \neg R(x, u) \end{array} \right\}$$

Резолютивный вывод \square из S :



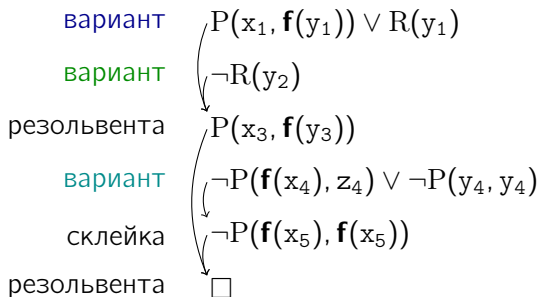
Следовательно, \square резолютивно выводим из системы S

Резолютивный вывод

Другой пример

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \neg P(\mathbf{f}(x), z) \vee \neg P(y, y) \\ P(x, \mathbf{f}(y)) \vee R(y) \\ \neg R(y) \end{array} \right\}$$

Резолютивный вывод \square из S :



Резолютивный вывод

Возможность использования всевозможных **вариантов** дизъюнктов наряду с самими дизъюнктами в резолютивном выводе настолько же важна, насколько и возможность использования резольвент и склеек

Например: $S = \{\neg P(x), P(f(x))\}$

$$\text{НОУ}(P(x), P(f(x))) = \emptyset$$

Значит, у этих дизъюнктов нет ни одной резольвенты

При этом система S невыполнима:

у формул $\forall x \neg P(x)$ и $\forall x P(f(x))$ нет общих моделей

К **вариантам** дизъюнктов из S применимо правило резолюции:

$$\{x_1/f(x_2)\} \in \text{НОУ}(P(x_1), P(f(x_2)))$$

Корректность использования всевозможных вариантов дизъюнктов обеспечивается следующей равносильностью:

$$\forall x \varphi \sim \forall y (\varphi\{x/y\}), \text{ если } \langle \dots \rangle$$

Резолютивный вывод

Резолютивный вывод **успешен**, если он оканчивается пустым дизъюнктом (\square)

Успешный резолютивный вывод также называется **резолютивным опровержением**:

- ▶ предположим, что исходная система дизъюнктов выполнима
- ▶ тогда система, к которой добавлены все дизъюнкты вывода, также выполнима (*это обосновывается дальше*)
- ▶ **противоречие**: среди добавленных дизъюнктов есть тождественно ложный (\square), а значит, расширенная система дизъюнктов невыполнима
- ▶ полученное противоречие **опровергает** выполнимость исходной системы (*доказывает невыполнимость методом «от противного»*)

Корректность резольтивного вывода

Теорема (о корректности резольтивного вывода)

Если из системы дизъюнктов S резольтивно выводим \square ,
то система S невыполнима

Доказательство.

Вариант D' любого дизъюнкта D равносильна D , а значит, $D \models D'$

По корректности правила резольции:

если D'' — *резольвента* дизъюнктов D_1, D_2 , то $D_1, D_2 \models D''$

По корректности правила склейки:

если D''' — *склейка* дизъюнкта D_3 , то $D_3 \models D'''$

Значит, по транзитивности логического следования,

любой дизъюнкт, выводимый из S ,

является логическим следствием S , и в частности, $S \models \square$

При этом дизъюнкт \square не имеет ни одной модели,

а значит, и система S не имеет ни одной модели ▼